Meccanica applicata alle macchine
Esercitazione 10 - Organi di macchine

Michele Vignati

15 marzo 2016

Tra le varie tipologie di organi di macchine, gli eccentrici o camme sono meccanismi che permettono di trasformare un moto rotatorio continuo in un movimento traslatorio alternato o rotatorio oscillante. In figura 1 sono mostrate alcune tipologie di meccanismi a camma. Ovviamente le combinazioni possibili sono infinite così come le soluzioni tecniche effettivamente impiegate nella pratica ingegneristica.

La camma può essere simmetrica o asimmetrica a seconda della necessità di avere movimenti delle punterie simmetrici o meno; inoltre può essere centrata se il centro di rotazione della camma si trova sull'asse di traslazione della punteria oppure deviata se altrimenti.

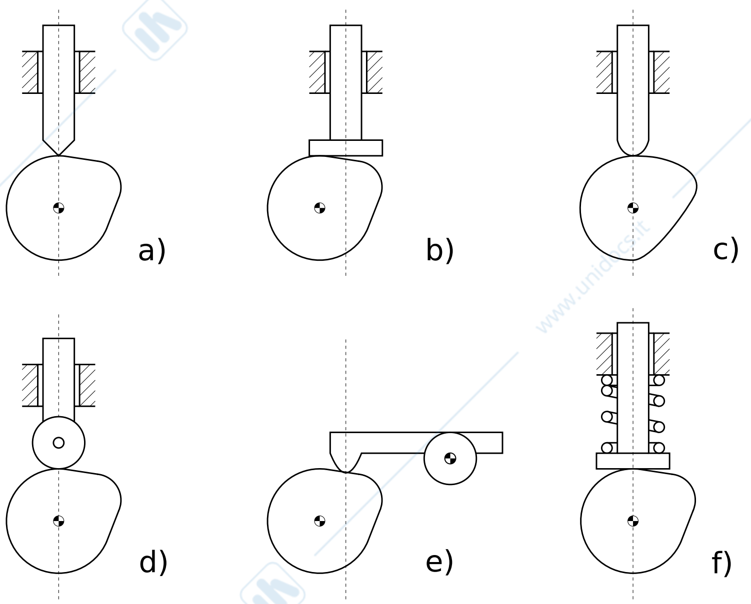

Figura 1: Esempi di meccanismi a camma: a) camma centrata con punteria a coltello; b) camma deviata con punteria a piattello; c) camma asimmetrica centrata con punteria a calotta; d) camma centrata con punteria a rotella; e) camma deviata con bilanciere; f) camma centrata con punteria a piattello e molla di richiamo

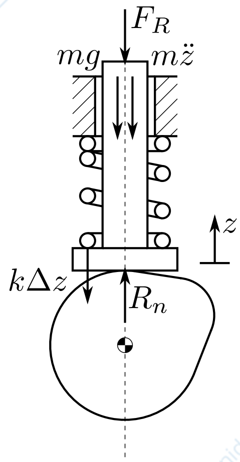

Figura 2: Forze agenti sulla punteria

La punteria può appoggiare sulla camma con un profilo affilato (a coltello), arrotondato (a calotta) o con un piattello ausiliario; la differenza tra le varie soluzioni sta nell'entità delle forze d'attrito che si generano tra il profilo della camma e quello della punteria. In generale si preferisce usare profili con raggi di curvatura ampi in modo da avere superfici in grado di mantenere un meato di olio lubrificante.

Al posto della punteria si può avere un bilanciere per ottenere un moto rotatorio oscillante o per sfruttare un braccio di leva e avere un moto traslatorio dall'altro lato del bilanciere.

1 Analisi cinematica camma circolare

Si analizza da principio un meccanismo a camma semplice (figura 3) costituito da una camma circolare di raggio R che ruota intorno ad un asse passante per un punto diverso dal centro della sua circonferenza. La camma è centrata rispetto all'asse della punteria che è rappresentata da un asta con piattello.

Del sistema sono note l'eccentricità e, rappresentante la distanza tra il centro della circonferenza della camma e la cerniera in O che vincola la camma a terra, e la storia temporale dell'angolo α che indica la rotazione della camma rispetto al sistema di riferimento assoluto.

