Cinematica del corpo rigido
Scala cascante

Michele Vignati

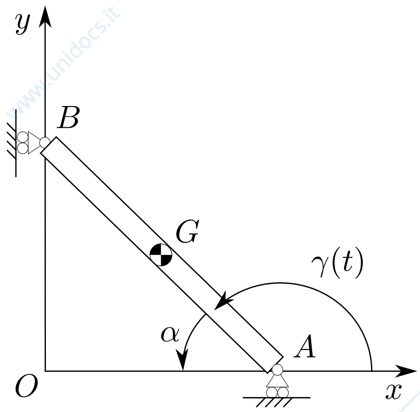
March 2, 2020

Una scala nel piano $x-y$ è vincolata a scorrere su una guida orizzontale e su una verticale per mezzo di due carrelli posti nei punti A e B. L'asta è omogenea di lunghezza L con baricentro G.

É nota la legge di moto dell'angolo α tra l'asta e l'asse x:

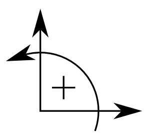
$$\alpha(t), \quad \dot{\alpha}(t), \quad \ddot{\alpha}(t)$$

Determinare posizione, velocità ed accelerazione dei punti A, B e G.



Soluzione

Si fissano le convenzioni di segno per gli spostamente e le rotazioni: si utilizza un riferimento destrorso con segni concordi con gli assi x e y e rotazioni positive se antiorarie.



Dall'analisi dei gradi di libertà (gdl) del sistema si nota come sia sufficiente una sola coordinata libera (α o γ in questo caso essendo nota) a descrivere il moto del sistema avendo:

- 3 gdl per il corpo rigido nel piano (6 gdl nello spazio)
- 1 gdv per il carrello in A
- 1 gdv per il carrello in B

Risoluzione con i numeri complessi

Cinematica dei punti A e B

Il primo approccio al problema che si utilizza è quello coi numeri complessi. Date le convenzioni tipiche dell'approccio dei numeri complessi si preferisce usare

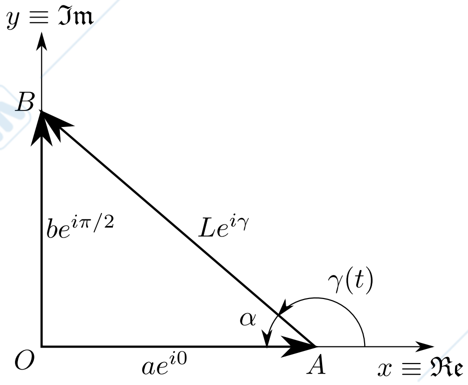


Figure 1: Chiusura cinematica per la determinazione della cinematica dei punti A e B

l'angolo γ in luogo di α in modo da avere un angolo positivo antiorario e misurato a partire dall'asse x:

$$\gamma = \pi - \alpha$$
$$\dot{\gamma} = -\dot{\alpha}$$
$$\ddot{\gamma} = -\ddot{\alpha}$$

Si utilizza la seguente chiusura cinematica:

$$(A - O) + (B - A) = (B - O) \tag{1}$$

che in termini complessi diventa

$$ae^{i0} + Le^{i\gamma} = be^{i\pi/2} \tag{2}$$

scomponendo nei termini reali ed immaginari si ha

$$\begin{cases} a\cos(0) + L\cos(\gamma) = b\cos(\pi/2) \\ a\sin(0) + L\sin(\gamma) = b\sin(\pi/2) \end{cases} \tag{3}$$

Analizzando il numero di incognite e di temini noti si ha

noto	incognito
$\gamma(t)$, L	a, b

il sistema è dunque risolubile:

$$\begin{cases} a = -L\cos(\gamma) = L\cos\alpha \\ b = L\sin(\gamma) = L\sin\alpha \end{cases} \tag{4}$$

Le velocità si ottengono derivando i vettori posizione

$$\dot{\alpha}e^{i0} + L\dot{\gamma}e^{i(\gamma+\pi/2)} = \dot{b}e^{i\pi/2} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dot{a}\cos(0) + L\dot{\gamma}\cos(\gamma + \pi/2) = \dot{b}\cos(\pi/2) \\ \dot{a}\sin(0) + L\dot{\gamma}\sin(\gamma + \pi/2) = \dot{b}\sin(\pi/2) \end{cases} \tag{6}$$

