Modellistica dei sistemi meccanici
Prova scritta AA 2017/2018 12 Luglio 2018

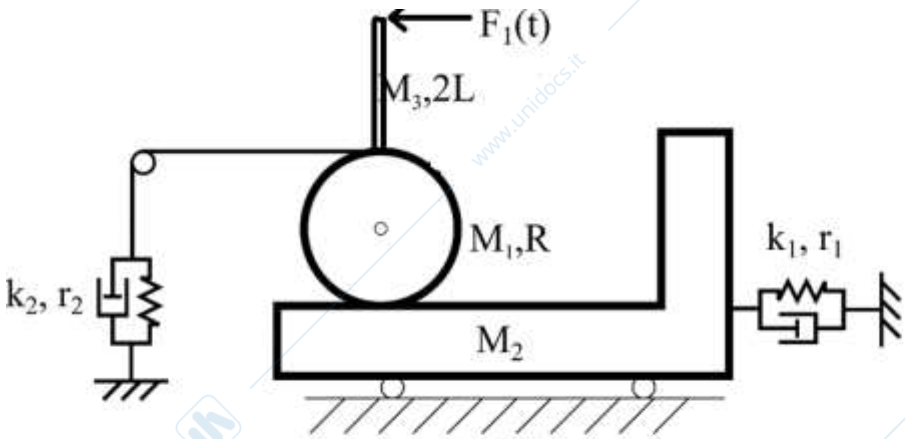
MATR.

COGNOME__________________NOME___________

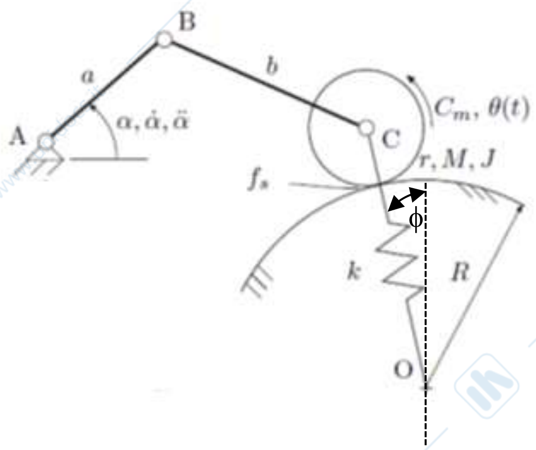
Esercizio 1

Facendo riferimento al sistema meccanico rappresentato in figura nella sua posizione di equilibrio statico si richiede di:

1. scrivere le equazioni di moto direttamente linearizzate valide per le piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio statico rappresentata in figura;
2. indicare la procedura per il calcolo delle frequenze proprie e dei corrispondenti modi di vibrare del sistema libero non smorzato;
3. indicare la procedura per il calcolo della risposta del sistema alla forza esterna applicata $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$.



Esercizio 2



Nel meccanismo in figura l'asta AB, di lunghezza a e massa trascurabile, è incernierata a terra nell'estremo A ed all'asta BC, di lunghezza b e massa trascurabile, nell'altro estremo B. Nell'estremo C della seconda asta è incernierato un disco di raggio r, massa M e momento d'inerzia
baricentrico J che rotola senza strisciare su di una guida circolare di raggio R. Il coefficiente di attrito statico tra le due superfici è f_s. Una molla di rigidezza k collega il centro della guida con il centro del disco, assicurando il precarico necessario all'aderenza. Si considerino note velocità e accelerazione angolari dell'asta AB, come indicato in figura.