Il contatto con strisciamento tipico dei meccanismi a camma è un vincolo che, a differenza del contatto di puro rotolamento, rappresenta un vincolo che blocca un solo grado di libera: la traslazione relativa del due corpi nella direzione normale al contatto.

Analizzando quindi i gradi di libertà totali del sistema si ha:

- 3 gdl per la camma: corpo rigido nel piano
- 3 gdl per il piattello: corpo rigido nel piano
- 1 gdv per il vincolo di contatto con strisciamento

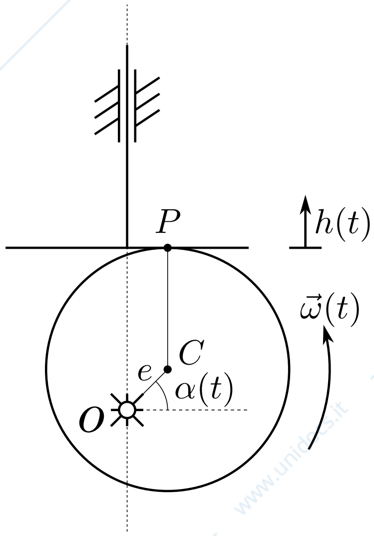

Figura 3: Camma circolare centrata

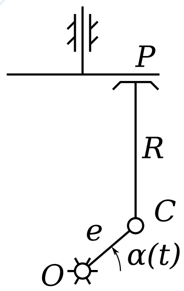

Figura 4: Meccanismo equivalente per il calcolo dell'alzata della punteria in funzione dell'angolo della camma

- 2 gdv per il manicotto del piattello
- 2 gdv per la cerniera della camma

sommando si ottiene 1 solo grado di libertà non vincolato. Il moto del sistema può quindi essere descritto da una sola coordinata indipendente: l'angolo α.

Dal punto di vista cinematico, il movimento della punteria per questo tipo di meccanismo può essere descritto tramite il meccanismo equivalente mostrato in figura 4.

Si noti come il nel contatto sia possibile identificare tre punti:

- il punto P ente cinematico che si trova sempre nel punto di contatto tra camma e punteria;
- il punto P_c appartenente alla camma che nell'atto di moto considerato è nel punto di contatto;

- il punto P_p appartenente alla punteria che nell'atto di moto considerato è nel punto di contatto

Per determinare l'alzata della camma, facendo riferimento allo schema equivalente e prendendo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale centrato in O con asse x orizzontale ed asse y verticale, si scrive la seguente chiusura cinematica

$$(P-O) = (P-C) + (C-O) \tag{1}$$

Il vettore $(P-C)$ è sempre verticale dovendo rappresentare P il punto di contatto tra camma e piattello ovvero il punto P come ente cinematico. Si ha quindi

$$(P-O) = R\vec{j} + e\cos\alpha\vec{i} + e\sin\alpha\vec{j} \tag{2}$$

L'alzata h della punteria è data dalla componente in y del vettore $(P-O)$ e vale

$$h = R + e\sin\alpha \tag{3}$$

La velocità e l'accelerazione della punteria si trovano derivando l'espressione dell'alzata appena ottenuta. La velocità della punteria $\dot{h}$ è quindi

$$\dot{h} = e\dot{\alpha}\cos\alpha \tag{4}$$

mentre la sua accelerazione si ottiene derivando la velocità

$$\ddot{h} = e\ddot{\alpha}\cos\alpha - e\dot{\alpha}^2\sin\alpha \tag{5}$$

ma $\ddot{\alpha}$ è nulla essendo la velocità angolare della camma costante e pari a ω, quindi

$$\ddot{h} = -e\dot{\alpha}^2\sin\alpha \tag{6}$$

La velocità del punto P_c, ovvero il punto di contatto appartenente alla camma, per l'atto di moto considerato si ottiene tramite il teorema di Rivals

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P_c} &= \vec{\omega}\wedge(P-O) = \vec{\omega}\wedge(P_c-C) + \vec{\omega}\wedge(C-O)\\ &= -\omega R\vec{i} - e\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{i} + e\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{j}\end{aligned} \tag{7}$$

Il punto P_p, punto di contatto appartenente al piattello, si muove invece in direzione verticale, essendo il piattello vincolato lungo l'asse x, con velocità che è la velocità della punteria $\dot{h}$

$$\vec{v}_{P,piattello} = e\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{j} \tag{8}$$

