

Opzioni - Discreto: Trading Strategies

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Lezioni di "Pricing"

April 16, 2025

1 Premesse

Definizione 1 *Derivato* = strumento finanziario il cui valore "deriva" dal valore dell'attività sottostante, dove il sottostante è uno strumento generalmente quotato (azione, obbligazione, future), ma può anche non essere finanziario (Materie Prime, scommesse).

Oltre alle Borse, in cui gli strumenti quotati sono standardizzati, i derivati possono essere scambiati

Definizione 2 "OTC = Over the counter" = Mercato degli scambi one-to-one dove il contratto va definito volta per volta ed è quindi più dettagliato, ma meno liquido, ed implica rischio di credito.

Definizione 3 *Categorie di Operatori.*

- **Hedgers.** Per trasformare uno scambio a prezzo incerto, in uno con maggiore certezza. Ridurre il rischio.
- **Speculatori.** Voglio assumere il rischio che gli hedgers vogliono evitare.
- **Arbitraggisti.** Assumono posizioni di arbitraggio su più mercati per assicurarsi profitti senza rischio.

2 Opzioni

2.1 Intuizioni

2.1.1 Opzione CALL

$t = 0$		$t = T$
$-c$	\longrightarrow	$\max[S_T - X; 0]$

- In $t = 0$: L'investitore paga il prezzo c (da intendere come un acconto) per ottenere il **diritto** a comprare l'attività sottostante al prezzo d'esercizio X .
- In data di scadenza $t = T$:
 - Se $S_T > X$, l'investitore paga il prezzo X per l'attività sottostante e può immediatamente rivenderla al prezzo S_T , ottenendo la differenza come profitto.
 - Se $S_T \leq X$, l'investitore NON paga nulla, non compra nulla e perde il prezzo (l'acconto).

Paragone con il future

$t = 0$		$t = T$
$-m(F_0)$	\longrightarrow	$S_T - (F_0 - m(F_0))$

- In $t = 0$: L'investitore si impegna a comprare F_0 anche se paga solo il margine $m(F)$ (da intendere come un acconto) per ottenere l'**obbligo** a comprare l'attività sottostante al prezzo d'esercizio F_0 .
- In data di scadenza $t = T$:
 - Se $S_T > F_0$, l'investitore finisce di pagare il prezzo d'esercizio F_0 per l'attività sottostante e può immediatamente rivenderla al prezzo S_T , ottenendo la differenza come profitto.
 - Se $S_T \leq F_0$, l'investitore che volesse rivendere l'attività sottostante, perde la differenza.

osservazione 1 *Le opzioni sono un'evoluzione dei futures, in quanto proteggono uno dei due lati della variazione.*

- – Le Call sono delle scommesse sul rialzo del prezzo del sottostante. Ovvero garanzie sul fatto di non perdere più del prezzo della Call.

GRAFICO CALL

Definizione 4 *Opzione Call = diritto a comprare un'unità dell'asset sottostante S entro una certa data T e ad un certo prezzo di esercizio X .*

Definition 1 • per una call **Europea** call, c , l'esercizio dell'opzione deve avvenire alla data T ,

- per una call **American** call, C , l'esercizio può avvenire ad una qualunque data $t \leq T$,

$$\max[(S(t) - X), 0]$$

- Il **valore intrinseco di una call americana**, ovvero il payoff in data corrente t è $\max\{(S(t) - X), 0\}$.
- Il prezzo di una **Call Americana**, C è

$$C(S, t, X, T) > \max\{(S(t) - Xe^{-r(T-t)}), 0\}$$

la disuguaglianza stretta deriva dal fatto che, poiché è possibile esercitare il diritto oggi $t \in (t_0, T)$ ed ottenere $\max\{(S(t) - X), 0\}$, il prezzo deve dare un incentivo ad andare avanti, altrimenti la call avrebbe valore nullo.

- Per il **prezzo di una Call Europea** c , il limite inferiore vale

$$c(S, t, X, T) \geq \max\{(S(t) - Xe^{-r(T-t)}), 0\}$$

ovvero vale la disuguaglianza debole, perché, poiché si è vincolati ad esercitare solo a scadenza T , quindi il prezzo può essere uguale al payoff corrente.

