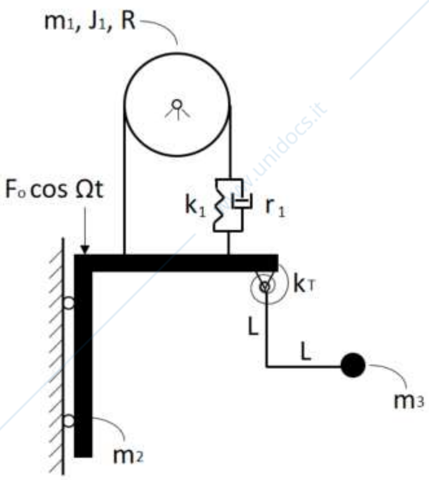
Modellistica dei sistemi meccanici **TEMA A** **MATR.**
Prova scritta AA 2016/2017 **29 Giugno 2017**
COGNOME__________________NOME___________

Esercizio 1

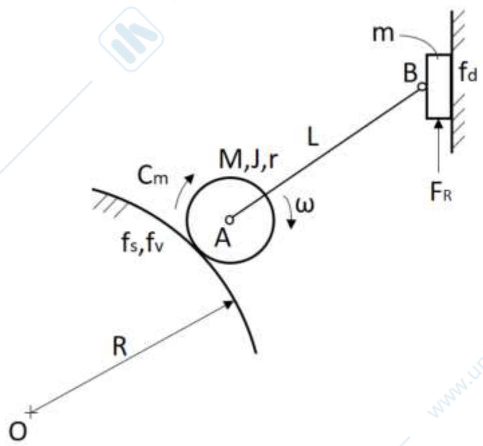
Facendo riferimento al sistema meccanico rappresentato in figura nella sua posizione di equilibrio statico si richiede di:

1. scrivere le equazioni di moto linearizzate del sistema valide per le piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio;
2. indicare, solo simbolicamente, la procedura per il calcolo di frequenze proprie e modi di vibrare del sistema;
3. calcolare, solo simbolicamente, la risposta a regime del sistema alla forzante $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.



Esercizio 2

Il sistema meccanico illustrato in figura giace in un piano verticale. Un disco di massa M, momento d'inerzia J e raggio r rotola senza strisciare su una guida circolare di raggio R in presenza di perdite per rotolamento (coefficiente di attrito statico f_s e volvente f_v). Su tale disco agisce la coppia motrice C_m tale da mantenere il disco in rotazione a una velocità angolare pari a ω costante. Al centro del disco è incernierata l'asta AB, di lunghezza L (considerata priva di massa), che all'altro estremo è incernierata su un corpo di massa concentrata pari a m, vincolato a muoversi lungo una guida rettilinea verticale. Tra corpo e guida si consideri un coefficiente di attrito dinamico pari a f_d e la forza nota applicata pari a F_R.
Si chiede di:
1) determinare velocità e accelerazione del centro del disco A;
2) determinare velocità e accelerazione del punto B;
3) calcolare la coppia motrice C_m necessaria a garantire le condizioni di moto assegnate;
4) determinare le reazioni vincolari al contatto del disco.



Esercizio 3

Il sistema rappresentato in figura è posto nel piano verticale e rappresenta un autocarro a trazione **anteriore** in moto con velocità v. Tra il motore e le ruote è presente una trasmissione avente rapporto di trasmissione τ e rendimento η (sia per moto diretto che retrogrado). Si consideri pari a J_m il momento d'inerzia lato motore, pari ad M la massa complessiva dell'intero veicolo e pari a J_r il momento d'inerzia relativo a ciascuna coppia di ruote (anteriori e posteriori), aventi raggio R. Si consideri, inoltre, la presenza di resistenza a rotolamento fra le ruote e il terreno, con coefficiente d'attrito volvente pari a f_v.

Sul veicolo agisce inoltre la forza di resistenza aerodinamica F (coefficiente di resistenza longitudinale C_x e corrispondente area di riferimento A nota), ed è appoggiato un carico di massa m, il cui baricentro risulta allineato con l'asse delle ruote posteriori.