Si richiede di:

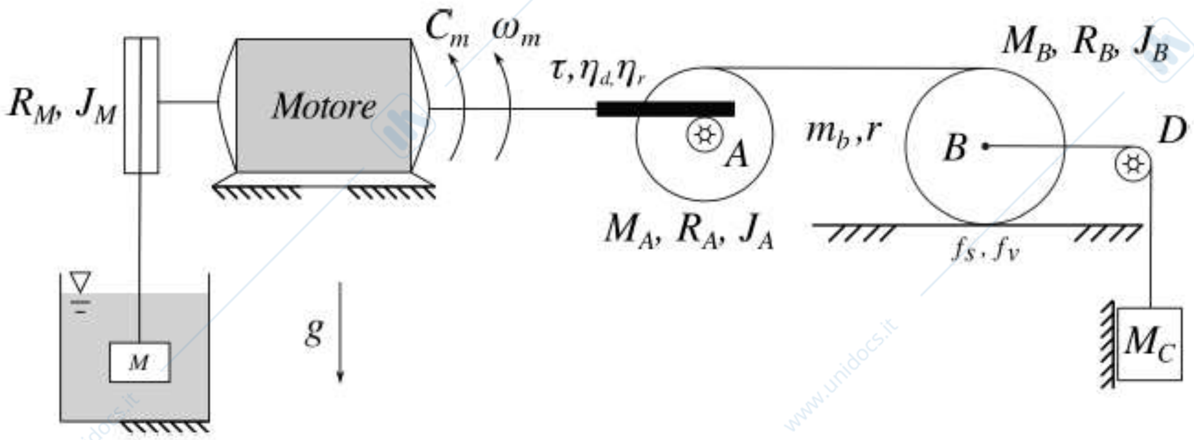
1. calcolare velocità e accelerazione angolare del disco di centro C;
2. determinare la coppia C_m necessaria per garantire il moto;
3. valutare il precarico ΔL_0 da applicare alla molla per garantire l'aderenza tra disco e guida.

Esercizio 3

Il sistema in figura, posto nel piano verticale, è composto da un disco di centro A, massa M_A, raggio R_A e momento d'inerzia J_A che è collegato al motore mediante una trasmissione di rendimento in moto diretto η_d, rendimento retrogrado η_r e rapporto di trasmissione τ. Sul motore è calettato un volano, di raggio R_m e momento d'inerzia J_m, su cui si avvolge una fune collegata ad una massa M. Tale massa si trova immersa in un liquido (si trascuri la spinta idrostatica) che oppone una forza di resistenza di tipo fluidodinamico al moto (densità del fluido ρ, area frontale A e coefficiente di resistenza C_D). Il disco di centro A è collegato mediante una fune al disco di centro B, con massa M_B, momento d'inerzia J_B e raggio R_B che rotola senza strisciare sul piano orizzontale.
Al centro del disco B è collegata un'altra fune che, attraverso una puleggia D di inerzia trascurabile, è collegata ad un corpo di massa M_C. Il contatto disco-piano è caratterizzato da un coefficiente di attrito statico f_s ed un coefficiente di resistenza al rotolamento f_v. Conoscendo la curva caratteristica del motore $C_m = C_{m0} - k*\omega^2_m$ e supponendo entrambe le masse M_C e M in salita, si richiede di:

1. determinare la velocità angolare del motore a regime e discutere il segno della coppia motrice in tale condizione di moto;
2. partendo dalla condizione di moto al punto 1 e annullando la coppia motrice, determinare l'accelerazione angolare del motore;
3. effettuare la verifica di aderenza del disco B nella condizione di moto 2.

Si discuta la condizione di moto diretto o retrogrado nei primi due punti.