2.1.2 Opzione PUT

$t = 0$		$t = T$
$-p$	\longrightarrow	$\max[X - S_T; 0]$

- In $t = 0$: L'investitore paga il prezzo p (da intendere come un acconto) per ottenere il **diritto** a vendere l'attività sottostante al prezzo d'esercizio X .
- In data di scadenza $t = T$:
 - Se $X > S_T$, l'investitore paga il prezzo X per l'attività sottostante e può immediatamente ricomprarla al prezzo S_T , ottenendo la differenza come profitto.
 - Se $X \leq S_T$, l'investitore NON vende nulla, non compra nulla e perde il prezzo (l'acconto).

Paragone con il future

Il caso paragonabile è "vendere allo scoperto" il future, ovvero l'**obbligo** di consegnare la merce a scadenza

$t = 0$		$t = T$
$+m(F_0)$	\longrightarrow	$+(F_0 - m(F_0) - S_T)$

- In $t = 0$: L'investitore vende F_0 anche se in data $t = 0$ ottiene solo il margine $m(F)$
- In data di scadenza $t = T$:
 - Se $F_0 > S_T$, l'investitore finisce di ottenere il prezzo d'esercizio F_0 per l'attività sottostante e può immediatamente ricomprarla al prezzo S_T , ottenendo la differenza come profitto.

– Se $F_0 \leq S_T$, l'investitore che volesse ricomprare l'attività sottostante, perde la differenza.

- Le Put sono delle scommesse sul ribasso del prezzo del sottostante. Se il prezzo del sottostante sarà maggiore del prezzo di esercizio, la put è una garanzia sul fatto di non perdere più del prezzo della Put.

GRAFICO PUT

Definizione 5 *Opzione Put* è il diritto a vendere l'attività sottostante S , entro una certa data T e ad un certo prezzo di esercizio K .

Definition 2 • per una **put Europea**, p , l'esercizio dell'opzione deve avvenire alla data T ,

- per una **put American**, P , l'esercizio può avvenire ad una qualunque data $t \leq T$,
- Il **valore intrinseco di una put**, ovvero il payoff in data corrente t è $\max\{(X - S(t)), 0\}$.
- il **prezzo di una put Americana**, P è

$$P(S, t, X, T) > \max\{(Xe^{-r(T-t)} - S(t)), 0\}$$

anche qui, la disuguaglianza stretta deriva dal fatto che, poiché è possibile esercitare il diritto oggi $t \in (t_0, T)$ ed ottenere $\max\{(X - S(t)), 0\}$, il prezzo deve dare un incentivo ad andare avanti, altrimenti la call avrebbe valore nullo.

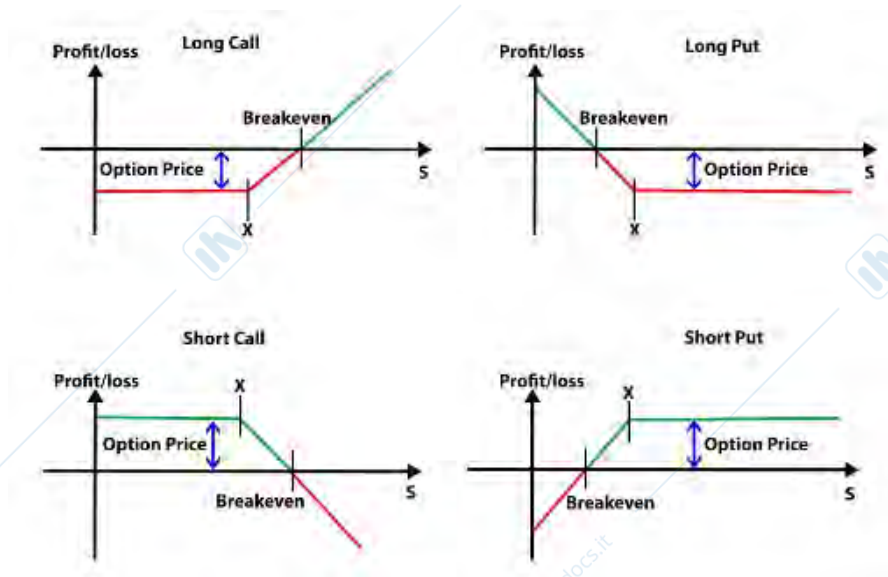
- Per il **prezzo di una Put Europea**, il limite inferiore del prezzo è

$$p(S, t, X, T) \geq \max\{(Xe^{-r(T-t)} - S), 0\}$$

ovvero vale la disuguaglianza debole, perché, poiché si è vincolati ad esercitare solo a scadenza T , quindi il prezzo può essere uguale al payoff corrente.

