POLITECNICO
MILANO 1863

Cinematica del corpo rigido

Disco che rotola su guida rettilinea

M. Vignati

DIPARTIMENTO DI MECCANICA

mecc

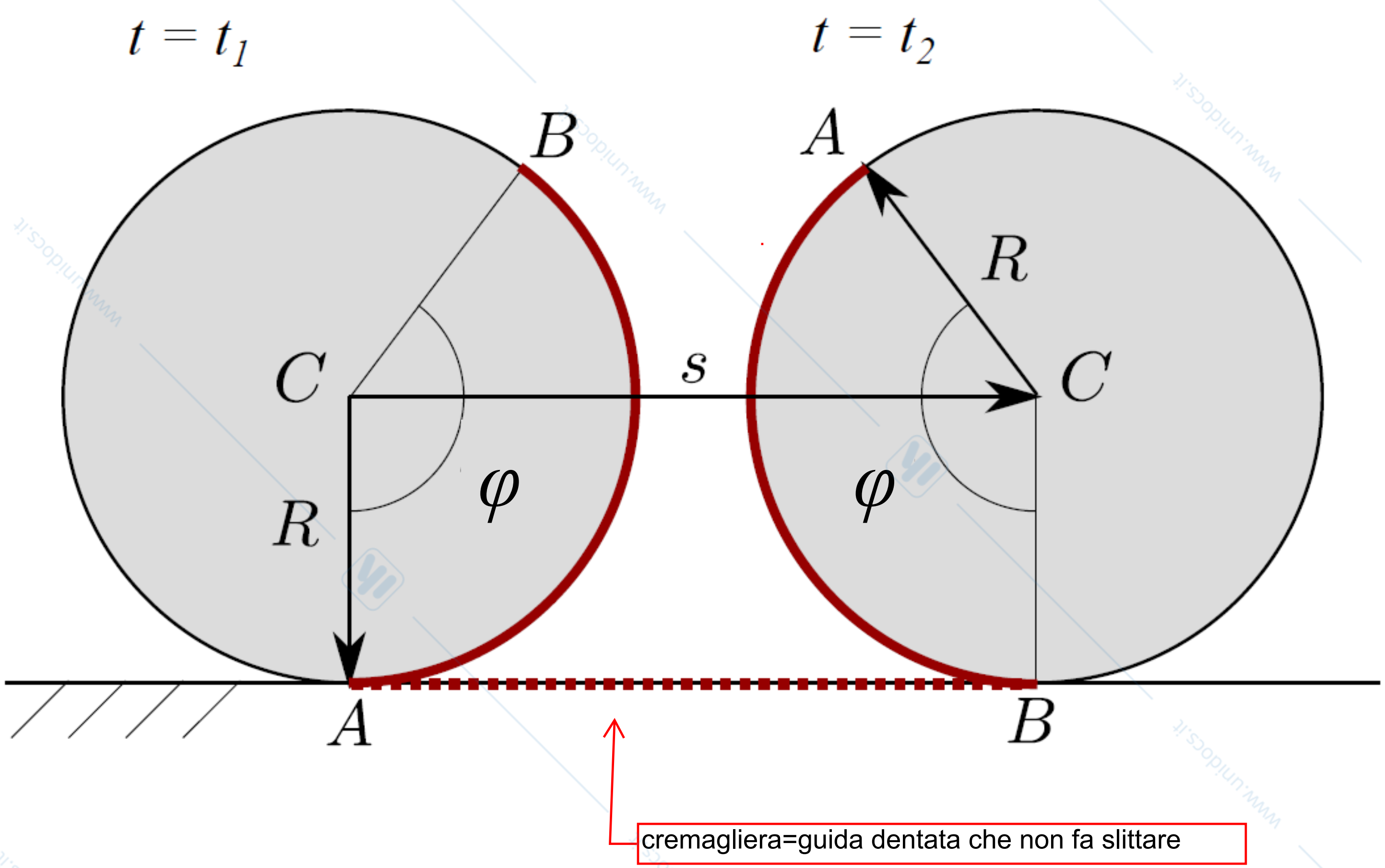
Disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea