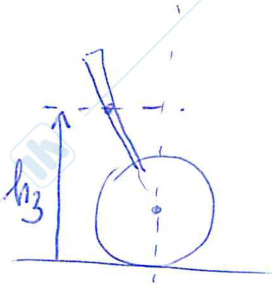
ESE 1

x : carrello $\longrightarrow$

θ : disco $+\circlearrowleft$

	$\dot{x}$	$\dot{\theta}$
v_1	1	$-R$
ω_1	0	1
v_2	1	0
v_3	1	$-(2R+L)$
ω_3	0	1

	x	θ
Δl_1	-1	0
Δl_2	$+1$	$-2R$



$$h_3 = R + (R+L)\cos\theta$$

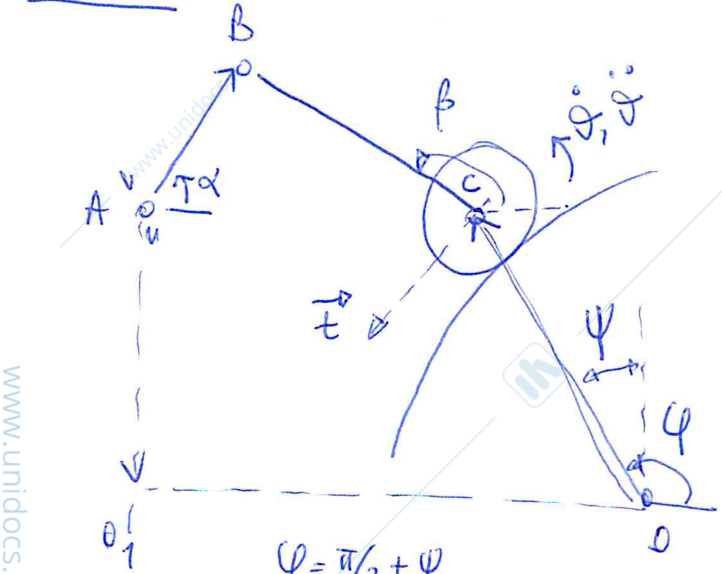
$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_3 g (R+L) \end{bmatrix}$$

	δx	$\delta\theta$
δx_F	1	$-(2R+2L)$

$$\delta^* L = -F \cdot \delta x_F$$

$$\underline{F_0} = \begin{bmatrix} -F \\ F(2R+2L) \end{bmatrix}$$

ESE 2



$\varphi = \pi/2 + \psi$

$\dot\alpha$ = NOTA

$\ddot\alpha$ = NOTA

CHIUSURA

$$(B-A) = (O-A) + (C-O) + (B-C)$$

$$a e^{i\alpha} = \overline{OA} + (r+R) e^{i\varphi} + b e^{i\beta}$$

$$\begin{cases} a\cos\alpha = \overline{OA}_x + (R+r)\cos\varphi + b\cos\beta \\ a\sin\alpha = \overline{OA}_y + (R+r)\sin\varphi + b\sin\beta \end{cases}$$

$$\dot\beta, \dot\varphi \Leftarrow \begin{cases} -a\dot\alpha\sin\alpha = -(R+r)\dot\varphi\sin\varphi - b\dot\beta\sin\beta \\ a\dot\alpha\cos\alpha = (R+r)\dot\varphi\cos\varphi + b\dot\beta\cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\ddot\alpha\sin\alpha - a\dot\alpha^2\cos\alpha = -(R+r)\ddot\varphi\sin\varphi - (R+r)\dot\varphi^2\cos\varphi - b\ddot\beta\sin\beta - b\dot\beta^2\cos\beta \\ a\ddot\alpha\cos\alpha - a\dot\alpha^2\sin\alpha = (R+r)\ddot\varphi\cos\varphi - (R+r)\dot\varphi^2\sin\varphi + b\ddot\beta\cos\beta - b\dot\beta^2\sin\beta \end{cases}$$

1) VELOCITÀ ANGOLARE DEL DISCO
ACCELERAZIONE " " "

$$\vec V_C = r\dot\vartheta\,\vec t = (R+r)\dot\varphi\,\vec t$$

$$\dot\vartheta = \frac{(R+r)}{r}\dot\varphi$$

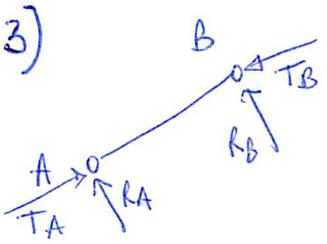
$$\boxed{\begin{aligned} \vec\omega_C &= \frac{(R+r)}{r}\dot\varphi\,\vec k \\ \dot{\vec\omega}_C &= \frac{(R+r)}{r}\ddot\varphi\,\vec k \end{aligned}}$$