osservazione 2 La convenzione per i prezzi delle opzioni è che, se sono uguali ai payoff, è meglio venderle ed ottenere il payoff. Affinché l'opzione resti valida è necessario un prezzo strettamente superiore al relativo payoff.

osservazione 3 Per le opzioni europee, poiché non possono essere esercitate immediatamente, il prezzo può raggiungere l'attuale payoff come limite inferiore poiché l'arbitraggio non può essere sfruttato.



Le figure successive mettono in evidenza la differenza fra il payoff (tratto continuo) e il profitto netto (tratteggiato) che è pari al payoff meno il costo dell'opzione. Nelle figure P o -P sulle ordinate indica il prezzo iniziale della Call o della Put.

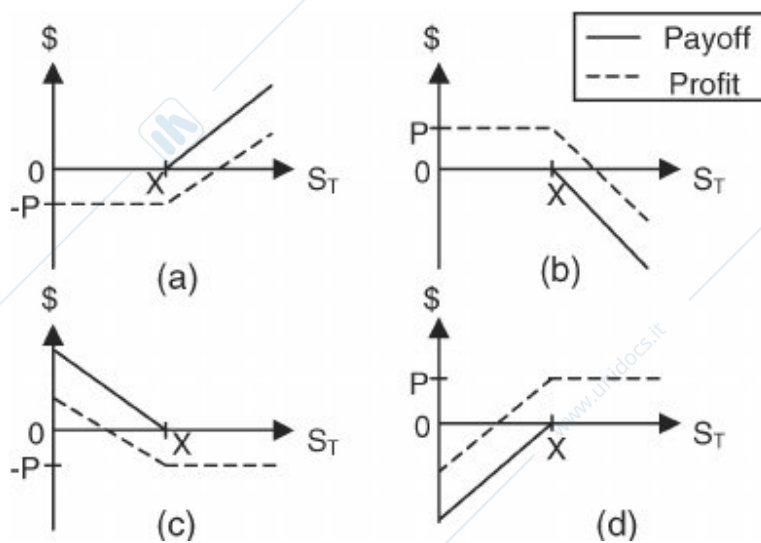


Figure 11.3 Bounds for European and American call options when there are no dividends.

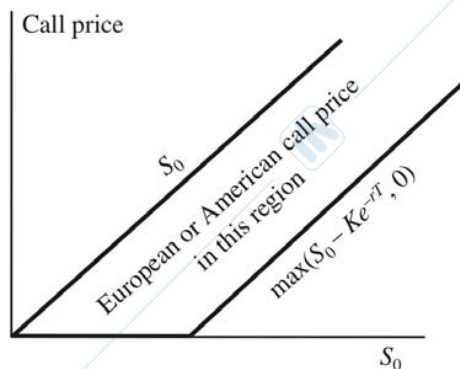


Figure 1:

2.2 LIMITI (NO)

2.2.1 CALL

Due ragioni per non esercitare la call americana:

- (i) l'assicurazione che fornisce sulla crescita del prezzo e protezione dal ribasso. Se la si vende si è soggetti al ribasso.
- (ii) il valore temporale del denaro. Più tardi viene pagato il prezzo di esercizio, meglio è.

Limiti

- Limite inferiore è il payoff in data corrente $t = 0$, che può anche essere zero.

$$\max(S_0 - Ke^{-r(T-0)}, 0) \leq c \leq S_0$$

- Limite superiore il valore del sottostante in data corrente $t = 0$: S_0 .