Vincolo di rotolamento senza strisciamento

Nel moto in grande il disco avanza parallelo alla guida di una quantità

$$s = \overset{\frown}{AB} = \varphi R$$

L'avanzamento s è pari all'arco di circonferenza AB



Studio del moto di un punto P sulla periferia del disco

Lo spostamento del centro del disco è quindi legato alla sua rotazione

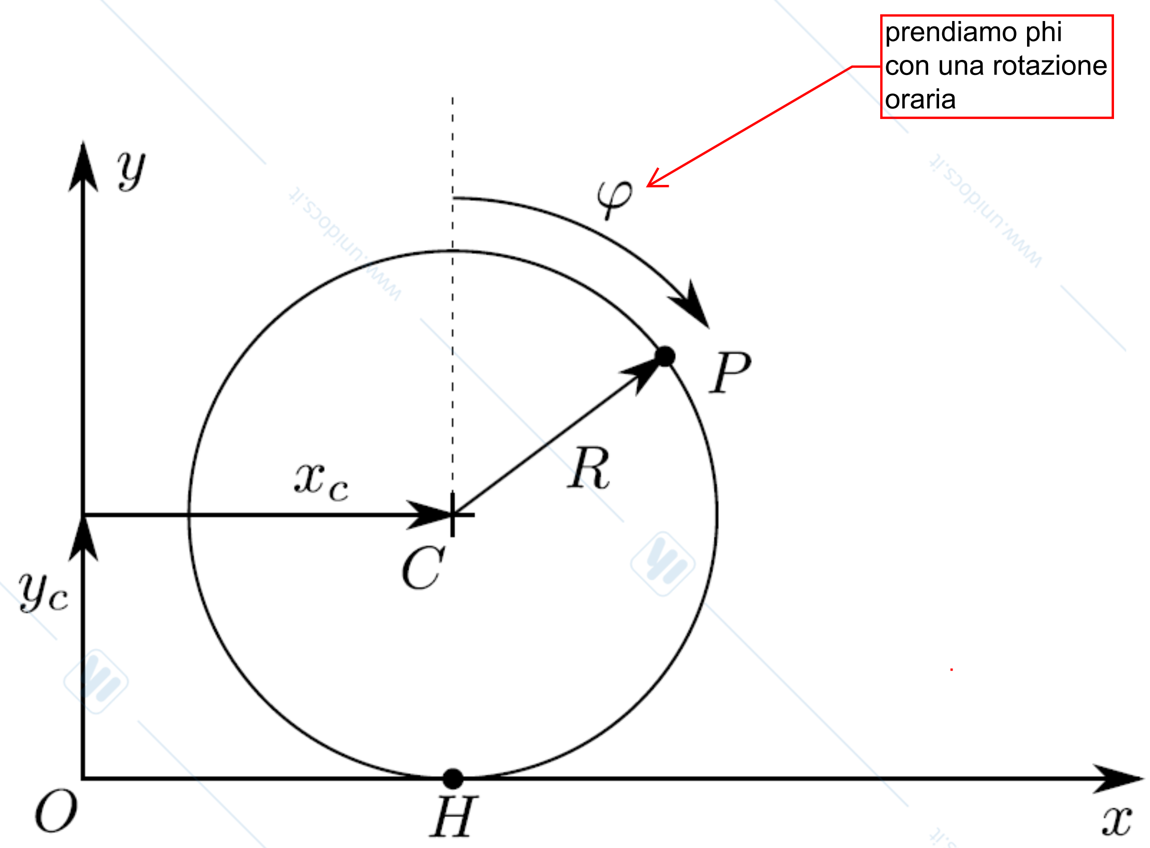
$$\vec{s}_c = s_c\vec{i} = R\varphi\vec{i}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{s}_c}{dt} = R\dot{\varphi}\vec{i}$$

