Dispense Pricing degli strumenti e dei servizi finanziari

Modelli E Metodi Numerici

Università degli Studi di Roma La Sapienza (UNIROMA1)

252 pag.

Elementi di teoria della scelta del consumatore (Elements of Consumption Decision Theory)

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia Pubblica
Università di Roma "La Sapienza"

PRICING dei Prodotti e degli Strumenti Finanziari

February 28, 2021

KEYWORDS: consumption theory, Slutsky variation, intertemporal choice, consumer surplus.

JEL: A22, D11, D90.

1 Indice

1. Definizione di scelta "ottima": insieme di bilancio e metodo di scelta.
2. Insieme delle scelte possibili. Insieme di bilancio delimitato dal vincolo di bilancio con reddito monetario o con reddito da dotazione. Disegno sul piano $\Re^2_+$ e come si sposta al variare dei parametri.
3. Metodo di Scelta. Preferenze ,o funzione di utilità, e curve di isolivello (curve di indifferenza). Disegno sul piano delle curve di indifferenza e come si spostano al variare dei parametri.
4. Scelta fra 2 beni, rappresentazione sul piano $\Re^2_+$ e calcolo delle soluzioni.
5. Statica comparata. Spostamento della scelta ottima al variare dei parametri: equazioni di Slutsky.
   - (a) Dato un reddito monetario e al variare dei prezzi: effetti sostituzione e reddito.
   - (b) Dato un reddito da dotazione e al variare dei prezzi: effetti sostituzione, reddito ordinario e reddito da dotazione.
6. Applicazioni:
   - (a) Offerta di lavoro.
   - (b) Scelta intertemporale.
7. Surplus del consumatore.

2 Insieme di bilancio

2.1 Notazione per 2 beni (Es. 1 = pane, 2 = vino)

- La *"quantità di una merce"* è rappresentata da $x_n \in R$. Es. $x_1 = 1,$, ovvero 1 kg di pane, oppure $x_2 = 2$, ovvero 2 lt di vino.
- Un *"paniere di merci"* è una combinazione di quantità di beni diversi, definito dal punto $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Seguendo l'esempio precedente: $x = (1, 2)$ è un punto sul piano $\big($ ovvero $R^2\big)$con coordinate rispettive 1 e 2.
- Il *"prezzo"* di un bene è p_n. Es. p_1 = prezzo di un kg di pane = 2 euro e p_2 = prezzo di un litro di vino = 3 euro.
- Il "prezzo di un paniere" è il vettore $p = (p_1, p_2) = (2, 3) \in R^2$.
- Il "vettore della dotazioni" ovvero le disponibilità di risorse possedute dal consumatore di ciascuna merce $\omega = (\omega_1, \omega_2) = Es. = (5, 3)$.

Definizione 1 *"Vincolo di bilancio" è*

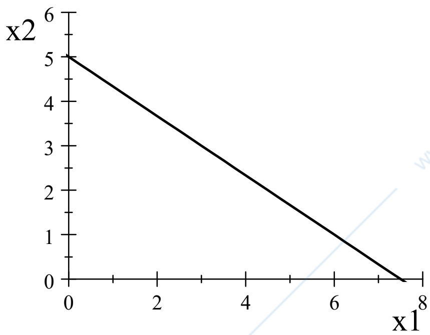
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m \text{ oppure } p_1x_1 + p_2x_2 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$

Es. Disegnamo il vincolo di bilancio per $p = (p_1, p_2) = (2, 3)$

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= m \\ \text{ovvero} \quad 2x_1 + 3x_2 &= 15 \end{aligned}$$

Per disegnarlo esplicitiamo l'equazione per x_2

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \\ &= 5 - \frac{2}{3}x_1 \end{aligned}$$



- Intercetta sull'asse x_1 : M/p_1
- Intercetta sull'asse x_2 : M/p_2
- Coefficiente angolare: $-p_1/p_2$.

Definizione 2 *Insieme di bilancio è quell'area contenuta fra gli assi cartesiani e il vincolo di bilancio, ovvero il luogo dei punti dei "panieri" x che costano non più del valore del reddito m o della dotazione $p_1\omega_1 + p_2\omega_2$. In termini formali l'insieme di bilancio è quell'insieme B, costituito dai punti "panieri" x definiti da un numero di coordinate pari al numero dei beni considerati (nei grafici abbiamo sempre $N = 2$).*

$$B = \left\{x \in X^N : p_1x_1 + p_2x_2 \le m \text{ oppure } p_1x_1 + p_2x_2 \le p_1\omega_1 + p_2\omega_2\right\}$$

- Proprietà dell'insieme di bilancio, date le ipotesi: (i) $m < \infty$; (ii) $p_n > 0, \ \forall n$.