In figura 5 sono mostrate le due velocità del punto P appartenete alla camma e al piattello. I due punti P hanno velocità diversa pertanto il contatto avviene con strisciamento. La velocità di strisciamento è pari alla differenza tra le due velocità $v_{P_c} - v_{P_p}$, che corrisponde alla velocità lungo x della velocità di P appartenente alla camma:

$$\vec{v}_{strisicamento} = \vec{v}_{P,camma} - \vec{v}_{P,piattello} = (-R\dot{\alpha} - e\dot{\alpha}\sin\alpha)\vec{i} \tag{9}$$

2 Camma circolare deviata con punteria a coltello

da scrivere

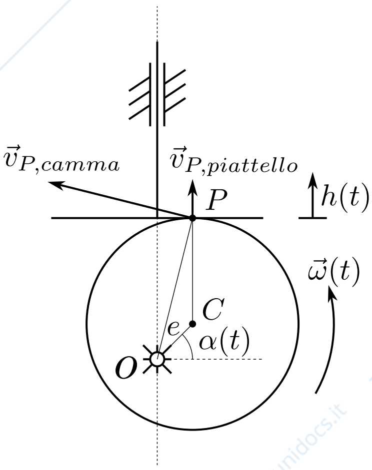

Figura 5: Camma circolare centrata, velocità di strisciamento nel punto di contatto

3 Progettazione del profilo di una camma data la legge di alzata

Si vuole ora determinare il profilo di una camma che realizzi la legge di alzata desiderata. Il meccanismo è una camma simmetrica centrata con punteria a piattello come quella di figura 2.

3.1 Legge di moto della punteria

La camma ruota con velocità angolare ω costante pari a 2π rad/s. Si vuole che la punteria abbia la seguente legge di moto in funzione dell'angolo α della camma come mostrata in figura 6 e 7

$$h(\alpha) = \begin{cases} \frac{h_{max}}{\pi}\left(2\alpha - \frac{1}{2}\sin(4\alpha)\right) & 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 2h_{max} - \frac{h_{max}}{\pi}\left(2\alpha - \frac{1}{2}\sin(4\alpha)\right) & \frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi \\ 0 & \pi \le \alpha < 2\pi \end{cases}$$
$$v(\alpha) = \begin{cases} \frac{2h_{max}}{\pi}(1-\cos 4\alpha) & 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2h_{max}}{\pi}(1-\cos 4\alpha) & \frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi \\ 0 & \pi \le \alpha < 2\pi \end{cases} \tag{10}$$
$$a(\alpha) = \begin{cases} \frac{8h_{max}}{\pi}\sin(4\alpha) & 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{8h_{max}}{\pi}\sin(4\alpha) & \frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi \\ 0 & \pi \le \alpha < 2\pi \end{cases}$$

3.2 Determinazione del profilo della camma

Una volta stabilità la legge di moto della punteria $h = h(\alpha)$ è necessario determinare i profili coniugati dei due membri a contatto. Il profilo del piattello è noto ed è rappresentato da una retta.