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{i}$$

Per il punto P possiamo scrivere

$$(P - O) = (C - O) + (P - C)$$



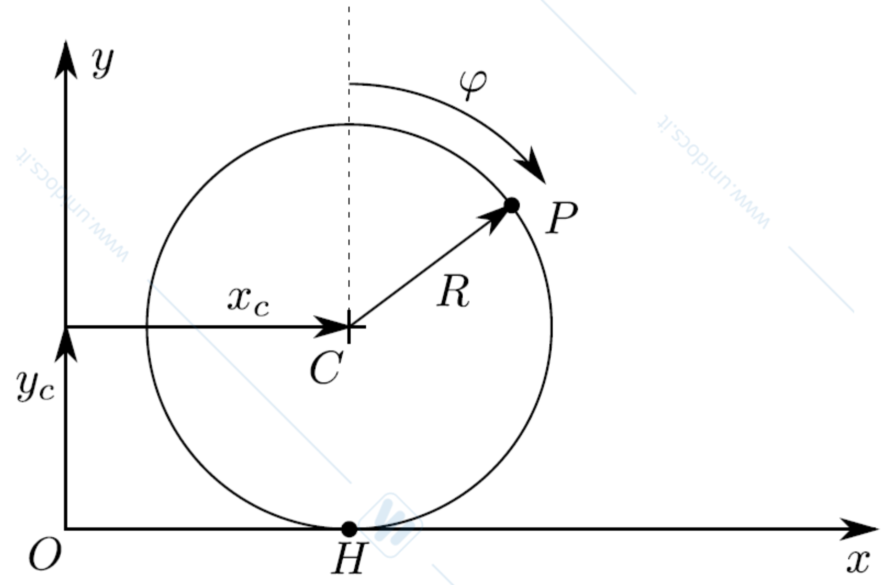
Studio del moto di un punto P sulla periferia del disco

$$(P-O) = (C-O) + (P-C)$$

proiezioni lungo x e y

$$(C-O) = x_c\vec{i} + y_c\vec{j} = R\varphi\vec{i} + R\vec{j}$$

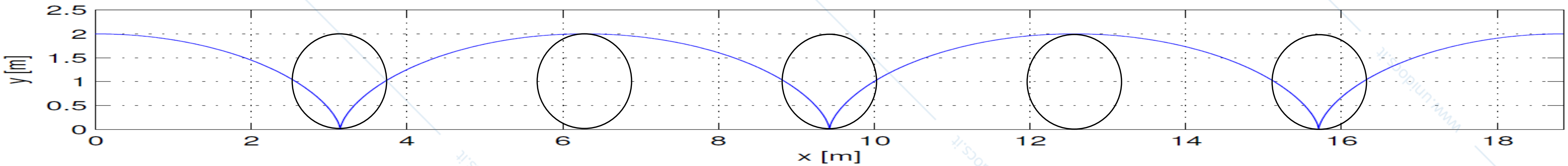
$$(P-C) = x_{pc}\vec{i} + y_{pc}\vec{j} = R\sin\varphi\vec{i} + R\cos\varphi\vec{j}$$



