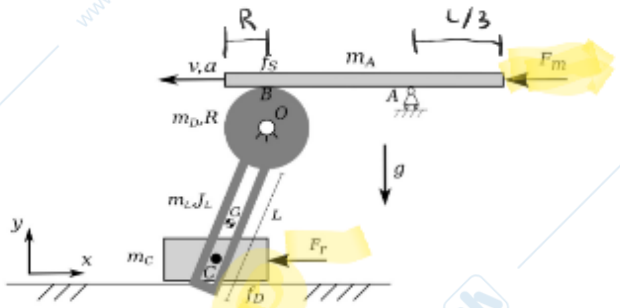
Ese13

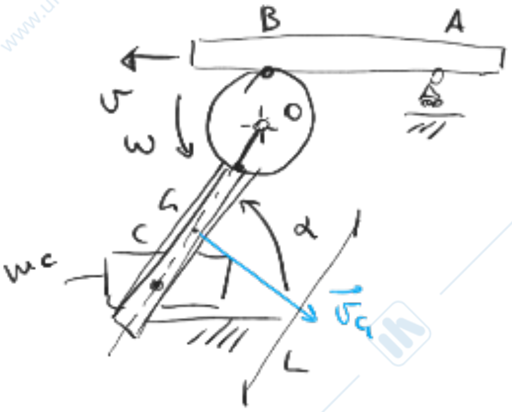
Problema 2



Il sistema meccanico in figura è composto dai seguenti corpi rigidi: l'asta omogenea di massa m_A vincolata tramite un carrello in A e in contatto senza strisciamento (si trascuri la resistenza al rotolamento) nel punto di contatto B con un disco. Il disco è omogeneo di massa m_D e raggio R ed è collegato a terra dalla cerniera in O e rigidamente saldato ad un'asta di massa m_L e momento di inerzia baricentrico J_L con baricentro in G. L'asta è dotata di scanalatura che permette lo scorrimento senza attrito del perno C rigidamente connesso al baricentro della massa omogenea m_C che trasla orizzontalmente sulla superficie scabra di coefficiente di attrito dinamico f_D. Inoltre, sulla massa m_C agisce una forza $\vec{F}_R = -F_R\vec{i}$.

Considerando nota la posizione del sistema ed ogni grandezza geometrica non specificatamente indicata e note la velocità $\vec{v} = -v\vec{i}$ e l'accelerazione $\vec{a} = -a\vec{i}$ della massa m_A si richiede di calcolare:

1. Velocità ed accelerazione della massa m_c
2. Le reazioni vincolari in C;
3. La forza $\vec{F}_m$ che garantisce il moto assegnato del sistema;
4. La verifica della condizione di aderenza nel punto di contatto B.



3 C.R. 9 gdl

1 cerniera in O 2 gdV

1 carrello in A 1 gdV

1 contatto in B 1 gdV

1 rot senza str. in B 1 gdV

1 perno in C "carrello" 1 gdV

1 pattino massa m_c 2 gdV

---

1 gdl : v

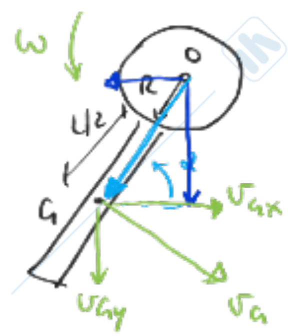
I) CINEMATICA

Rot senza strisc. $\longrightarrow$ $\omega = v/R$ $\quad \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \frac{v}{R}\vec{k}$

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{R} = \frac{a}{R} \qquad \dot{\alpha} = \omega \quad \ddot{\alpha} = \dot{\omega}$$