  1. Limitato.
     - Verso il basso da $x_i \geq 0$.
     - Verso l'alto da $m < \infty$ e $p_n > 0, \ \forall n$. Infatti, se $\exists p_n = 0 \Rightarrow x_n \to \infty$, e $B \to \infty$.
  2. Chiuso. La frontiera, il vincolo di bilancio, appartiene all'insieme, ovvero i panieri appartenenti al vincolo di bilancio sono disponibili.
  3. Convesso. Ogni combinazione lineare di panieri appartenenti all'insieme, appartiene all'insieme.
  4. Non-vuoto. Se $M > 0$ e $p_n < \infty$ per alemno un n, il consumatore puo' acquistare una quantità positiva di almeno un bene.

- Studiare spostamenti al variare del reddito m, del vettore delle dotazioni ω, di una o di tutte le componenti del vettore dei prezzi.

2.1.1 Spostamenti VB al variare dei parametri.

Consideriamo il seguente vincolo di bilancio per

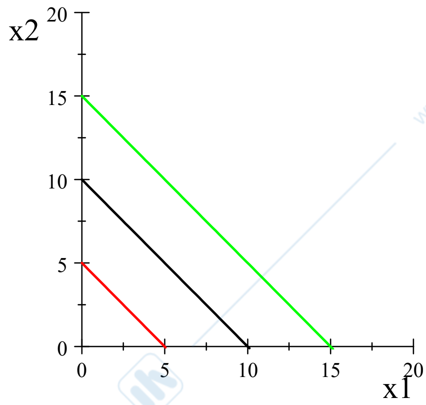
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

da cui

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

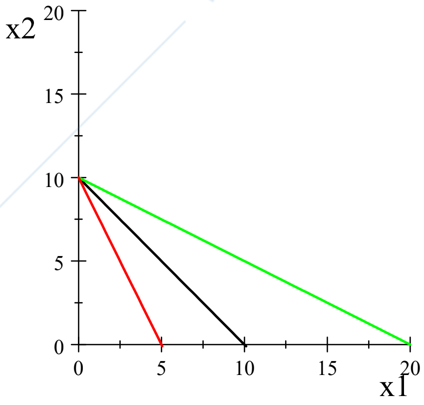
Variazioni del reddito monetario "m"

1. $m = 10, p_1 = 1, p_2 = 1$ (linea nera): $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{1}{1} x_1$
2. $m = 15, p_1 = 1, p_2 = 1$ (linea verde): $x_2 = \frac{15}{1} - \frac{1}{1} x_1$
3. $m = 5, p_1 = 1, p_2 = 1$ (linea rossa): $x_2 = \frac{5}{1} - \frac{1}{1} x_1$



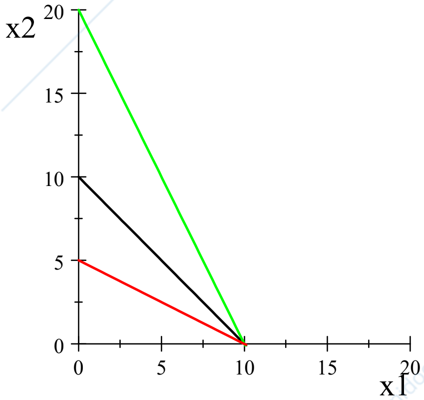
Variazioni del prezzo p_1

1. $m = 10, p_1 = 1, p_2 = 1$ (linea nera): $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{1}{1} x_1$
2. $m = 10, p_1 = 0.5, p_2 = 1$ (linea verde): $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{0.5}{1} x_1$
3. $m = 10, p_1 = 2, p_2 = 1$ (linea rossa): $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{2}{1} x_1$



Variazioni del prezzo p_2

1. $m = 10, p_1 = 1, p_2 = 1$ (linea nera): $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{1}{1}x_1$
2. $m = 10, p_1 = 1, p_2 = 0.5$ (linea verde): $x_2 = \frac{10}{0.5} - \frac{1}{0.5}x_1$
3. $m = 10, p_1 = 2, p_2 = 2$ (linea rossa): $x_2 = \frac{10}{2} - \frac{1}{2}x_1$