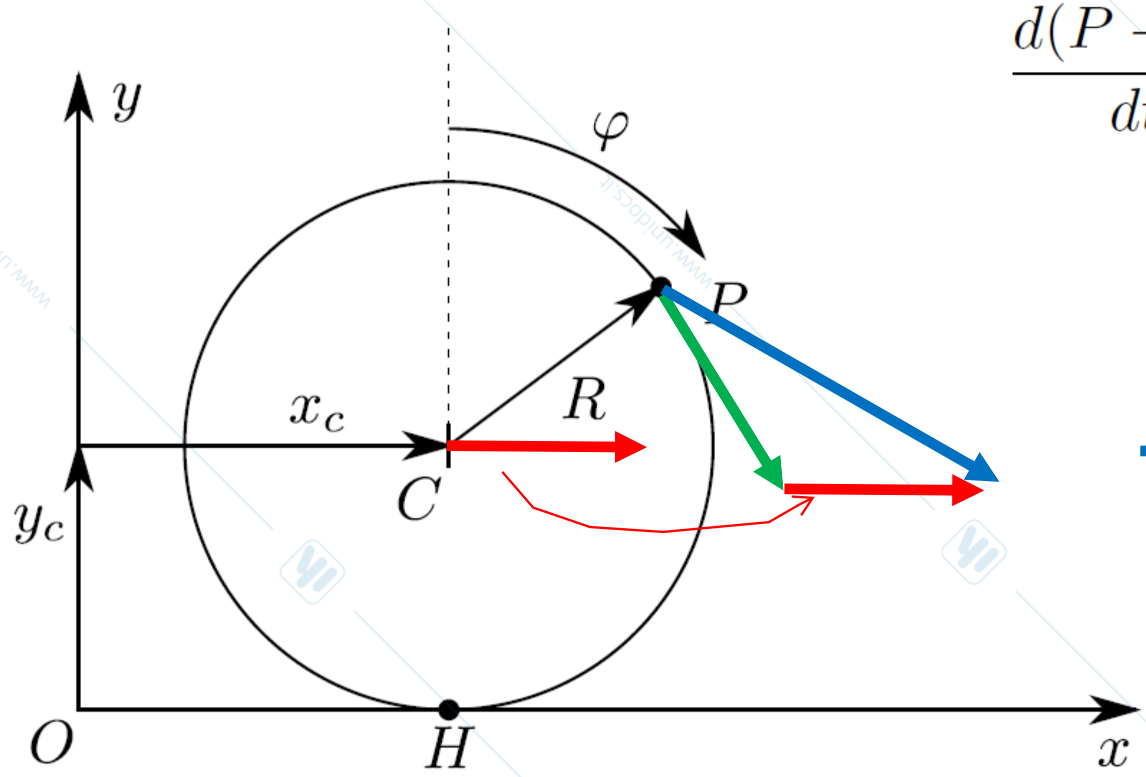
$$(P-O) = R(\varphi + \sin\varphi)\vec{i} + R(1+\cos\varphi)\vec{j}$$

unica coordinata libera=phi

La traiettoria di P è una cicloide



VELOCITA'



$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_{pc}$$

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \frac{d(C-O)}{dt} + \frac{d(P-C)}{dt}$$

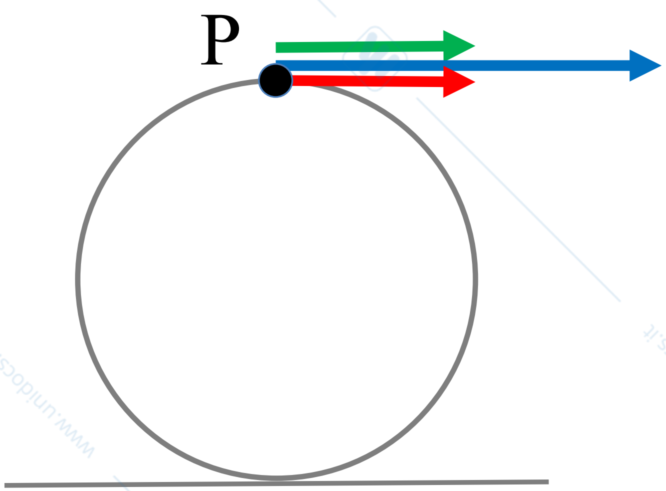
$$\vec{v}_p = R\dot{\varphi}(1+\cos\varphi)\vec{i} - R\dot{\varphi}\sin\varphi\vec{j}$$