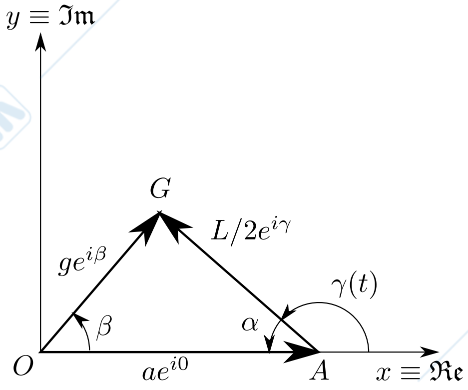


Figure 2: Chiusura cinematica per la determinazione della cinematica del punto G

$$\begin{cases} \dot{a} = L\dot{\gamma}\sin\gamma = -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ \dot{b} = L\dot{\gamma}\cos\gamma = L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases} \tag{7}$$

analogamente le accelerazioni si calcolano derivando le velocità

$$\ddot{\alpha}e^{i0} + L\ddot{\gamma}e^{i(\gamma+\pi/2)} + L\dot{\gamma}^2 e^{i(\gamma+\pi)} = \ddot{b}e^{i\pi/2} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \ddot{a}\cos(0) + L\ddot{\gamma}\cos(\gamma+\pi/2) + L\dot{\gamma}^2\cos(\gamma+\pi) = \ddot{b}\cos(\pi/2) \\ \ddot{a}\sin(0) + L\ddot{\gamma}\sin(\gamma+\pi/2) + L\dot{\gamma}^2\sin(\gamma+\pi) = \ddot{b}\sin(\pi/2) \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \ddot{a} = L\ddot{\gamma}\sin(\gamma) + L\dot{\gamma}^2\cos(\gamma) = -\ddot{\alpha}L\sin(\alpha)\vec{i} - \dot{\alpha}^2 L\cos(\alpha)\vec{i} \\ \ddot{b} = L\ddot{\gamma}\cos(\gamma) - L\dot{\gamma}^2\sin(\gamma) = \ddot{\alpha}L\cos(\alpha)\vec{j} - \dot{\alpha}^2 L\sin(\alpha)\vec{j} \end{cases} \tag{10}$$

Cinematica del punto G

Nota la cinematica dei punti A e B, la cinematica del punto G si trova scrivendo un'altra chiusura cinematica:

$$(G-O) = (A-O) + (G-A) \tag{11}$$

che in termini complessi diventa

$$ge^{i\beta} = ae^{i0} + \frac{L}{2}e^{i\gamma} \tag{12}$$

scomponendo nei termini reali ed immaginari si ha

$$\begin{cases} g\cos(\beta) = a\cos(0) + \frac{L}{2}\cos(\gamma) \\ g\sin(\beta) = a\sin(0) + \frac{L}{2}\sin(\gamma) \end{cases} \tag{13}$$

Analizzando il numero di incognite e di temini noti si ha

noto	incognito
$\gamma(t)$, L, $a(t)$	g, β

il sistema è quindi risolubile

$$\begin{cases} g\cos(\beta) = a + \frac{L}{2}\cos(\gamma) \\ g\sin(\beta) = \frac{L}{2}\sin(\gamma) \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} g\cos(\beta) = -L\cos(\gamma) + \frac{L}{2}\cos(\gamma) = -\frac{L}{2}\cos(\gamma) \\ g\sin(\beta) = \frac{L}{2}\sin(\gamma) \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \beta = \pi - \gamma = \alpha \\ g = L/2 \end{cases} \tag{16}$$

abbiamo trovato che il vettore $(G - O)$ ha modulo costante pari a $L/2$ e ruota di un angolo pari ad α. La velocità del punto G è quindi

$$\frac{d(G-O)}{dt} = \frac{L}{2}\dot{\beta}e^{i(\beta+\pi/2)} = \frac{L}{2}\dot{\gamma}e^{i(\pi/2-\gamma)} \tag{17}$$