Nota la coppia motrice C_m fornita dal motore, si chiede di:

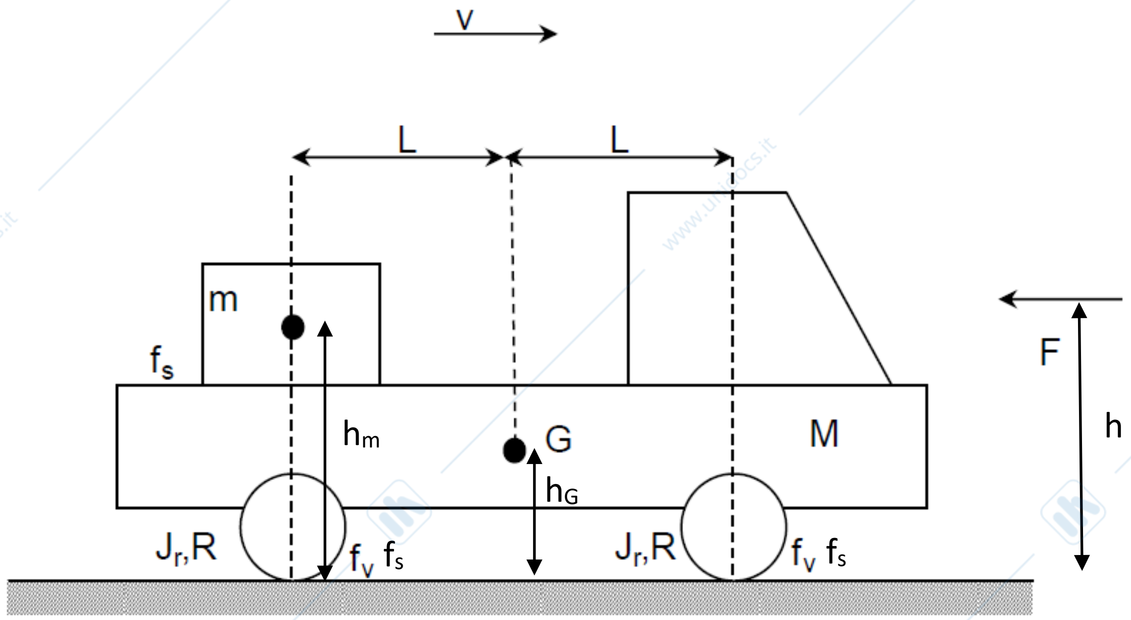
1. calcolare l'accelerazione del veicolo alla velocità $\bar{v}$;
2. calcolare la velocità che si raggiunge a regime e spiegare perché è maggiore o minore di $\bar{v}$;

Inoltre, nella condizione di moto indicata al punto 1:

3. calcolare la coppia $C_{m,max}$ che porta la massa m al limite di aderenza (noto il coefficiente di attrito tra carico e veicolo f_s).
4. effettuare la verifica di aderenza sulle ruote.

Solo per la valutazione di moto diretto o retrogrado in ciascuna condizione di moto si considerino i seguenti dati:

C_m=70 Nm	η=0.98	τ=1/4	R=0.4m
C_x=0.4	A=3m^2	$\bar{v}$=25 m/s	M=500 kg
m=100 kg	f_v=0.02		



ESERCIZIO 1 (TEMA A)

G.D.L : y : CARRELLO DI MASSA m_2 ↑

ϑ : ROTAZIONE ASTA A L ↺

	$\dot{y}$	$\dot{\vartheta}$
ω_1	$-1/R$	0
v_2	1	0
v_{3x}	0	L
v_{3y}	1	L

	y	ϑ
Δl_1	-2	0
Δl_T	0	-1

	$\dot{y}$	$\dot{\vartheta}$
$\dot{\Delta l}_1$	-2	0

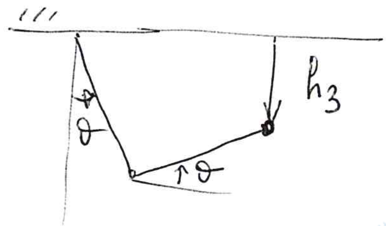
	δy	$\delta\vartheta$
δy_F	1	0

$\delta \mathcal{L} = -F \cdot \delta y_F$

$h_1 = 0$

$h_2 = y$ lineare, si elide con il precarico statico delle molle

$h_3 = -L\cos\vartheta + L\sin\vartheta$



$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & +m_3 g L \end{bmatrix}$$

TEMA B

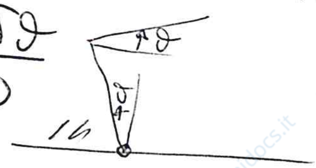
	$\dot{y}$	$\dot{\vartheta}$
ω_1	$-1/R$	0
v_2	1	0
v_{3x}	0	$-L$
v_{3y}	1	L