2) $$E_c = \frac{1}{2} M r^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} J \dot\vartheta^2 \qquad \frac{dE_c}{dt} = (Mr^2 + J)\dot\vartheta\ddot\vartheta$$

$$\sum W_{ATT} = C_m \cdot \dot\vartheta + Mg r\dot\vartheta \sin\psi \qquad \sum W_{REAT} = 0$$

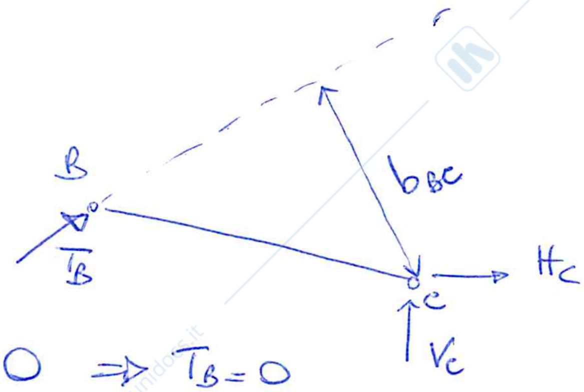
$$\boxed{(Mr^2 + J)\ddot\vartheta = C_m + Mgr\sin\psi}$$

3)



$$\vec M_A^{(AB)} = 0 \quad aR_B = 0$$

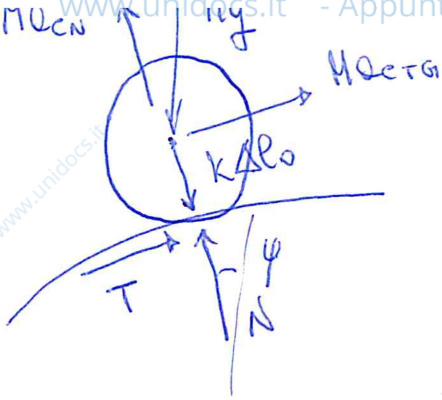
$$\vec M_B^{(AB)} = 0 \quad aR_A = 0$$



$$\vec M_C^{(BC)} = 0 \quad T_B \cdot b_{BC} = 0 \Rightarrow T_B = 0$$

$$\vec R_H^{(BC)} = 0 \quad H_C + T_B\cos\alpha = 0 \Rightarrow H_C = 0$$

$$\vec R_V^{(BC)} = 0 \quad V_C + T_B\sin\alpha = 0 \Rightarrow V_C = 0$$



$$a_C = \underbrace{(R+r)\ddot{\varphi}}_{a_{CTG}} e^{i(\varphi+\pi/2)} - \underbrace{(R+r)\dot{\varphi}^2}_{a_{CN}} e^{i\varphi}$$

$$\vec{R}_N^{(misto)} = 0$$

$$N - k\Delta l_0 - Mg\cos\varphi + M a_{CN} = 0$$

$$\Rightarrow N(\Delta l_0)$$

$$\vec{R}_T^{(misto)} = 0$$

$$T + M a_{CTG} - Mg\sin\varphi = 0 \Rightarrow T$$

LIMITE DI ADERENZA

$$|T| = f_s |N|$$

$$|Mg\sin\varphi - M a_{CTG}| = f_s |k\Delta l_0 + Mg\cos\varphi - M a_{CN}|$$

$$\Rightarrow \Delta l_0$$

ESE 3 |

$$W_1 = C_m \omega_m - M g R_m \omega_m - \frac{1}{2}\rho A C_D R_m^3 \omega_m^3 - \underbrace{(J_m + M R_m^2)}_{J_m^*}\dot\omega_m \omega_m$$

$$W_2 = -(M_C + f_v M_B) g \frac{R_A \tau}{2}\omega_m - \underbrace{\left(M_C + M_B + J_B/R_B^2 + 4 J_A/R_A^2\right)\frac{R_A^2 \tau^2}{4}}_{J_u^*}\dot\omega_m \omega_m$$

1 | $W_2 = -(M_C + f_v M_B) g \frac{R_A \tau}{2}\omega_m < 0 \Rightarrow$ MOTO DIRETTO