l'accelerazione è

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{L}{2}\ddot{\alpha}e^{i(\alpha+\pi/2)} + \frac{L}{2}\dot{\alpha}^2 e^{i(\alpha+\pi)} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(\vec{a}_G) = \frac{L}{2}\ddot{\alpha}\cos(\alpha+\pi/2) + \frac{L}{2}\dot{\alpha}^2\cos(\alpha+\pi) \\ \mathfrak{Im}(\vec{a}_G) = \frac{L}{2}\ddot{\alpha}\sin(\alpha+\pi/2) + \frac{L}{2}\dot{\alpha}^2\sin(\alpha+\pi) \end{cases} \tag{19}$$

$$\vec{a}_G = -\ddot{\alpha}\frac{L}{2}\sin(\alpha)\vec{i} - \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\cos(\alpha)\vec{i} + \ddot{\alpha}\frac{L}{2}\cos(\alpha)\vec{j} - \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\sin(\alpha)\vec{j} \tag{20}$$

Risoluzione con il CIR e teorema di Rivals

Dalla teoria si sa che l'atto di moto rigido nel piano può essere sempre ridotto ad un atto di moto rotatorio o ad un atto di moto traslatorio (caso particolare dell'atto rotatorio ovvero con CIR tendente all'infinito).

Nel caso in esame, il CIR si trova tracciando le rette perpendicolari allo spostamento consentito dai carrelli A e B. Il CIR si trova quindi nel punto H ottenuto incrociando le rette passanti per A e B.

Il CIR si sposta nel piano seguendo il movimento dei carrelli. Se si disegna la traiettoria del CIR si ottiene una curva che viene chiamata **base** del moto del sistema (o polare fissa). Se si disegna invece la traiettoria del CIR vista da un sistema di riferimento solidale con l'asta e centrato nel baricentro, la curva che si ottiene è detta **rulletta** (o polare mobile). In figura 5 sono mostrate base e rulletta per tre atti di moto del sistema. Risulta evidente come il sistema si muova come due dischi che rotolano uno all'interno dell'altro. Il punto di contatto tra i dischi è il CIR dell'asta.

Nota la posizione del CIR, la velocità dei punti viene quindi scritta come somma della velocità di trascinamento più la velocità relativa data dalla velocità angolare ω:

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_H + \vec{\omega} \wedge (A - H) \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_H + \vec{\omega} \wedge (B - H) \\ \vec{v}_G &= \vec{v}_H + \vec{\omega} \wedge (G - H) \end{aligned} \tag{21}$$

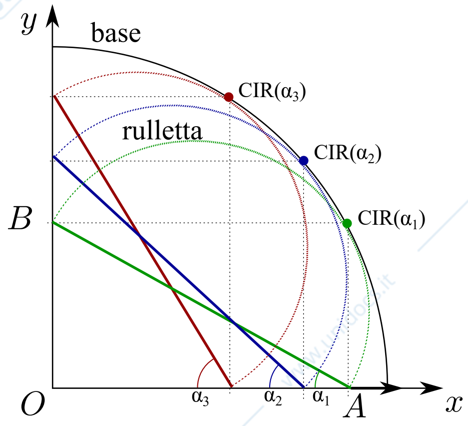


Figure 3: Centro di istantanea rotazione: base e rulletta

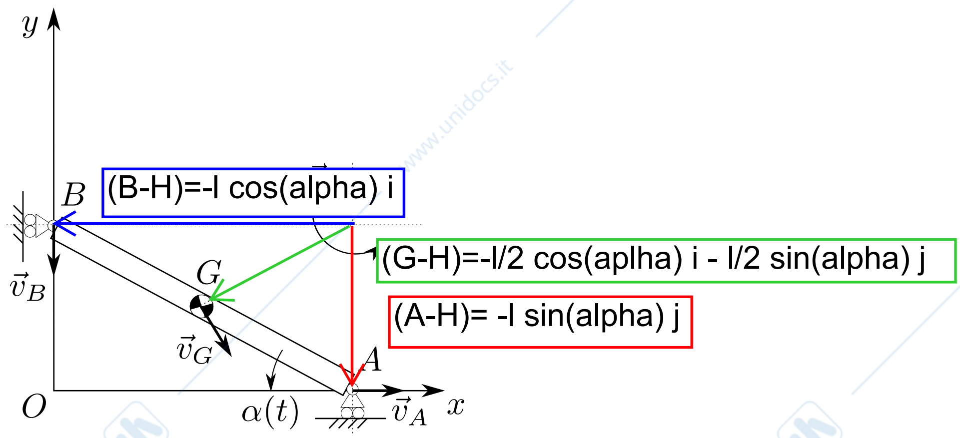


Figure 4: Centro di istantanea rotazione e velocità dei punti usando il teorema di Rivals