	y	ϑ
Δl_1	-2	0
Δl_T	0	-1

	$\dot{y}$	$\dot{\vartheta}$
$\dot{\Delta l}_1$	-2	0

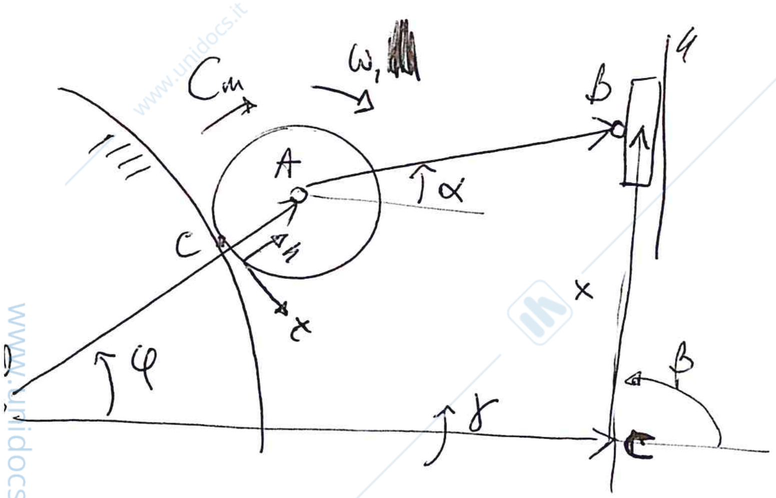
$\delta \mathcal{L} = -F \cdot \delta y_F$

	δy	$\delta\vartheta$
δy_F	1	0



$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_3 g L \end{bmatrix}$$

$h_3 = L\cos\vartheta + L\sin\vartheta$



$$\vec{V_A} = \vec{V_C} + \vec{\omega} \wedge (A-C)$$

$$\vec{V_A} = -\omega \vec{k} \wedge (r\vec{n}) = r\omega\vec{t}$$

$$\vec{V_A} = -(R+r)\dot{\varphi}\,\vec{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = -\frac{r\omega}{(R+r)}}$$

$$\vec{a_A} = -\cancel{(R+r)\ddot{\varphi}}\,\vec{t} - (R+r)\dot{\varphi}^2\,\vec{n}$$

$\ddot{\varphi} = 0$

Chiusura

$$(A-O) + (B-A) = (C-O) + (B-C)$$

$$(R+r)e^{i\varphi} + L e^{i\alpha} = (C-O) + x e^{i\beta}$$

$$\boxed{\dot{\varphi}(t)},\ \underbrace{\alpha(t),\ x(t)}_{\text{incognite}}$$

DATO

$\beta = \pi/2$

$$\begin{cases} (R+r)\cos\varphi + L\cos\alpha = (C-O)_x + x\,\cancel{\cos\beta}^{\,0} \\ (R+r)\sin\varphi + L\sin\alpha = \cancel{(C-O)_y} + x\,\cancel{\sin\beta}^{\,1} \end{cases}$$

Velocità

$$-(R+r)\dot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\alpha}\sin\alpha = \dot{x}\,\cancel{\cos\beta}^{\,0}$$

$$(R+r)\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\alpha}\cos\alpha = \dot{x}\,\cancel{\sin\beta}^{\,1}$$

$\Rightarrow \dot{\alpha}, \dot{x}$ incognite

Accelerazione

$$-(R+r)\ddot{\varphi}\sin\varphi - (R+r)\dot{\varphi}^2\cos\varphi - L\ddot{\alpha}\sin\alpha - L\dot{\alpha}^2\cos\alpha = 0$$

$$(R+r)\ddot{\varphi}\cos\varphi - (R+r)\dot{\varphi}^2\sin\varphi + L\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{\alpha}^2\sin\alpha = \ddot{x}$$