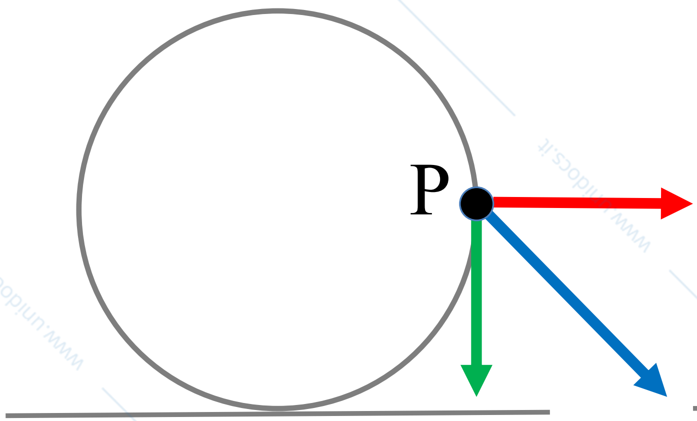
$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge (P-C)$$

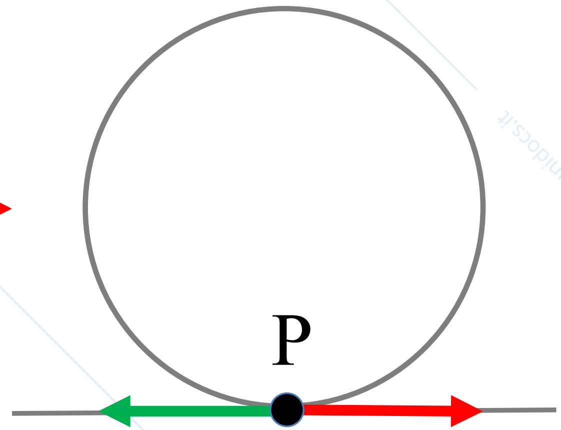
$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\vec{k}$

Analizzando le vare configurazioni (angoli):

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{v}_{pc}$$







$\varphi=0$

$v_P = 2\, v_C$
$= 2\, \omega\, R$

$\varphi=90°$

$v_P = \mathrm{sqrt}(v_C^2 + \omega^2\, R^2)$
$= \mathrm{sqrt}(2)\, v_C$
$= \mathrm{sqrt}(2)\, \omega\, R$