Dove, in generale, il prezzo della call cresce con la volatilità del prezzo del sottostante S_t , di r , T

2.2.2 PUT

L'opzione put è un'assicurazione contro il ribasso, tuttavia può essere vantaggioso, al decrescere di S_0 vendere subito la put, guadagnare K per poi reinvestirlo. In generale l'esercizio anticipato diventa più vantaggioso al ribasso di S_0 , della sua volatilità e al crescere di r .

Limiti

European Put Option

$$\max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \leq p \leq Ke^{-rT}$$

American Put Option

$$\max(K - S_0, 0) \leq P \leq K$$

perché può essere esercitata immediatamente e quindi K non è scontato.

Figure 11.5 Bounds for European and American put options when there are no dividends.

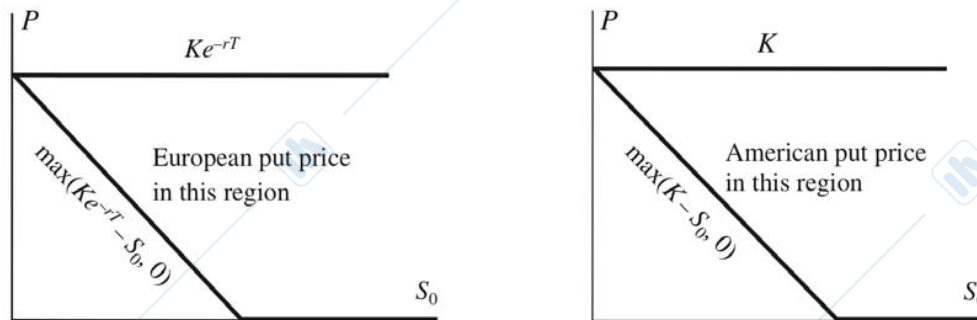


Figure 2:

3 Trading Strategies

Le opzioni vengono usate per creare profitto negli intervalli di prezzo che l'investitore ritiene più probabili.

3.1 Put protettiva

Costruire la **Put protettiva** acquistando il seguente portafoglio ($X =$ prezzo d'esercizio)

- Comprare Azione al prezzo $S_0 = X = 100$,
- Comprare Put con payoff $P(T) = \max[X - S_T, 0]$, dove $X = S_0$ e costo $p_0 = 5\%X = 5$.

Partizionare l'asse delle ascisse in tre parti: $S_T < X$; $S_T = X$; $S_T > X$.

1. Costruire il portafoglio $\pi(t=0)$.

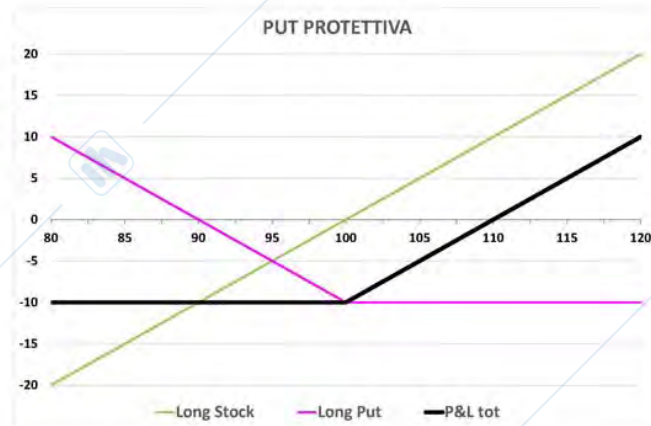
$$\pi(t=0) = -S_0 - p_0$$

2. Costruire il portafoglio $\pi(t=T)$ nei tre stati di natura espressi dalle 3 partizioni.

$$\pi(t=T) = \begin{cases} S_T + (X - S_T) = X & \text{per } S_T < X \\ S_T + 0 & \text{per } S_T = X \\ S_T + 0 & \text{per } S_T > X \end{cases}$$

3. Costruire il portafoglio netto $\pi(t=0) + \pi(t=T)$ in nero nel grafico, supponendo $S_0 = X = 100, p_0 = 5$.

$$\pi(0) + \pi(T) = \begin{cases} -S(0) - p_0 + S_T + X - S_T = -S(0) - p_0 + X = -100 - 5 + 100 = -5 & \text{per } S_T < X \\ -S_0 - p_0 + S_T + 0 = -100 - 5 + 100 = -5 & \text{per } S_T = X \\ -S_0 - p_0 + S_T + 0 = -5 + S_T & \text{per } S_T > X \end{cases}$$



Vediamo nel grafico il profitto derivante da:

- possesso del sottostante S (verde);
- possesso della Put (rosa);
- possesso del portafoglio, ovvero la somma dei due precedenti (nero).