2.2 Notazione per n = 1, ..., N beni

- La *"quantità di una merce"* è rappresentata da $x_n \in R$.
- Un *"paniere di merci"* è una combinazione di quantità di beni diversi, definito dal punto $x = (x_1, ...x_n, ...x_N) \in R^N$.
- Il *"prezzo"* di un bene è p_n.
- Il "prezzo di un paniere" è il vettore $p = (p_1, ...p_n, ...p_N) \in R^N$.
- Il "vettore della dotazioni" ovvero le disponibilità di risorse possedute dal consumatore di ciascuna merce $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n, ...\omega_N)$.

Definizione 3 *"Vincolo di bilancio" è*

$$\sum_{n=1}^{N} p_n x_n = m \text{ oppure } \sum_{n=1}^{N} p_n x_n = \sum_{n=1}^{N} p_n \omega_n$$

Definizione 4 *Insieme di bilancio è quell'area contenuta fra gli assi cartesiani e il vincolo di bilancio, ovvero il luogo dei punti dei "panieri" x che costano non più del valore del reddito m o della dotazione $\sum_{n=1}^{N} p_n\omega_n$. In termini formali l'insieme di bilancio è quell'insieme B, costituito dai punti "panieri" x definiti da un numero di coordinate pari al numero dei beni considerati (nei grafici abbiamo sempre $N = 2$).*

$$B = \left\{\mathbf{x} \in X^N : px \leq m \text{ oppure } px \leq p\omega\right\}$$

- Proprietà dell'insieme di bilancio, date le ipotesi: (i) $m < \infty$; (ii) $p_n > 0, \ \forall n$.

  1. Limitato.
     - Verso il basso da $x_i \geq 0$.
     - Verso l'alto da $m < \infty$ e $p_n > 0, \ \forall n$. Infatti, se $\exists p_n = 0 \Rightarrow x_n \to \infty$, e $B \to \infty$.
  2. Chiuso. La frontiera, il vincolo di bilancio, appartiene all'insieme, ovvero i panieri appartenenti al vincolo di bilancio sono disponibili.
  3. Convesso. Ogni combinazione lineare di panieri appartenenti all'insieme, appartiene all'insieme.
  4. Non-vuoto. Se $M > 0$ e $p_n < \infty$ per alemno un n, il consumatore puo' acquistare una quantità positiva di almeno un bene.

- Studiare spostamenti per $dm, d\omega, dp_n$.

3 Metodo di scelta: preferenze e funzione di utilità

Definizione 5 *Dati due panieri di consumo (x_1, x_2) e (y_1, y_2), il consumatore sa esprimere una delle seguenti preferenze:*

- *preferenza stretta $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$; ciò implica che sia $x_1 \succ y_1$ e $x_2 \succ y_2$;*
- *indifferenza $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$; ciò implica che sia $x_1 \sim y_1$ e $x_2 \sim y_2$; oppure*
- *preferenza debole $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$; ciò implica che sia $x_1 \succ y_1$ e $x_2 \sim y_2$ o viceversa (fare riferimento ai grafici fatti a lezione).*

Le preferenze costituiscono un *ordinamento,* se soddisfano i seguenti assiomi

A1 Completezza. Il consumatore sa confrontare qualunque coppia possibile di panieri e sa esprimere una delle preferenze sopra elencate.

A2 Riflessività. Ogni paniere è desiderabile almeno quanto se stesso: $(x_1, x_2) \succeq (x_1, x_2)$.

A3 Transitività. Se $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$, allora deve essere $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$. Questo assioma è oggetto di discussione, si veda Varian e/o Rodano-Saltari..

A4 Continuità.

A5 Monotonicità forte.

Teorema 1 *Se le preferenze soddisfano $A1 - A5$,
allora esiste una funzione di utilità continua $u(\mathbf{x}) : R_+^N \to R$.*

Definizione 6 *"Insieme dei punti sopra il contorno (sopra la curva d'indifferenza)" (Upper contour set)*

A6 Convessità. L'insieme dei punti preferiti ai punti del contorno è convesso: comunque presi due punti appartenenti all'insieme contorno ovvero indifferenti, qualunque loro combinazione lineare, dà luogo a punti debolmente preferiti.

A7 Stretta convessità. L'insieme dei punti preferiti ai punti del contorno è strettamente convesso.