$\varphi=180°$

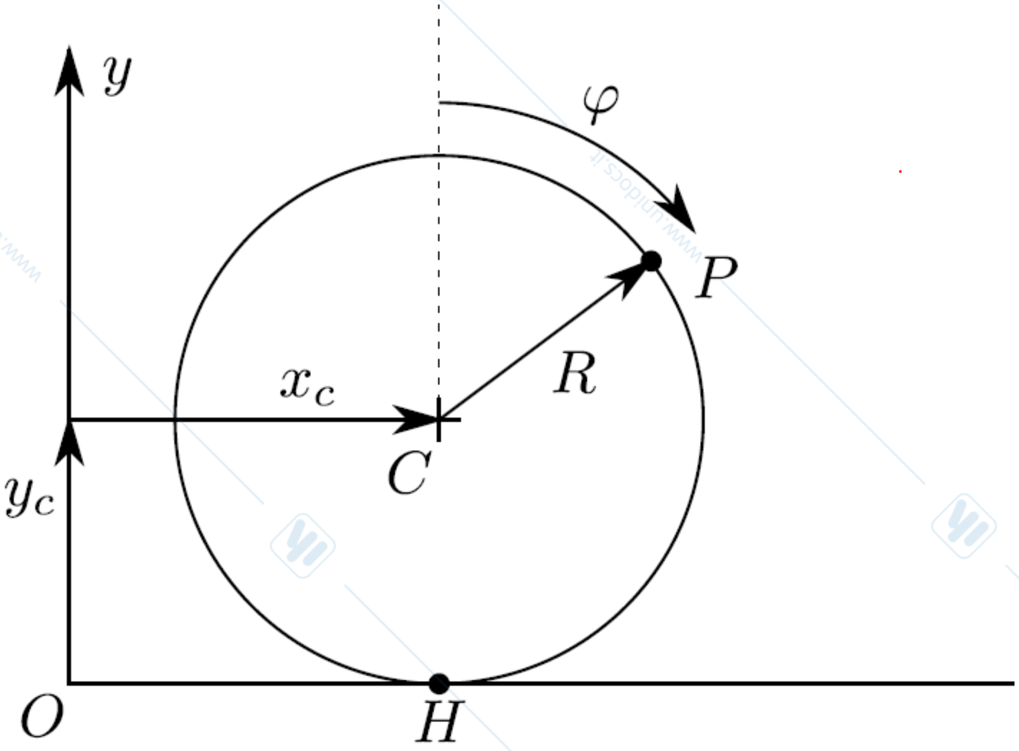
$v_P = v_C - \omega\, R$
$= 0$

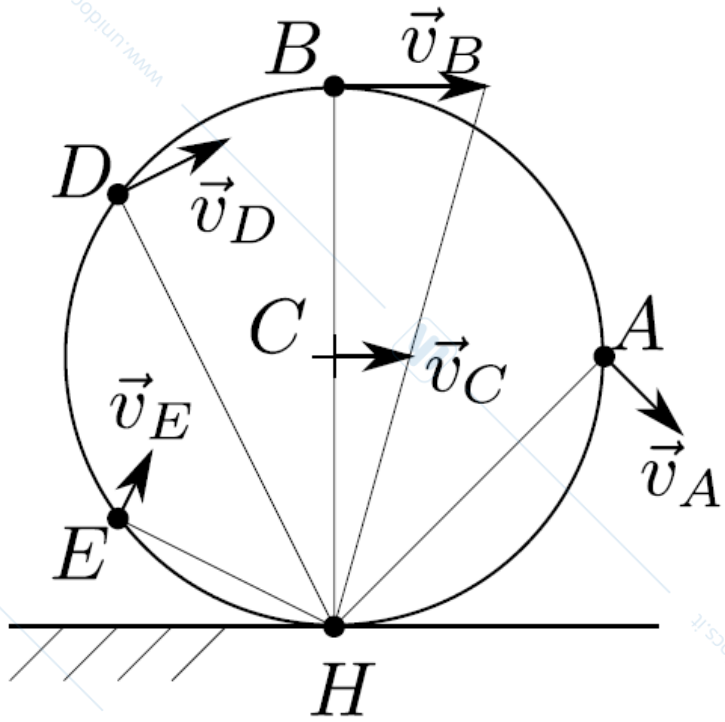
Quando P coincide con H, ha velocità nulla.
H è CIR del disco

Nell'atto di moto, il moto è rotatorio intorno al CIR (punto H)

$$\vec{v}_p = \vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge (P - C)$$