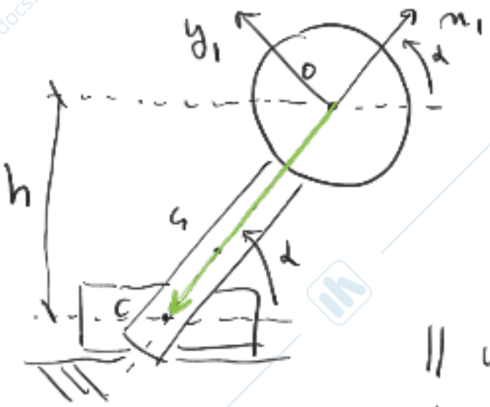
$$\begin{aligned}
\vec{v}_G &= \vec{\omega} \wedge (G-O) \\
&= \omega\vec{k} \wedge \left(R+\frac{L}{2}\right)\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right) \\
&= \omega\left(R+\frac{L}{2}\right)\left(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}\right) \\
&= v_{Gx}\,\vec{i} + v_{Gy}\,\vec{j}
\end{aligned}$$

$$v_G^2 = v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2 = \omega^2\left(R+L/2\right)^2$$



1) $\vec{v}_C, \vec{a}_C$ Utilizziamo una terna mobile

rotante in O



$$\vec{i}_1 = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$
$$\vec{j}_1 = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$$

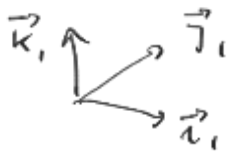
$$\vec{v}_C = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rel}$$

$\parallel$	$v_C?$	$\omega h/\sin\alpha$	$v_{rel}?$
$\angle$	$/\!/\vec{i}$	$/\!/-\vec{j}_1$ $\perp(C-O)$	$/\!/\vec{i}_1$

$$\vec{v}_C = v_C\,\vec{i}$$

$$\vec{v}_{tr} = \vec{\omega}_{TH} \wedge (C-O)$$
$$= \omega\vec{k} \wedge \frac{h}{\sin\alpha}(-\vec{i}_1)$$
$$= \omega\frac{h}{\sin\alpha}(-\vec{j}_1)$$
$$= \omega\frac{h}{\sin\alpha}(+\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$\overline{CO}\,\sin\alpha = h$$
$$\overline{CO} = h/\sin\alpha$$

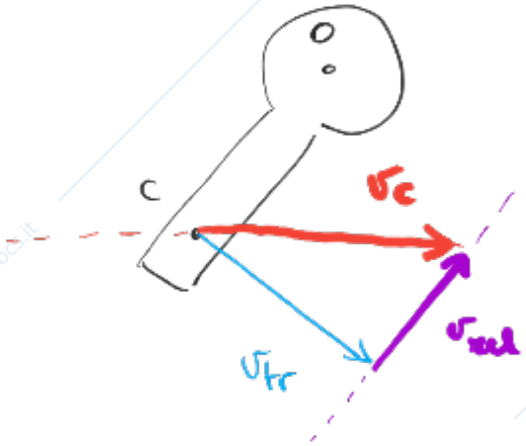


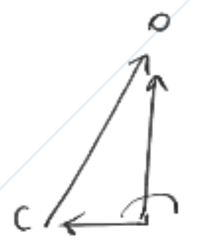
$$\vec{v}_{rel} = v_{rel}\,\vec{i}_1$$

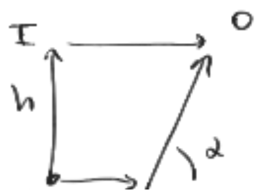
$$v_C\,\vec{i} = \omega\frac{h}{\sin\alpha}(+\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}) + v_{rel}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$$

$$\begin{cases} v_C = \omega\dfrac{h}{\sin\alpha}\cdot(+\sin\alpha) + v_{rel}\cos\alpha \\ 0 = -\omega\dfrac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha + v_{rel}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{rel} = \dfrac{\omega h}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ v_C = \dfrac{\omega h}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \dfrac{\omega h}{\sin^2\alpha} \end{cases}$$