$\Rightarrow \ddot{\alpha}, \ddot{x}$

$$\vec{V_B} = \dot{x}\vec{j}$$

$$\vec{a_B} = \ddot{x}\vec{j}$$

3) Calcolo di C_m e T_A, N_A

Th. EN. CINETICA

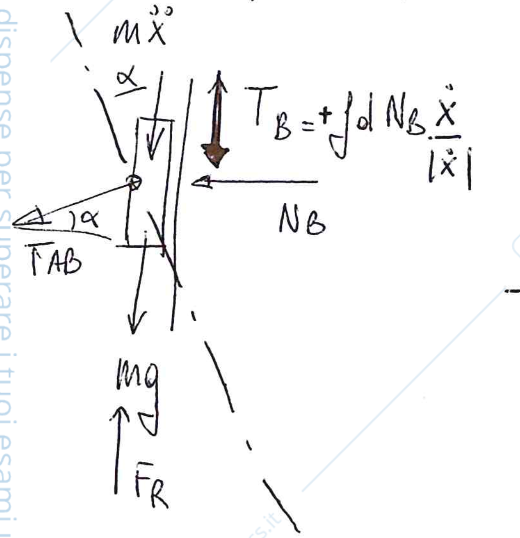
$$E_c = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(Mr^2 + J\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \frac{dE_c}{dt} = \left(Mr^2 + J\right)\omega\dot{\omega} + m\dot{x}\ddot{x}$$

$$\Sigma W_{att} = C_m\,\omega + F_R\,\dot{x} - Mg \cdot v_{Ay} - mg\, v_{By} \qquad v_{Ay} = -r\omega\cos\varphi \qquad v_{By} = \dot{x}$$

$$\Sigma W_{resist} = -N_A f_v r\omega - f_d N_B |\dot{x}|$$

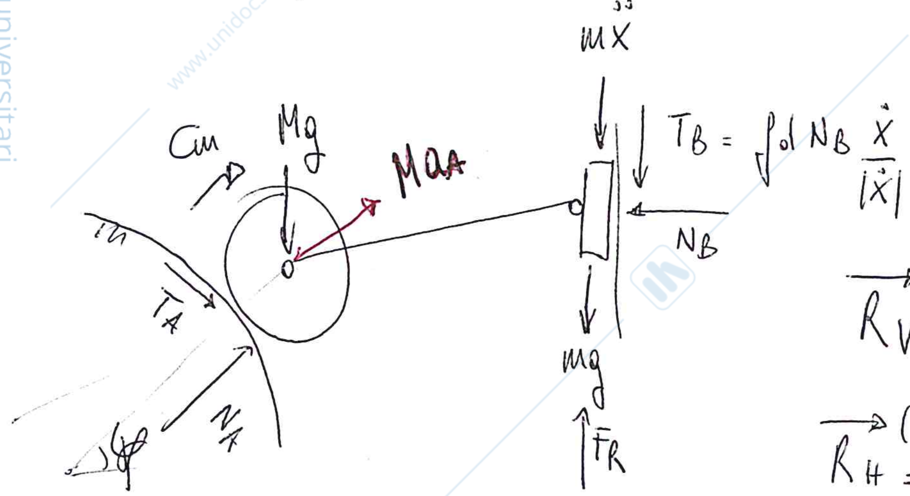
Calcolo reazioni N_A e N_B:



$$\vec{R}_{\perp AB}^{(m)} = 0$$

$$-\left(mg + m\ddot{x}\right)\cos\alpha + N_B \sin\alpha + F_R\cos\alpha - f_d N_B \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}\cos\alpha = 0$$

$\Rightarrow N_B$



$$\vec{R}_V^{(TOT)} = 0$$

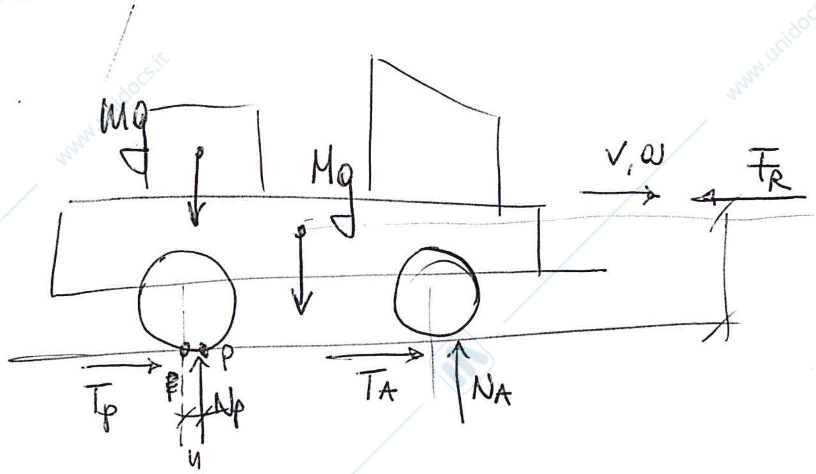
$$\vec{R}_H^{(TOT)} = 0$$

$\Rightarrow T_A, N_A$

$$\vec{R}_V^{TOT} = \left(Ma_A + N_A\right)\sin\varphi - T_A\cos\varphi - Mg - \left(m\ddot{x} + mg\right) + F_R - f_d N_B \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = 0$$

$$\vec{R}_H^{TOT} = 0 \quad \left(Ma_A + N_A\right)\cos\varphi + T_A \sin\varphi - N_B = 0$$