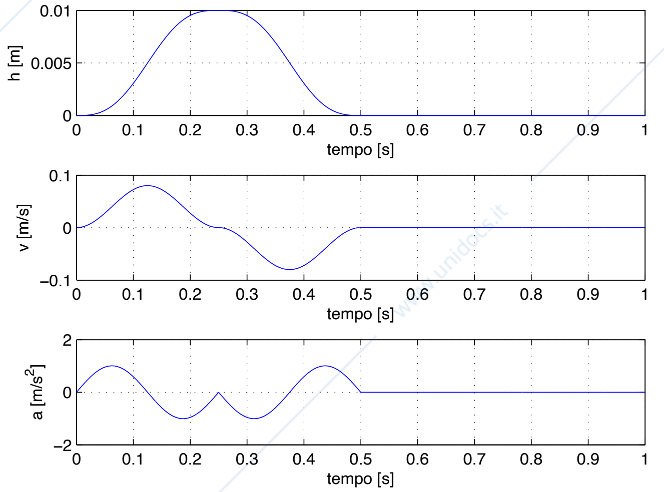

Figura 6: Legge di moto dell'alzata della punteria

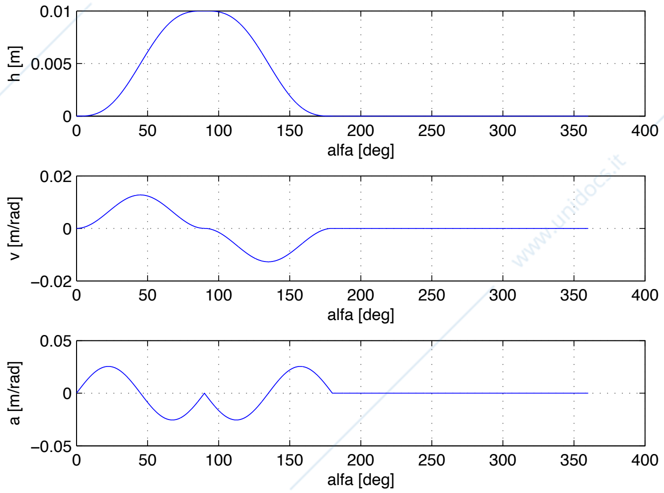

Figura 7: Legge di moto dell'alzata della punteria in funzione di α

Per determinare il profilo della camma si opera un'inversione cinematica: si ferma la camma e si fa ruotare il piattello intorno alla camma con velocità uguale e contraria alla velocità della camma. L'inviluppo delle successive posizioni assunte dal piattello costituisce il profilo coniugato che si vuole determinare.

Si ipotizza un profilo di camma generico; questo profilo serve solo per disegnare la posizione dei punti e scrivere delle relazioni analitiche tra i vari punti notevoli, non ha nessuna influenza sul profilo finale della camma. Appoggiandoci alla figura 9 si evidenziano tre punti notevoli: il centro di rotazione della camma (punto O), il punto d'intersezione tra l'asse del piattello e la base del piattello (punto C) e, infine, il punto di contatto tra camma e piattello (punto P). Per disegnare il profilo della camma si deve determinare la posizione del punto di contatto P tra le due superfici in funzione dell'angolo α.

$$\begin{cases} x_P(\alpha) = CO \sin\alpha + CP \cos\alpha \\ x_P(\alpha) = CO \cos\alpha - CP \sin\alpha \end{cases} \tag{11}$$

Il valore dei due segmenti si trova analizzando alzata e velocità di alzata della punteria in funzione di α.

Il segmento CO rappresenta la distanza del piattello dal centro della camma per un dato angolo α che è la somma del raggio base della camma più l'alzata desiderata per quell'angolo α

$$CO = R + h(\alpha) \tag{12}$$

Per determinare CP bisogna analizzare le velocità del punto P; se ω è la velocità angolare della camma, la velocità del punto P sarà:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{13}$$

la componente lungo l'asse della punteria deve essere necessariamente uguale alla velocità della punteria perché i due profili siano a contatto (vedi figura 10), quindi

$$\omega r \cos\gamma = \dot{h} \tag{14}$$

ma

$$r \cos\gamma = CP \tag{15}$$

quindi

$$CP = \frac{\dot{h}(t)}{\omega} = \frac{\partial h}{\partial \alpha} = h'(\alpha) \tag{16}$$

sostituendo i valori di CP e CO appena trovati nell'espressione del raggio r e dell'angolo γ si ottiene

$$\begin{cases} r(\alpha) = \sqrt{(R+h)^2 + (h')^2} \\ \gamma(\alpha) = \arctan\left(\frac{h'}{R+h}\right) \\ \varphi(\alpha) = \alpha + \gamma(\alpha) \end{cases} \tag{17}$$