Teorema 2 *Se le preferenze soddisfano $A1 - A5$ e $A6$, allora esiste una funzione di utilità continua $u(\mathbf{x}) : R_+^N \to R$ ed essa è quasi concava.*

Teorema 3 *Se le preferenze soddisfano $A1 - A5$ e $A7$, allora esiste una funzione di utilità continua $u(\mathbf{x}) : R_+^N \to R$ ed essa è strettamente quasi concava.*

Definizione 7 *"Curva d'indifferenza" o, formalmente, insieme contorno, è l'insieme dei panieri che danno luogo allo stesso valore della funzione obiettivo $u(\mathbf{x})$.*

$$I = \left\{ \mathbf{x} \in R^N : u(\mathbf{x}) = U_0 \right\}$$

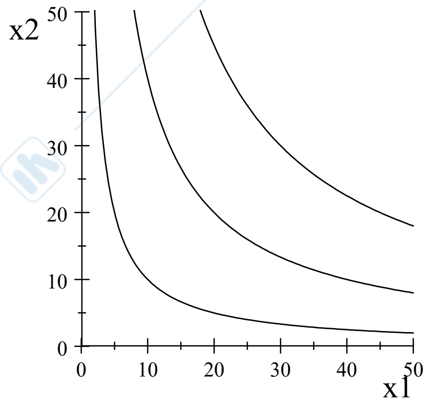
Es. Sia $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)}$. **Per poter disegnare la curva di indifferenza**, viene fissato un livello arbitrario, per es. $U_0 = 12$, $\alpha = 0.5$

$$I : x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} = U_0$$

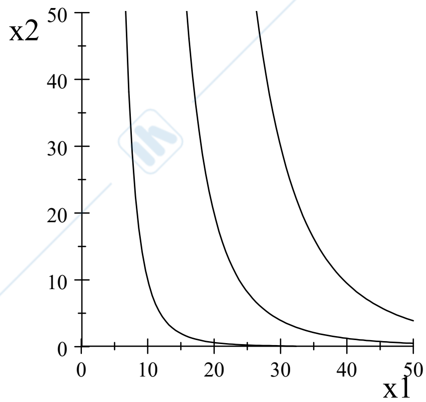
si risolve l'equazione per la variabile sull'asse delle ordinate x_2

$$x_2 = \left(\frac{U_0}{x_1^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

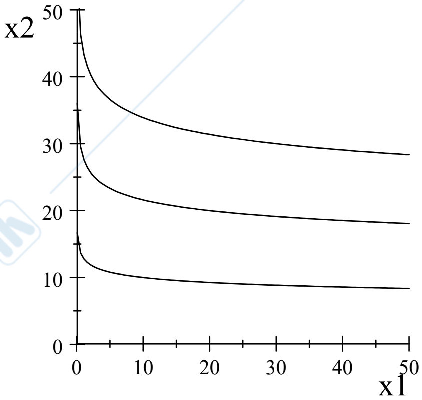
Disegnamo un fascio di curve di indifferenza per livelli crescenti di $U_0 = 10, 11, 12$.



$x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} = U_0$; $\alpha = 0.5; U_0 = 10, 11, 12$



$x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} = \overline{u}$; $\alpha = 0.8; \overline{u} = 10, 11, 12$



$x_1^{\alpha} x_2^{(1-\alpha)} = \overline{u};\ \alpha = 0.1; \overline{u} = 10, 11, 12$

- Notare il **sentiero di espansione delle curve di indifferenza** che **dipende dal parametro** α che regola la preferenza percentuale per il primo bene (α), lasciando all'altro la quota residua $(1-\alpha)$.

Definizione 8 *Utilità marginale*

$$UM_i = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_i}$$

è l'incremento di utilità dovuto ad un incremento unitario del bene x_1 nel paniere.

Normalmente si ipotizza che l'utilità marginale sia decrescente al crescere della quantità del bene contenuta nel paniere[1].