3.2 Bull Spread

Costruiamo un **Bull Spread** formando il seguente portafoglio:

- (a) Comprare Call con payoff $\max[S - X_1, 0]$, dove $X_1 = 100$ e costo $c_0(X_1 = 80) = 10\%X_1 = 0.1 \cdot 80 = 8$
- (b) Vendere una Call con $X_2 > X_1$, dove $X_2 = 100$ e costo $c_0(X_2 = 100) = 4\%X_2 = 4$
- (c) Costruire il portafoglio $\pi(t = 0)$.

$$\pi(t = 0) = -c_0(X_1 = 80) + c_0(X_2 = 100) = -8 + 4 = -4$$

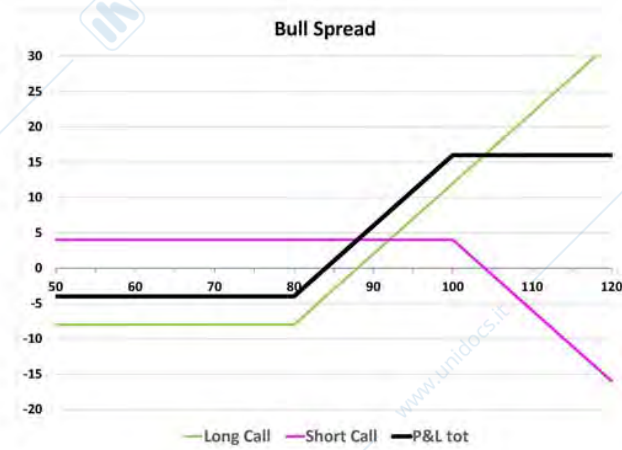
- (d) Costruire il portafoglio $\pi(t = T)$ (Si veda il file Excel).

$$\pi(t = T) = \begin{cases} \dots & \text{per } S_T < X_1 \\ \dots & \text{per } S_T = X_1 \\ \dots & \text{per } X_1 < S_T < X_2 \\ \dots & \text{per } S_T = X_2 \\ \dots & \text{per } S_T > X_2 \end{cases}$$

Disegnare il payoff per $t = T$ avendo sull'asse delle ascisse $S_T = (0, \dots, 200)$ e sull'asse delle ordinate il payoff di ogni componente.

- (e) Il payoff creato dà maggiore o minore possibilità di guadagno per $S_T > X_2$?

- (f) Questo portafoglio costa di più o di meno del precedente?
- (g) Conclusioni?



3.3 Uso delle Condizioni di Non-Arbitraggio

Ipotesi:

- unico risk-free rate, r ;
- capitalizzazione continua, e^{-rt} .

Proposizione 1 *Data un'opzione americana $C[S_0, X, T]$ su uno stock che non paga dividendi, è più profittevole esercitare l'opzione in T , oppure venderla senza esercitarla in $t < T$?*

Proof. Consideriamo i payoffs in $t = 0, t, T$

$$\pi(t=0) = -C[S_0, X, T]$$

Il valore di esercizio è:

$$\pi(t=t) = \begin{cases} 0 & \text{per } S_t < X \\ 0 & \text{per } S_t = X \\ S_t - X > 0 & \text{per } S_t > X \end{cases}$$

Mentre il valore della call al tempo t è

$$C[S_t, X, t] = \max[S_t - X \exp(-rT), 0] > S_t - X$$

In $t = t$, l'opzione è ancora quotata e il suo valore è il valore presente del payoff a scadenza, ed è maggiore del valore di esercizio $S_t - X$. Per questo, in caso di necessità di liquidare la posizione in $t < T$, è **meglio vendere** C_t piuttosto che esercitare ottenendo $\pi(t=t)$.