ESERCIZIO 3



CINEMATICA

$V = R \cdot \omega_R$

$\omega_R = \tau \omega_m$

$\omega_m = \dfrac{V}{R\tau}$

1] Accelerazione con C_m NOTA

$W_1 = C_m \omega_m - J_m \dot{\omega}_m \omega_m \gtrless 0$

$W_2 = -F_R \cdot V - (N_A + N_P) f_v R \omega_R$ $\qquad F_R = \frac{1}{2} \rho C_x A V^2$

$-2 J_R \dot{\omega}_R \omega_R - (m+M) a V \gtrless 0 \Rightarrow$ HP. MOTO DIRETTO

$\eta W_1 + W_2 = 0 \qquad \vec{R}_V^{(TOT)} = 0 \qquad N_A + N_P = Mg + mg$

$\eta C_m / R\tau - \eta J_m / R^2\tau^2 a - F_R - (M + m) g f_v - 2J_R / R^2 a - (M+m) a = 0$

(1) $a = \dfrac{\eta C_m / R\tau - F_R(\bar{v}) - (M+m) g f_v}{\underbrace{\eta J_m / R^2\tau^2 + 2J_R / R^2 + M + m}_{J_{TOT}}}$

TEMA A - Con i dati assegnati $a > 0$ da $W_2 < 0$ MOTO DIRETTO OK

TEMA B - Con i dati assegnati $a < 0$ da $W_1 > 0$ MOTO DIRETTO OK

2] Calcolare la V_0 / REGIME $\quad W_2 = -F_R V - (M+m) g f_v V < 0$

MOTO DIRETTO

$a = 0 \qquad \eta C_m / R\tau - (M+m) g f_v = \frac{1}{2} \rho A C_x V_0^2$

$\Rightarrow V_0 = + \sqrt{\dfrac{\eta C_m / R\tau - (M+m) g f_v}{\frac{1}{2} \rho A C_x}}$

TEMA A : $V_0 > \bar{V}$ perché $a(\bar{v}) > 0$ e si annulla per una $V_0 > \bar{V}$

TEMA B : $V_0 < \bar{V}$ perché $a(\bar{v}) < 0$ e si annulla per una $V_0 < \bar{V}$

3] Verifica di aderenza

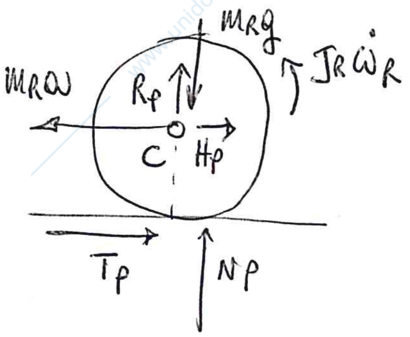
RUOTA ANTERIORE $\quad |T_A| \le f_s |N_A|$

$$\vec{R}_H^{\,TOT} = 0 \quad -(M+m)a + T_A + T_P - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad T_A, T_P$$

$$\vec{R}_V^{\,TOT} = 0 \quad N_A + N_P = (M+m)g \quad \Rightarrow \quad N_A, N_P$$

$$\vec{M}_P^{\,TOT} = 0 \quad mg\underbrace{f_v R}_{u} - Mg(L-u) + N_A 2L + F_R h - Ma h_G - ma h_m$$

$$- 2 J_R \dot{\omega}_R = 0 \quad \Rightarrow N_A$$

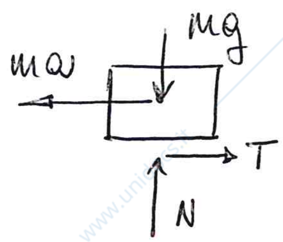


(RUOTA POST.)
$M_C = 0$

$$T_P R + N_P u + J_R \dot{\omega}_R = 0 \quad \Rightarrow T_P, N_P$$

4 EQ. IN 4 INCOGNITE

4]



Aderenza: $|T| \le f_s |N|$

$N = mg$

$T = ma$

$$a_{MAX} \le f_s g$$

Dalla eq. (1)

$$C_{MAX} = \frac{R\tau}{\eta}\left[J_{TOT} \cdot a_{MAX} + F_R(\bar{v}) + (M+m) g f_v \right]$$