Definizione 9 *Il "Saggio marginale di sostituzione" (SMS) esprime, al variare di una quantità x_1 di quanto deve variare la quantità x_2 affinchè il consumatore mantenga la stessa soddisfazione, ovvero lo stesso livello di utilità*

$$SMS \equiv \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}}$$

ovvero

$$SMS \equiv -\frac{UM_1}{UM_2}$$

Metodo di calcolo. *Data $U(x_1, x_2) = \bar{u}$, si calcola il differenziale totale della funzione e se ne ricava la pendenza*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} dx_2 = d\bar{u}$$

Per costruzione deve essere $d\bar{u} = 0$, perché vogliamo studiare di quanto deve variare la quantità di un bene x_2 al crescere di x_1 per ottenere lo stesso livello di utilità, ovvero

$$UM_1 dx_1 + UM_2 dx_2 = 0$$

da cui

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}}$$

ovvero

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2}$$

[1] Formalmente

$$\frac{\partial (UM_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_i^2} \leq 0$$

Per convenzione si pone sempre al numeratore la variazione nelle ordinate (dx_2)*, al variare della variazione della quantità espressa sulle ascisse* (dx_1)*.*

Corollario 1 *Essendo la funzione di utilità soltanto ordinale, l'ordinamento delle preferenze è preservato da ogni trasformazione continua e monotòna.*

Corollario 2 *Il SMS è invariante ad ogni trasformazione monotòna.*
Sia data $T[u(x)]$*, si ha*

$$\frac{\partial T[u(x)]}{\partial u}\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial T[u(x)]}{\partial u}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

da cui

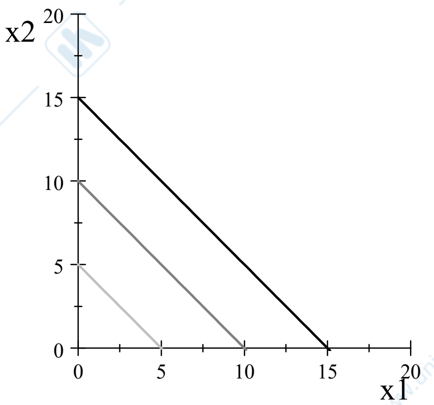
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}}\frac{\frac{\partial T[u(x)]}{\partial u}}{\frac{\partial T[u(x)]}{\partial u}}$$

dove l'ultimo termine si elide.

3.1 Esempi di funzioni di utilità e relativi SMS

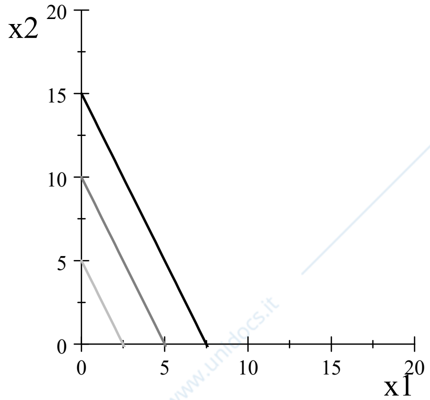
1. **Cobb-Douglas:** $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$.
   Costruiamo la trasformata logaritmica, piu' semplice da utilizzare
   $$\ln u(x_1, x_2) = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2.$$
   Differenziale totale:
   $$\frac{\alpha}{x_1}dx_1 + \frac{\beta}{x_2}dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$
   variabile al variare del punto considerato.

2. **Perfetti sostituti:** $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. **(SIIIII, perché NEUTRALITA' AL RISCHIO!)**
   Differenziale totale:
   $$adx_1 + bdx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a}{b}$$
   costante in tutta la curva d'indifferenza.
   Disegnamo le curve d'indifferenza.
   $$ax_1 + bx_2 = U_0$$
   Risolviamo per x_2 =>
   $$x_2 = \frac{U_0}{b} - \frac{a}{b}x_1$$
   - Parametri: $a = b = 1$, $U_0 = 5$ (grigio chiaro):=> $x_2 = \frac{5}{1} - \frac{1}{1}x_1$
   - Parametri: $a = b = 1$, $U_0 = 10$ (grigio):=> $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{1}{1}x_1$
   - Parametri: $a = b = 1$, $U_0 = 15$ (lnero):=> $x_2 = \frac{15}{1} - \frac{1}{1}x_1$



Per $a > b$

- Parametri: $a = 2, b = 1$, $U_0 = 5$ (grigio chiaro):=> $x_2 = \frac{5}{1} - \frac{2}{1}x_1$
- Parametri: $a = 2$, $b = 1$, $U_0 = 10$ (grigio):=> $x_2 = \frac{10}{1} - \frac{2}{1}x_1$
- Parametri: $a = 2, b = 1$, $U_0 = 15$ (nero):=> $x_2 = \frac{15}{1} - \frac{2}{1}x_1$



e viceversa per $a < b$.

3. **Perfetti complementi:** $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$

   La funzione è non differenziabile. Procediamo quindi costruendo il grafico della curva d'indifferenza.