Il profilo della camma è dato così da una curva parametrica ψ, funzione del raggio r e dell'angolo φ che sono a loro volta funzione di α:

$$\psi = \psi(r(\alpha), \varphi(\alpha)) \tag{18}$$

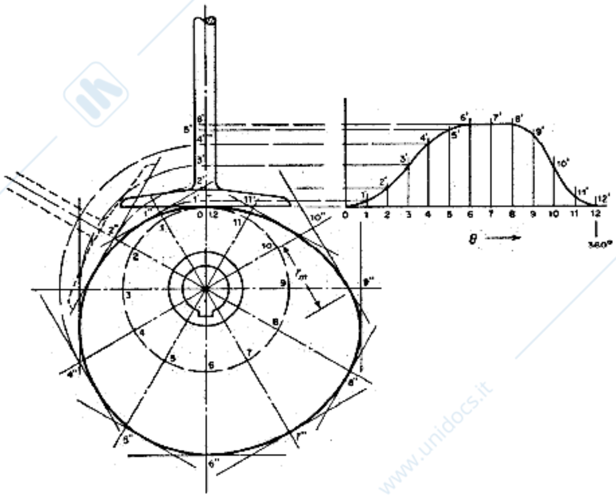

Figura 8: Inversione cinematica per la determinazione del profilo

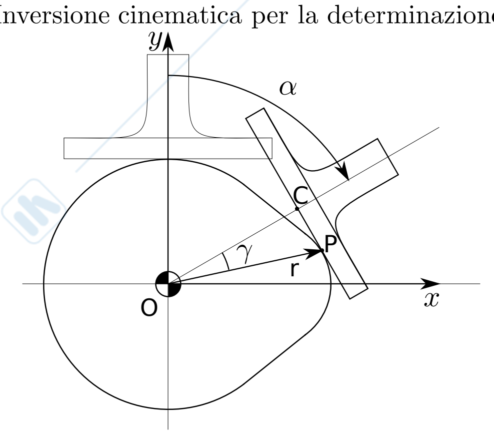

Figura 9: Inversione cinematica per la determinazione del profilo

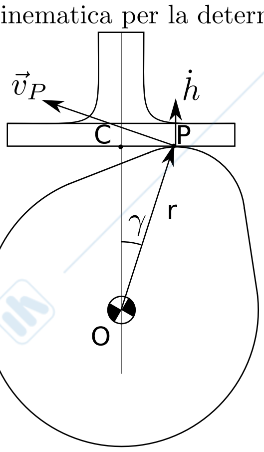

Figura 10: Inversione cinematica per la determinazione del profilo

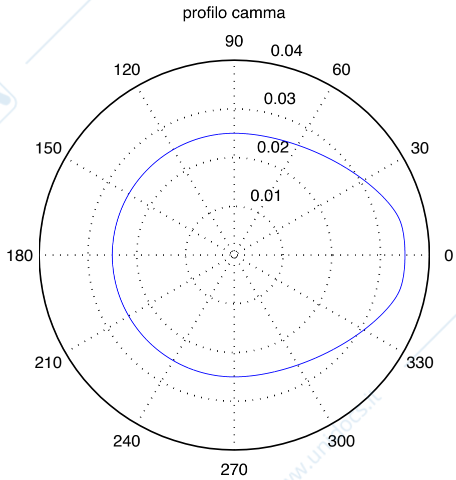

Figura 11: Profilo ottenuto per la legge di moto richiesta

oppure in coordinate cartesiane

$$\psi = \psi(x_P(\alpha), y_P(\alpha)) \tag{19}$$

con

$$\begin{cases} x_P(\alpha) = r\cos\varphi \\ y_P(\alpha) = r\sin\varphi \end{cases} \tag{20}$$

4 Dimensionamento della molla di richiamo

Fondamentale è che vi sia sempre contatto tra punteria e camma. Se così non fosse potrebbero generarsi degli urti che porterebbe al deterioramento della camma. Se consideriamo la figura 2, sulla punteria agiscono:

- forza di contatto normale tra camma e punteria R_n
- forza resistente del sistema mosso dalla punteria F_R
- forza della molla $k\Delta z$
- forza peso della punteria mg
- forza d'inerzia della punteria $m\ddot{z}$

l'equazione di equilibrio alla traslazione è

$$R_n = F_R + k\Delta z + mg + m\ddot{z} \tag{21}$$

Affinchè ci sia contatto, la forza R_n deve essere maggiore o al limite uguale a zero