H C

Accelerazioni

$$\vec{a}_c = \vec{a}_{tr}^{(t)} + a_{tr}^{(n)} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$$

$$\vec{a}_c = a_c \vec{i} \qquad ?$$

$$\vec{a}_{tr}^{(t)} = \dot{\vec{\omega}} \wedge (C-O) = \frac{\dot{\omega} h}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}\right)$$

$$|a_{tr}^{(t)}| = \frac{\dot{\omega} h}{\sin\alpha} \qquad \Delta \perp (C-O)$$

$$\vec{a}_{tr}^{(n)} = -\omega^2 (C-O) = -\frac{\omega^2 h}{\sin\alpha}\left(-\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\right)$$

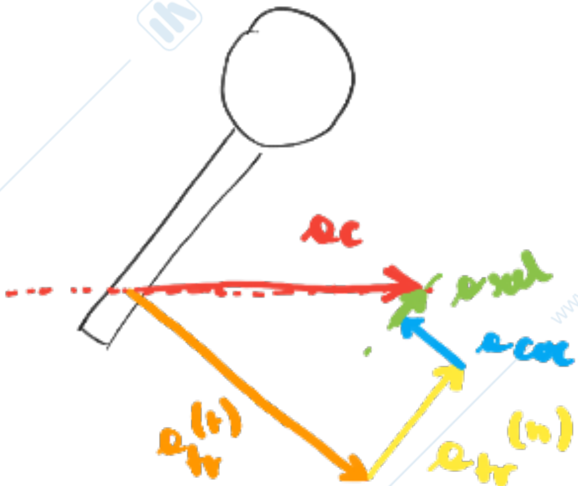
$$|a_{tr}^{(n)}| = \frac{\omega^2 h}{\sin\alpha} \qquad \Delta \, // -(C-O)$$

$$\vec{a}_{rel} = a_{rel}\,\vec{i}_1 \qquad |\vec{a}_{rel}| = a_{rel} \, ? \qquad \Delta \, // \, \vec{i}_1$$

$$\vec{a}_{cor} = 2\,\vec{\omega}_{TR} \wedge \vec{v}_{rel}$$

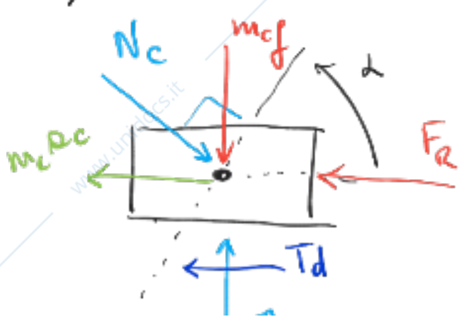
$$= 2\omega v_{rel}\left(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}\right)$$

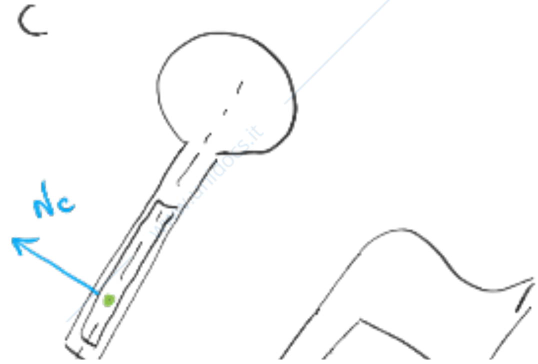
$$|\vec{a}_{cor}| = 2\omega v_{rel} \qquad \Delta \, // \, \vec{j}_1$$



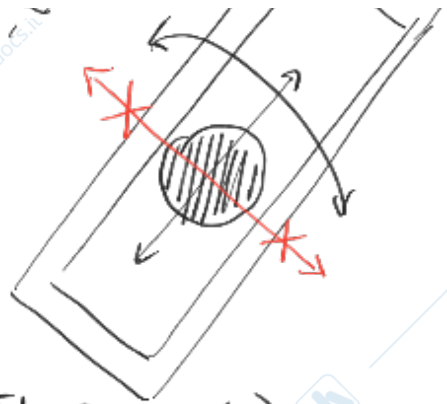
II) DINAMICA

1) Reazioni vincolari in C





$$\vec{T}_d = -f_d|N|\frac{\vec{v}_c}{|\vec{v}_c|}$$



(A) $T_d = f_d N$

$\sum F_x = 0 \qquad N_c \sin\alpha - m_c a_c - F_R - T_d = 0$ (B)