Il punto H nell'atto di moto considerato ha velocità nulla essendo il CIR del sistema. (Il punto H è fermo nell'atto di moto ma ha accelerazione diversa da zero perchè si muove nel tempo.) Si può pertanto scrivere $\vec{v}_H = \vec{0}$ quindi

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{\omega} \wedge (A - H) \\ \vec{v}_B &= \vec{\omega} \wedge (B - H) \\ \vec{v}_G &= \vec{\omega} \wedge (G - H) \end{aligned} \tag{22}$$

La velocità angolare ω si può quindi scrivere come

$$\vec{\omega} = -\dot{\alpha}\vec{k} \tag{23}$$

i vettori che danno la distanza dei punti A, B e G dal CIR (punto H) sono

$$\begin{aligned} (A - H) &= 0\vec{i} - L\sin(\alpha)\vec{j} + 0\vec{k} \\ (B - H) &= -L\cos(\alpha)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ (G - H) &= -\frac{L}{2}\cos(\alpha)\vec{i} - \frac{L}{2}\sin(\alpha)\vec{j} + 0\vec{k} \end{aligned} \tag{24}$$

I vettori hanno segno secondo la convenzione scelta quindi negativo perchè le coordinate di H sono maggiori di quelle degli altri punti. Le velocità sono

$$\begin{aligned} \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - H) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ 0 & -L\sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix} = -\dot{\alpha}L\sin(\alpha)\vec{i} \\ \vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - H) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ L\cos(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\alpha}L\cos(\alpha)\vec{j} \\ \vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge (G - H) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\alpha} \\ -\frac{L}{2}\cos(\alpha) & -\frac{L}{2}\sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix} = -\dot{\alpha}\frac{L}{2}\sin(\alpha)\vec{i} + \dot{\alpha}\frac{L}{2}\cos(\alpha)\vec{j} \end{aligned} \tag{25}$$

come ci si aspettava la velocità del punto A ha una sola componente lungo l'asse x mentre il punto B ha componente solo lungo l'asse y. I segni dei vettori sono coerenti con le convenzioni di segno prese. Rispetto alla figura 4 hanno segno contrario perchè ω ed $\dot{\alpha}$ hanno segno contrario. Il risultato è ovviamente analogo a quello ottenuto con i numeri complessi. Sostituendo $\alpha = \pi - \gamma$ nell'equazione (25) si ottengono le velocità calcolate nell'equazione (7).

Il metodo utilizzato per il calcolo delle velocità non è velido per le accelerazioni, il CIR ha velocità nulla ma non accelerazione nulla. Si ha infatti

$$\vec{a}_A = \vec{a}_H + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - H) + \vec{\omega} \wedge \frac{d(A - H)}{dt} \tag{26}$$

Non conoscendo il valore di $\vec{a}_H$, le le accelerazioni si derivano quindi dalle velocità trovate con l'equazione (25):

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\ddot{\alpha}L\sin(\alpha)\vec{i} - \dot{\alpha}^2L\cos(\alpha)\vec{i} \\ \vec{a}_B &= \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \ddot{\alpha}L\cos(\alpha)\vec{j} - \dot{\alpha}^2L\sin(\alpha)\vec{j} \\ \vec{a}_G &= \frac{d\vec{v}_G}{dt} = -\ddot{\alpha}\frac{L}{2}\sin(\alpha)\vec{i} - \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\cos(\alpha)\vec{i} + \ddot{\alpha}\frac{L}{2}\cos(\alpha)\vec{j} - \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\sin(\alpha)\vec{j} \end{aligned} \tag{27}$$