A scadenza

$$\pi(t=T) = \begin{cases} 0 & \text{per } S_T < X \\ 0 & \text{per } S_T = X \\ S_T - X > 0 & \text{per } S_T > X \end{cases}$$

■

Proposizione 2 [*Put-Call Parity*] *La Put-Call Parity è l'equazione di prezzo che soddisfa la condizione di non arbitraggio fra queste grandezze*

$$c_0 + X \exp(-rT) = p_0 + S_0$$

Proof. Costruire i seguenti portafogli in $t = 0$:

1. Portafoglio 1:

- Acquisto $c_0 =$ prezzo Call europea $[S_0, X, T]$,
- Acquisto 1 obbligazione, ovvero prendere in prestito la somma $X \exp(-rT)$

2. Portafoglio 2:

- Acquisto $p_0 =$ prezzo put europea $[S_0, X, T]$,
- Acquisto 1 azione di prezzo S_0 .

3. Costruire i payoffs dei due portafogli in $t = 0$ ed in $t = T$.

$$\pi_1(t=0) = -c[S_0, X, T] - X \exp(-rT)$$

$$\pi_2(t=0) = -p[S_0, X, T] - S_0$$

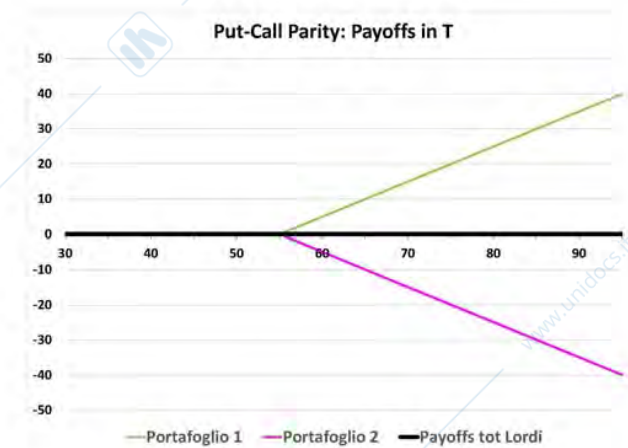
$$\pi_1(t=T) = \max[S_T - X; 0] + X = \begin{cases} 0 + X & \text{per } S_T < X \\ 0 + X & \text{per } S_T = X \\ S_T - X + X = S_T & \text{per } S_T > X \end{cases}$$

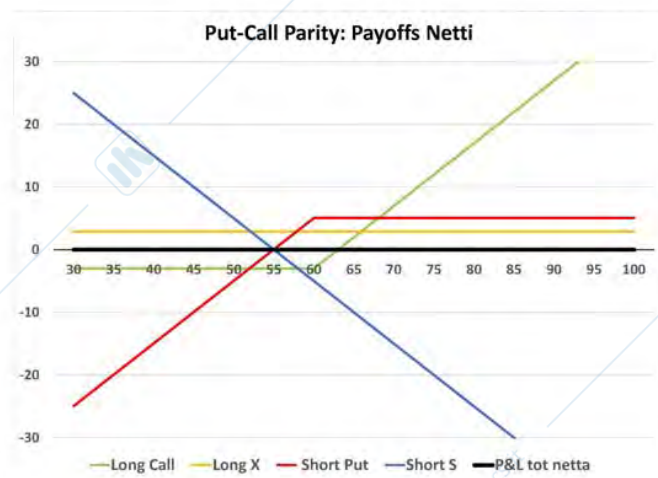
$$\pi_2(t=T) = \max[X - S_T; 0] + S_T = \begin{cases} X - S_T + S_T = X & \text{per } S_T < X \\ 0 + S_T = & \text{per } S_T = X \\ 0 + S_T = & \text{per } S_T > X \end{cases}$$

Poiché i payoffs in T per i due portafogli (a parte il punto $S_T = X$) sono identici per qualunque valore di S_T , i prezzi dei due portafogli in $t = 0$ devono essere uguali. CVD.