   Se $ax_1 < bx_2 \Rightarrow ax_1 = \bar{u} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \bar{u}/a \\ x_2 \in (\bar{u}/b, \infty) \end{cases}$

   Se $bx_2 < ax_1 \Rightarrow bx_2 = \bar{u} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in (\bar{u}/a, \infty) \\ x_2 = \bar{u}/b \end{cases}$

   Il grafico è una curva d'indifferenza ad angolo' dove l'angolo è nel punto $[\bar{u}/a, \bar{u}/b]$.

4. x_2 **male** : $u(x_1, x_2) = ax_1 - bx_2$
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a}{b}$$

5. x_2 **neutrale**: $u(x_1, x_2) = ax_1$. Le rette d'indifferenza sono rette verticali.

6. **Quasi-lineare**: $u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, dove $v'(.) \geq 0, v''(.) \leq 0$

   Differenziale totale:
$$v'(x_1)dx_1 + dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -v'(x_1)$$

7. **Funzioni con sazietà**: $u(x_1, x_2) = \textit{paraboloide}$. Le curve d'indifferenza sono curve concentriche.

4 Scelta ottima e derivazione della funzione di domanda

Il problema del consumatore è
$$\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2)$$
$$t.c.\ p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

Metodo generale (Lagrange).

Si scrive il lagrangiano in cui il vincolo viene portato nella funzione obiettivo con segno negativo, moltiplicato da un coefficiente λ, detto moltiplicatore lagrangiano. Il segno è negativo se si tratta di una massimizzazione e il vincolo è del tipo $g(x) \leq 0$. Qui infatti sarebbe $p_1x_1 + p_2x_2 - m \leq 0$. Il segno è positivo se il vincolo ha segno opposto o se si sta minimizzando.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

Il lagrangiano $L(...)$ viene derivato nelle tre incognite:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} : \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} : \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : p_1x_1 + p_2x_2 - m = 0$$

Abbiamo un sistema di tre equazioni, le "condizioni del primo ordine" (CPO), nelle tre incognite (x_1, x_2, λ).

Dividendo la prima per la seconda

$$\underbrace{\frac{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_2}}}_{Pend.C.Indiff} = \underbrace{\frac{p_1}{p_2}}_{Pend.V.Bil} \tag{1}$$

ottengo

$$SMS = -\frac{p_1}{p_2}$$

dove SMS rappresenta la pendenza della curva d'indifferenza e il rapporto fra i prezzi rappresenta la pendenza del vincolo del vincolo di bilancio. L'equazione (1) esprime quindi la condizione di tangenza fra le due curve. Come tale, potrebbe riprodursi per qualunque livello del reddito m e dell'utilità. Il vincolo di bilancio serve ad ancorare tale soluzione al livello di reddito del consumatore, dato.

Per evitare di risolvere il problema di massimo vincolato, si può utilizzare un metodo di soluzione più intuitivo. Possiamo risolvere il problema di *due equazioni*

$$SMS = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

nelle sole *due incognite* $\{x_1, x_2\}$. In questo caso non abbiamo quindi λ.

Procedendo per sostituzione si ottengono le funzioni di domanda dei beni 1 e 2 in funzione dei parametri, prezzi nominali e reddito.

$$x_1(p_1, p_2, m)$$
$$x_2(p_1, p_2, m)$$

Esempio: F. di utilità Cobb-Douglas.

Sia il problema del consumatore

$$\max U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$t.c.\ p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

Siano i parametri (o dati) del problema: $\alpha = 1/4, p_1 = 1, p_2 = 2, m = 8$ e

$$SMS \equiv -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1}$$

Il sistema è

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2}{x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

Dalla prima ricavo

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1$$

e la inserisco nel vincolo di bilancio, ottenendo

$$p_1x_1 + p_2\left[\frac{p_1}{p_2}\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1\right] = m$$

Da cui

$$p_1x_1\left[1+\tfrac{1-\alpha}{\alpha}\right] = m$$
$$p_1x_1\left[\tfrac{\alpha+1-\alpha}{\alpha}\right] = m$$

da cui

$$x_1^* = \alpha\frac{m}{p_1}$$

sostituendo questo in x_2 sopra

$$x_2^* = (1-\alpha)\frac{m}{p_2}$$

Osservazione: ogni funzione di domanda Cobb-Douglas dipende soltanto dal prezzo del bene in questione.