La velocità del punto G poteva anche essere calcolata applicando il teorema di Rivals una volta nota la velocità di uno dei due punti A o B:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) \tag{28}$$

l'accelerazione si ottine derivando nel tempo

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) - \omega^2 (G - A) \tag{29}$$

$$\vec{a}_A = -\ddot{\alpha} L \sin(\alpha)\vec{i} - \dot{\alpha}^2 L \cos(\alpha)\vec{i} \tag{30}$$

$$\dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\ddot{\alpha} \\ -\frac{L}{2}\cos\alpha & \frac{L}{2}\sin\alpha & 0 \end{bmatrix} = \ddot{\alpha}\frac{L}{2}\sin\alpha\vec{i} + \ddot{\alpha}\frac{L}{2}\cos\alpha\vec{j} \tag{31}$$

$$\omega^2 (G - A) = -\dot{\alpha}^2 \frac{L}{2}\cos\alpha\vec{i} + \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\sin\alpha\vec{j} \tag{32}$$

sommando

$$\vec{a}_G = -\ddot{\alpha}\frac{L}{2}\sin\alpha\vec{i} - \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\cos\alpha\vec{i} + \ddot{\alpha}\frac{L}{2}\cos\alpha\vec{j} - \dot{\alpha}^2\frac{L}{2}\sin\alpha\vec{j} \tag{33}$$

Approccio con le terne relative

Un ulteriore approccio per la risoluzione del problema consiste nell'utilizzare le terne relative per la scrittura della velocità dei punti del sistema.

Prendendo una terna cartesiana destrorsa traslante e centrata nel punto A, la velocità del punto B si ottiene come somma della velocità di trascinamento della terna mobile e della velocità relativa:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{tr} + \vec{v}_{rel} \tag{34}$$

La velocità di trascinamento $\vec{v}_{tr}$ coincide con la velocità del punto A che ha direzione parallela all'asse x a causa dei vincoli dei sistema.

$$\vec{v}_{tr} \equiv \vec{v}_A = v_A\vec{i} \tag{35}$$

La velocità relativa $\vec{v}_{rel}$ è invece la velocità di rotazione di B intorno ad A e vale

$$\vec{v}_{rel} = \vec{\omega} \wedge (B - A) \tag{36}$$

che ha direzione perpendicolare all'asta AB e modulo pari a

$$v_{rel} = \dot{\alpha} L \tag{37}$$

La velocità di B è invece parallela all'asse y sempre per i vincoli del sistema.

$$\vec{v}_B = v_B\vec{j} \tag{38}$$

L'equazione (34) può geometricamente essere rappresentata come in figura. Scrivendo in una tabella le incognite ed i termini noti si ha

noti	incogniti
direzione di $\vec{v}_A$	modulo di $\vec{v}_A$
direzione di $\vec{v}_B$	modulo di $\vec{v}_B$
direzione di $\vec{v}_{rel}$	
modulo di $\vec{v}_{rel}$	

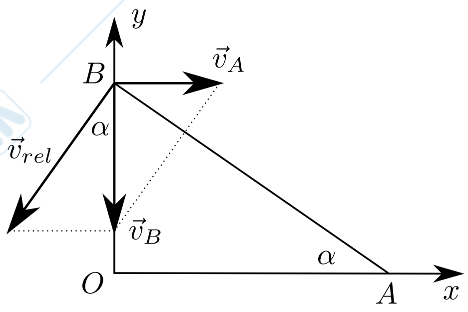


Figure 5: Composizione delle velocità di trascinamento e relativa per la determinazione della velocità del punto B

quindi scomponendo l'equazione (34) in direzione x e y si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 0 = v_A + \dot{\alpha} L \sin\alpha \\ v_B = \dot{\alpha} L \cos\alpha \end{cases} \tag{39}$$

Atto di moto ed individuazione del CIR

Si definisce *atto di moto* all'istante t l'insieme delle velocità dei punti del corpo a tale istante. Dato un corpo rigido qualsiasi nello spazio, si ha che per ogni istante temporale, presa una coppia di A e B, si ha

$$(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot (B - A) = 0 \tag{40}$$

ovvero le componenti delle due velocità lungo l'asse passante per i due punti deve essere uguale. Se ciò non fosse verificato significa che il corpo non è rigido perchè i due punti si stanno allontanando/avvicinando tra loro.