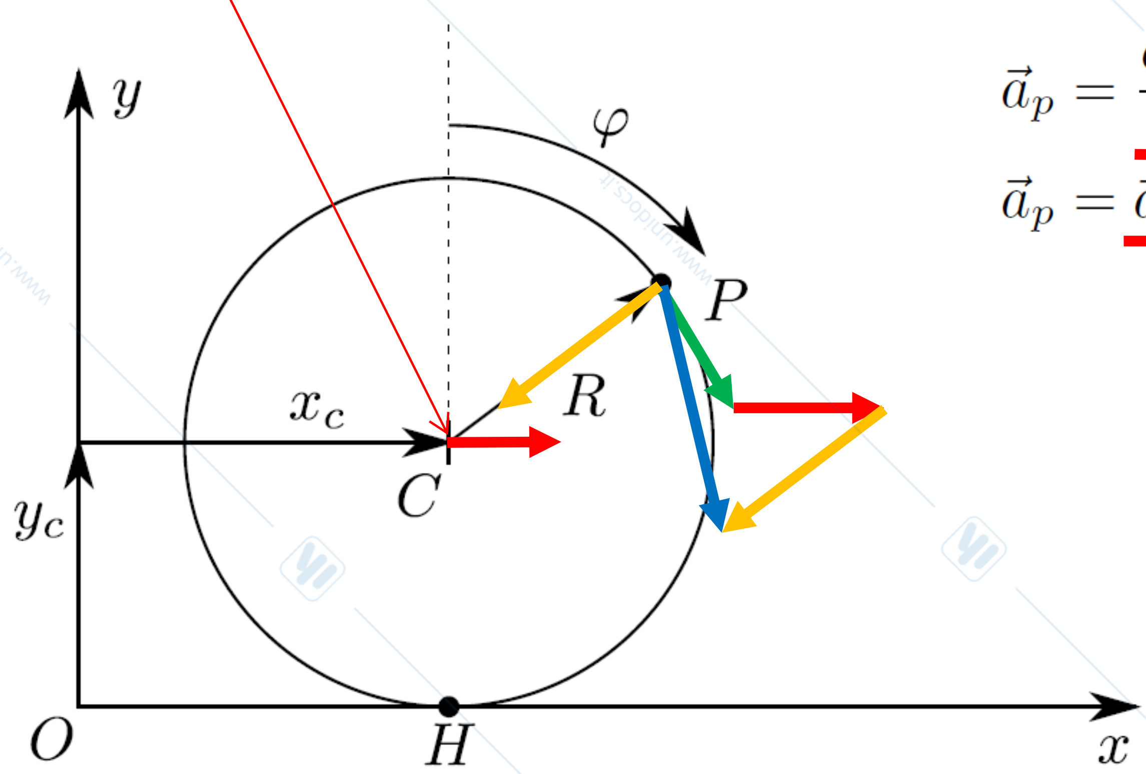
$$\vec{v}_p = \underbrace{\cancel{\vec{v}_H}}_{0} + \vec{\omega} \wedge (P - H)$$





Accelerazione di P

C non ha componenti di acc. perp. all'asse x, altrimenti violerebbe il vincolo di contatto con la guida(poichè si muoverebbe in verticale)

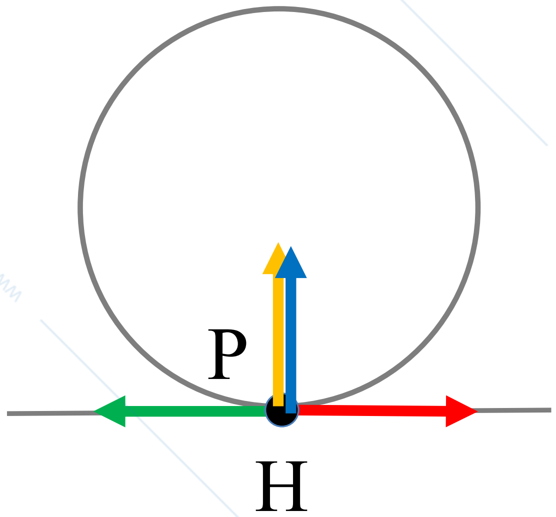


$$\vec{a}_p = \vec{a}_c + \vec{a}_{pc} \qquad \vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = R\ddot{\varphi}\vec{i}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_c}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P - C) + \vec{\omega} \wedge \frac{d(P-C)}{dt}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_{tr} + \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Accelerazione di P



nel caso in cui ci sia un vincolo a cerniera il punto fisso è di rotazione assoluta con vel. e acc. nulle

punto, preso per ogni istante, che ha velocità nulla, ma non acc. nulla!

$$\varphi = 180°$$

$$\vec{a}_P = (\vec{a}_C - \underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{0} R)\, i + \omega^2 R\, j$$

Quando P coincide con H, ha velocità nulla.

centro di istantanea rotazione

L'accelerazione è però non nulla (il CIR cambia nel tempo. Il punto H si sposta seguendo il centro del disco)