$\sum F_y = 0 \qquad N - N_c \cos\alpha - m_c g = 0$ (C)

(A, B, C) 3 eq 3 incognite N, N_c, T_d

3) F_m che garantisce il moto

$$\sum W = \frac{dE_c}{dt}$$

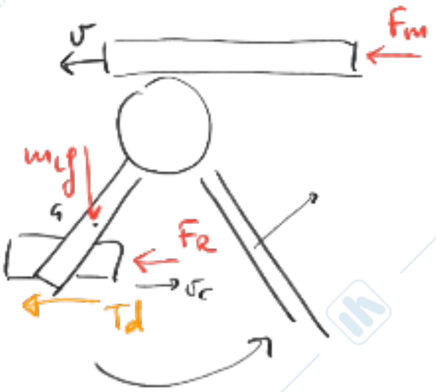
$$E_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \overbrace{\frac{1}{2}m_L v_G^2 + \frac{1}{2}J_L\omega^2}^{E_c \text{ Asta } C\text{-}O} + \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{1}{2}m_D R^2\right)}^{J_D}\omega^2 + \frac{1}{2}m_A v^2$$

$$v_G^2 = \left(R+\frac{L}{2}\right)^2\omega^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = m_c a_c v_c + m_L\left(R+\frac{L}{2}\right)^2\dot{\omega}\omega + J_L\dot{\omega}\omega + \frac{1}{2}m_D R^2\dot{\omega}\omega + m_A a v$$

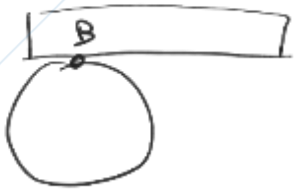
$$\sum W = F_m v - m_L g v_{Gy} - F_R v_c - T_d v_c$$

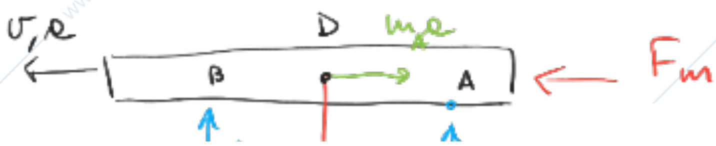
$$F_m(v, a)$$



4) Verifica di aderenza in B

$|T_B| \leq T_{Bmax}$ $\quad T_B$ è una reaz vincolare





$\Sigma F_x = 0 \qquad T_B = F_m - m_A a$

$T_{B\,max} = f_s |N_B|$

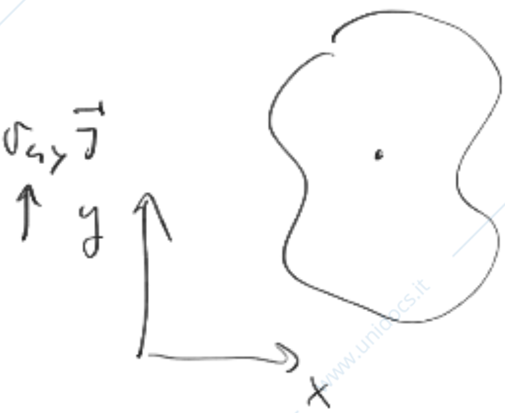
$\Sigma M_A = 0 \qquad N_B \overline{BA} = m_A g \, \overline{DA}$

$N_B = m_A g \dfrac{\overline{DA}}{\overline{BA}}$

$$|T_B| \leq f_s |N_B|$$

$$|F_m - m a| \leq f_s \left| m_A g \frac{\overline{DA}}{\overline{BA}} \right|$$

$\vec{v}_G = v_{Gx} \vec{i} + v_{Gy} \vec{j}$



$$W_{mg} = m\vec{g} \cdot \vec{v}_G = (-mg\,\vec{j}) \cdot (v_{Gx} \vec{i} + v_{Gy} \vec{j})$$

$$= -mg\, v_{Gy}$$

Ultima modifica: 16:04