Dimostrazione 1

É immediata la dimostrazione

$$(B - A) \wedge (B - A) = 0 \tag{41}$$

per la definizione di prodotto scalare. Derivando si ha

$$\frac{d(B-A)}{dt} \cdot (B - A) + (B - A) \cdot \frac{d(B-A)}{dt} = 2\frac{d(B-A)}{dt} \cdot (B - A) = 0 \tag{42}$$

ma

$$(B - A) = (B - O) - (A - O) \tag{43}$$

quindi

$$\frac{d(B-A)}{dt} = \frac{d(B-O)}{dt} - \frac{d(A-O)}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \tag{44}$$

Dimostrazione 2

Per dimostrare che le componenti delle velocita lungo $(B - A)$ sono uguali moltiplico scalarmente per $(B - A)$ l'equazione

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (B - A) \tag{45}$$

$$\vec{v}_A \cdot (B - A) = \vec{v}_B \cdot (B - A) + \vec{\omega} \wedge (B - A) \cdot (B - A) \tag{46}$$

$$\vec{v}_A \cdot (B - A) = \vec{v}_B \cdot (B - A) \tag{47}$$

$$(\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot (B - A) = 0 \tag{48}$$

Centro di istantanea rotazione

Nel caso di moto piano ovvero quando è possibile individuare un piano a cui appartengono i due vettori velocità v_A e v_B, se si tracciano le rette perpendicolari alle due velocità queste si incrociano in un punto H che viene detto *centro di istantanea rotazione* (CIR) intorno al quale stanno ruotando i due punti con velocità angolare $\vec{\omega}$. Le velocità dei punti A e B possono quindi essere calcolate come:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge (A - H) \\ \vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge (B - H) \end{cases} \tag{49}$$

Per ogni atto di moto rigido nel piano si può sempre definire un centro di istantanea rotazione. L'atto di moto nel piano è quindi sempre rotatorio. Nel caso particolare in cui le velocità $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ sono parallele il CIR è all'infinito e l'atto di moto diventa traslatorio.

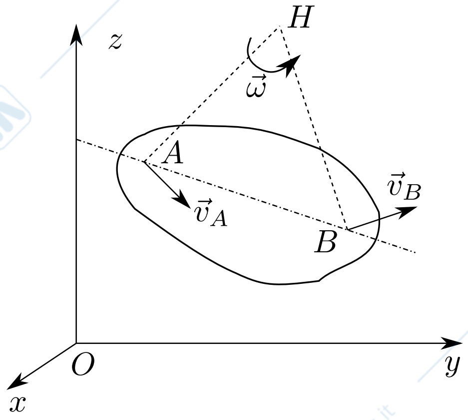


Figure 6: Centro di istantanea rotazione

Teorema di Rivals per le velocità e le accelerazioni del corpo rigido

Ricordiamo il **teorema di Rivals** il quale afferma: dato un corpo rigido nello spazio, la velocità di un qualsiasi punto B appartenente al corpo può essere scritta come somma della velocità di un punto A, anch'esso appartenente al corpo e preso come riferimento, e della velocità relativa di B rispetto ad A data dal prodotto vettoriale della velocità angolare del corpo $\vec{\omega}$ per la distanza tra i due punti $(B - A)$.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \tag{50}$$

Derivando nel tempo tale espressione si ottiene la formulazione del teorema per le accelerazioni[1]

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge \frac{d(B - A)}{dt} \\ &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] \end{aligned} \tag{53}$$

utilizzando la proprietà del doppio prodotto vettoriale[2]

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] &= (\vec{\omega} \cdot (B - A))\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(B - A) \\ &= -\omega^2 (B - A) \end{aligned} \tag{55}$$

L'accelerazione del punto B è data dalla somma di tre contributi: l'accelerazione del punto A, l'accelerazione relativa di B rispetto ad A in direzione tangenziale

[1] Scrivendo il vettore in termini complessi di ha

$$(G - A) = \frac{L}{2} e^{i\gamma} \tag{51}$$

derivando

$$\frac{d(G - A)}{dt} = \frac{L}{2} \dot{\gamma} e^{i(\gamma + \pi/2)} = \vec{\omega} \wedge (G - A) \tag{52}$$

[2]

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{54}$$

e l'accelerazione relativa di B rispetto ad A in direzione normale

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega}^2 (B - A) \\ &= \vec{a}_A + \vec{a}_{ABt} + \vec{a}_{ABn}\end{aligned} \tag{56}$$