Per gli esempi relativi alle funzioni di domanda derivabili da altre funzioni di utilità si vedano gli appunti in classe e il testo.

5 Esempi di funzioni di utilità e relative funzioni di domanda

1. **Cobb-Douglas:** $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$.

   Costruiamo la trasformata logaritmica, piu' semplice da utilizzare

   $$\ln u(x_1,x_2) = a\ln x_1 + (1-a)\ln x_2.$$

   Sistema

   $$\begin{cases} -\frac{a}{1-a}\frac{x_2}{x_1} = -\frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

   Funzioni di domanda

   $$\begin{cases} x_1^* = a\frac{m}{p_1} \\ x_2^* = (1-a)\frac{m}{p_2} \end{cases}$$

2. **Perfetti sostituti:** $u(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$.**STUDIARE, PERCHE Risk Neutral!**

   Il problema di ottimo

   $$\begin{array}{rcl} \max U(x_1,x_2) & = & ax_1 + bx_2 \\ s.a \quad p_1p_1x_1 + p_2x_2 & = & m \end{array}$$

   $$\max L(x_1,x_2,\lambda) = ax_1 + bx_2 - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m)$$

   $$\begin{array}{rcl} \frac{\partial L}{\partial x_1} & : & a - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} & : & b - \lambda p_2 = 0 \\ p_1x_1 + p_2x_2 & = & m \end{array}$$

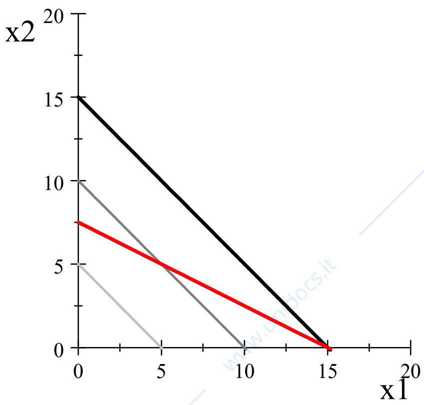
   Come evidente la derivata di una funzione lineare fa sparire le variabile. Cosa vuol dire?

   Consideriamo il caso $a = b = 1$. La funzione di utilità lineare mostra che i due beni sono perfetti sostituti (es. penna nera e penna blu). Se uno dei due beni costa meno, si compra solo quello.

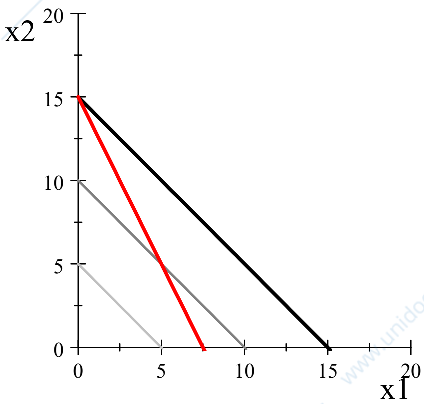
Al solito dividiamo CPO1/CPO2 e si ottiene il sistema. L'unico elemento interessante è valutare se il rapporto fra le utilità maginali, in questo caso $UM_1 = a, UM_2 = b$ è maggiore, uguale o minore al rapporto fra i prezzi.

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \gtreqless \frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

Nel grafico il fascio delle curve di indifferenza, curve di isolivello per livelli crescenti dell'utilità) è indicato in sfumature di grigio, mentre il vincolo di bilancio è indicato in rosso.



Es.1. $m = 15$; $a = b = 1$; $p_1 = 1, p_2 = 2$; $x_1^* = m/p_1$



Es.2. $m = 15$; $a = b = 1$; $p_1 = 2, p_2 = 1$; $x_2^* = m/p_2$

Funzioni di domanda

Esempio 1. $m = 15$; $a = b = 1$; $p_1 = 1, p_2 = 2$; $x_1^* = m/p_1$, $x_2^* = 0$.

$$x_1^* = \ m/p_1, \quad \text{poiché } 1 > 1/2$$

$$x_2^* = \ 0, \quad \text{poiché } 1 > 1/2$$

Esempio 2. $m = 15$; $a = b = 1$; $p_1 = 2, p_2 = 1$; $x_2^* = m/p_2, x_1^* = 0$.

$$x_2^* = \ m/p_2, \quad \text{poiché } 1 < 2$$

$$x_1^* = \ 0, \quad \text{poiché } 1 < 2$$

Ovvero banalmente si spenderà l'intero reddito m per comprare il bene meno caro.