■

Corollario 1 *Imponendo l'equazione di eguaglianza fra i due portafogli in data corrente, l'equazione di "Put-Call Parity" può essere risolta per il prezzo della call in funzione delle altre variabili o per il prezzo della put in funzione delle altre variabili.*





4 Trading Strategies

Esercizio 1 Per ogni trading strategy, esercitarsi a

1. calcolare i payoffs in $t = 0$ ed in T per $S_T \gtrless X$;
2. disegnare i payoffs al netto dei costi delle componenti e poi della somma di esse per le diverse trading strategie;
3. evidenziare qual'è il segmento di valore di S_0 che fa crescere il rendimento della strategia e se da un rendimento lineare, crescente o decrescente in S_T ;
4. mettere in relazione il costo della strategia e il rendimento. Se possibile capire il rendimento netto;
5. mettere in relazione il costo della strategia e la protezione del portafoglio.

4.1 Involving 1 option and a stock

Convention $X_1 < X_2, T_1 < T_2$.

From the put-call parity relationship it follows that the payoffs on the RHS and on the LHS are equal.

1. **Covered call**

$$S - C = -P$$

2. **Inverse of a Covered call**

$$-S + C = P$$

3. **Protective put**

$$P + S = C$$

4. **Reverse of Protective put**

$$-P - S = -C$$

4.2 Spreads

1. **Bull spreads**

It is constituted by the same kind of option, either both calls or both puts with different exercise prices. The characteristic is to buy the one with the lowest X , which is also the cheapest and to sell the more expensive

Buy (X_1) , sell $C(X_2)$

Hope for S_t to increase.

Aim: limits both the investor's upside potential and his or her downside risk

2. Bear spreads

Sell (X_1) , buy $C(X_2)$.

Aim: hope that S will decline.

Initial inflow. (Copy remarks from problem set).

3. Butterfly spreads

$$-C(X_1) - C(X_3) + 2C(X_2)$$

Aim: profit if S stays close to X_2 , but only small loss if there is significant stock price move in either directions: conservative strategy. Appropriate if the investor thinks that large movements are unlikely.

Small initial investment.

4. Calendar spreads

$$+C(X, T_1) - C(X, T_2)$$

The longer the maturity, the more expensive the options are. Therefore, initial investment required.

Aim: Profit pattern similar to butterfly spread: see above.

5. Neutral calendar spreads

$$+C(X, T_1) - C(X, T_2)$$

If $X \approx S$.

6. Bullish calendar spreads

$$+C(X, T_1) - C(X, T_2)$$

If $X > S$.

7. Bearish calendar spreads

$$+C(X, T_1) - C(X, T_2)$$

If $X < S$.

8. Bearish calendar spreads

$$-C(X, T_1) + C(X, T_2)$$

Small initial profit.

9. Diagonal spreads

$$-C(X_i, T_i) + C(X_i, T_j), \forall i, j$$

4.3 Combinations

1. Straddle

(Bottom or Straddle Purchase)

$$-C(X, T) - P(X, T)$$

If $S \approx X$ there is loss. However if there is sufficient move in either directions there is significant profit. Appropriate when large moves of S are expected.

2. Top Straddle or straddle write

$$+C(X, T) + P(X, T)$$

If $S \approx X$ there is gain.. However if there is sufficient move in either directions there is significant loss. Appropriate when small moves of S are expected.

3. Strip

$$+C(X, T) + 2P(X, T)$$

4. Strap

$$+C(X, T) + 2P(X, T)$$

If $S \approx X$ there is gain.. However if there is sufficient move in either directions there is significant loss. Appropriate when small moves of S are expected.

5. Strangle (or Bottom vertical combinations)

$$+C(X, T) + 2P(X, T)$$

When a large S move is expected, but it is uncertain whether it will be an increase or a decrease.

6. Strangle Sale (or Top vertical combinations)

$$-C(X, T) - 2P(X, T)$$

When a large S move are unlikely. Very dangerous since the *investor's potential loss is unlimited*.

References

- [1] Benninga, S. (2014). Financial modeling 3rd ed. MIT Press.
- [2] Benninga, S. (2010). Modelli Finanziari: la finanza con Excel 2a ed. Mc Graw-Hill.
- [3] Cuthbertson, K., Nitzsche, D., & O'Sullivan, N. (2020) Derivatives, Wiley.
- [4] Hull, J. (2018). Options, futures and other derivatives, Prentice Hall. (Ed italiana a cura di E. Barone).
- [5] Kosowski, R.L., Neftci, S.N. (2014) Principles of Financial Engineering, Academic Press.