$\eta W_1 + W_2 = 0$

$$\eta_D C_{m0}\cancel{\omega_m} - \eta_D K \omega_m^{\cancel{3}\,2} - \eta_D M g R_m \cancel{\omega_m} - \eta_D \frac{1}{2}\rho A C_D R_m^3 \omega_m^{\cancel{3}\,2} - (M_C + f_v M_B) g \frac{R_A \tau}{2}\cancel{\omega_m} = 0$$

$$\underbrace{\left[\eta_D K + \eta_D \frac{1}{2}\rho A C_D R_m^3\right]}_{c}\omega_m^2 = \underbrace{\eta_D C_{m0} - \eta_D M g R_m - (M_C + f_v M_B) g \frac{R_A \tau}{2}}_{b}$$

$$\boxed{\omega_m = +\sqrt{b/c}}$$

$W_1 > 0$ x moto diretto

$C_m > M g R_m + \frac{1}{2}\rho A C_D R_m^3 \omega_m^2$

ovvero $C_m > 0$

2 | Annullo $C_m > 0 \rightarrow$ deduco $\dot\omega_m < 0$

$$W_1 = \underbrace{-M g R_m \omega_m - \frac{1}{2}\rho A C_D R_m^3 \omega_m^3}_{<0} - \underbrace{J_m^* \dot\omega_m \omega_m}_{>0} \gtrless 0$$

$$W_2 = \underbrace{-(M_C + f_v M_B) g \frac{R_A \tau}{2}\omega_m}_{<0} - \underbrace{J_u^* \dot\omega_m \omega_m}_{>0} \gtrless 0$$

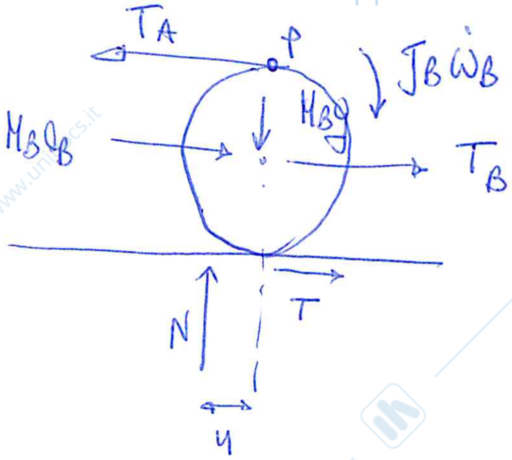
HP: MOTO DIRETTO (o RETROGRADO)

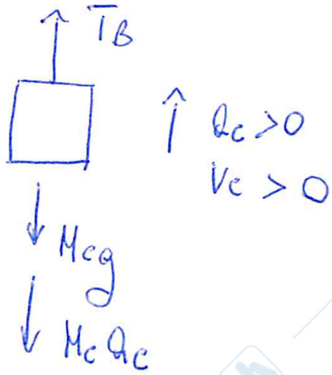
$$\dot\omega_m = \frac{-\eta_D\left(M g R_m + \frac{1}{2}\rho A C_D R_m^3 \omega_m^2\right) - (M_C + f_v M_B) g \frac{R_A \tau}{2}}{\eta_D J_m^* + J_R^*} < 0$$

come intuito

$\Rightarrow$ Sostituisco $\dot\omega_m$ in W_1 (oppure W_2) e se $W_1 > 0$ l'ipotesi era corretta altrimenti il moto era retrogrado

3





$\vec{R}_V^{\,(\text{MASSA } M_c)}$

$$T_B = M_c g + M_c a_c$$

$$\vec{R}_V^{\,(\text{DISCO } B)} = 0 \qquad N = M_B g \quad \Rightarrow N$$

$$\vec{M}_P^{\,(\text{DISCO } B)} = 0 \qquad (M_B a_B + T_B) R_B + T\, 2R_B - N \cdot f_v R_B - J_B \dot{\omega}_B = 0$$

$$\Rightarrow T$$

$$|T| \leq f_s |N|$$