$$R_n = F_R + k\Delta z + mg + m\ddot{z} > 0 \tag{22}$$

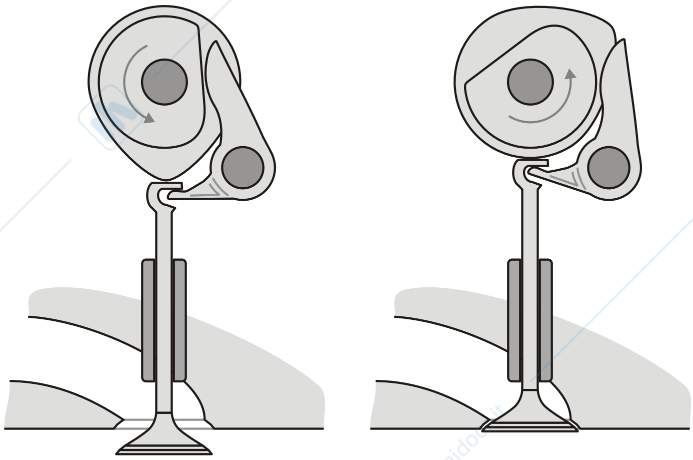

Figura 12: Distribuzione desmodromica in cui la punteria è vincolata da due bilancieri al posto della molla di richiamo

mentre si suppone che le forze resistenti e la forza peso siano sempre dirette nel verso indicato, l'accelerazione $\ddot{z}$ cambia di segno a seconda della posizione angolare della camma. La condizione limite si ottiene quando si annulla la reazione vincolare R_n, in questa condizione si ha quindi che la forza della molla deve essere

$$k\Delta z > -F_R - mg - m\ddot{z} \tag{23}$$

si può quindi ricavare la rigidezza minima della molla.

L'utilizzo della molla può portare però a consumi eccessivi di energia per muovere la punteria, nascono pertanto sistemi a doppio bilanciere in cui la punteria è completamente guidata nel movimento di salita da un bilanciere e nel movimento di discesa da un altro bilanciere. Questo sistema obbliga a raddoppiare anche la camma, un esempio è mostrato in figura 12 dove è mostrata una delle varianti del sistema desmodromico di distribuzione con due camme ed un bilanciere.

5 Problema dell'impuntamento, attrito piattello e camma

Nell'analisi fin qui fatta non è stato considerato l'effetto dell'attrito sulla dinamica del meccanismo in particolare non è stato considerato un problema tipico dei meccanismi a camma che è l'impuntamento. L'impuntamento è il fenomeno per cui la punteria fatica a scorrere a causa dell'attrito tra il suo stelo e il telaio in cui scorre.

Il vincolo di manicotto che permette lo scorrimento della punteria è un vincolo ideale. Nella normale pratica ingegneristica il foro e lo stelo della punteria hanno necessariamente diametro diverso, si parla di centesimi di millimetro. Questo gioco radiale permette una minima rotazione relativa tra punteria e foro guida. In seguito alla rotazione, la punteria si appoggia al foro guida come mostrato in figura 13.

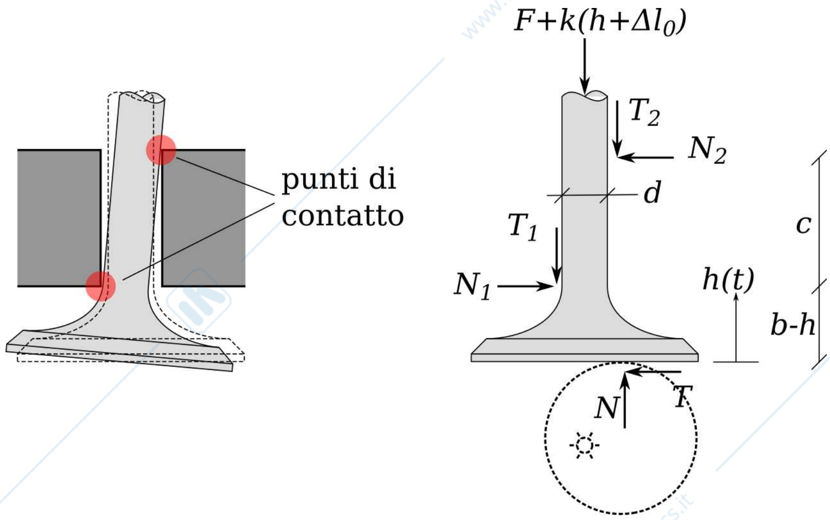

Figura 13: Impuntamento della camma, punti di contatto effettivi e schema per il calcolo delle forze