Nel caso $a/b = p_1/p_2$, qualunque paniere (punto $x^* = (x_1, x_2)$) lungo il vincolo di bilancio è indifferente, perché i due beni sono perfettamente sostituti ed hanno lo stesso prezzo. Come si scrive? Si scrive ricavando il VB per x_1 o x_2.

$$x_1^* = \begin{cases} 0 & \text{se } a/b < p_1/p_2 \\ ... & \text{se } a/b = p_1/p_2 \\ m/p_1, & \text{se } a/b > p_1/p_2 \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} m/p_2, & \text{se } a/b < p_1/p_2 \\ ... & \text{se } a/b = p_1/p_2 \\ 0 & \text{se } a/b > p_1/p_2 \end{cases}$$

3. (NO) **Perfetti complementi:** $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$

   Es. $a = b = 1$. Supponiamo di avere $x_1 = 1$ scarpe destre e $x_2 = 2$ scarpe sinistre. Dunque la nostra utilità dipenderà solo dal paio completo di scarpe. Dunque se $x_1 < x_2$, in equilibrio il "paio" di scarpe x dovrà essere pari al minore dei due x_i. Ovvero $x = x_1 < x_2$. Prendiamo la quantità che abbiamo minima, poiché rappresenta il massimo "paio di scarpe possibile" e la sostituiamo nel vicolo di bilancio

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_1 &= m \\ p_1x + p_2x &= m \end{aligned}$$

   I due vincoli di bilancio sono equivalenti perché in realtà noi vogliamo sapere quanto ci costa "il paio" di scarpe, x. Dunque, la domanda per il "paio" di scarpe sarà

$$x = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

   Es. Coefficienti a e b diversi da 1. La combinazione sia $a = 2$ cucchiaini di caffè e $b = 1$ tazza di caffè. Si ripete il ragionamento. Supponiamo sia $ax_1 < bx_2$. Allora $x_1 < \frac{b}{a}x_2$ e dunque in equilibrio deve essere $x_1 = \frac{b}{a}x_2$. sostituisco nel vincolo di bilancio

$$\begin{aligned} p_1\left(\frac{b}{a}x_2\right) + p_2x_2 &= m \\ p_1\left(\frac{b}{a}x\right) + p_2x &= m \end{aligned}$$

   e dunque la combinazione "caffè con zucchero" costa

$$x = \frac{m}{p_1\frac{b}{a} + p_2}$$

   Es. Cosa succede se $bx_2 < ax_1$?

4. x_2 **male** : $u(x_1, x_2) = ax_1 - bx_2$

   Sistema

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$

   Funzioni di domanda

$$x_1^* = \begin{cases} ... & \text{se } a/b < p_1/p_2 \\ ... & \text{se } a/b = p_1/p_2 \\ ... & \text{se } a/b > p_1/p_2 \end{cases}$$

$$x_2^* = \begin{cases} ... & \text{se } a/b < p_1/p_2 \\ ... & \text{se } a/b = p_1/p_2 \\ ... & \text{se } a/b > p_1/p_2 \end{cases}$$

5. x_2 **neutrale**: $u(x_1, x_2) = ax_1$. Le rette d'indifferenza sono rette verticali.
   la funzione di domanda è:
   $$x_1 = \frac{m}{p_1}$$
   tutto il reddito è speso nel solo bene interessante.
6. **Quasi-lineare**: Es. $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$.
   $$SMS = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$
   Sistema
   $$\begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = -\frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{cases}$$
   Funzioni di domanda
   $$\begin{cases} x_1^* = \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \\ x_2^* = \left(m - \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right)/p_2 \end{cases}$$
7. **Funzioni con sazietà**: $u(x_1, x_2) = paraboloide$. Le curve d'indifferenza sono curve concentriche.
   La domanda è come per la Cobb-Douglas per i panieri inferiori alla sazietà. Come immaginate che sia risolto il problema per panieri che diano utilità maggiore della sazietà?

6 Variazione della domanda al variare del reddito.

La variazione della domanda al variare del reddito si studia in due grafici: il primo disegnato nel piano (x_1, x_2), l'altro nel piano (x_i, m) per $i = 1, 2$.

Nel piano (x_1, x_2), congiungendo i punti di scelta ottima al variare di m si ottiene il "sentiero di espansione del reddito" o "curva reddito-consumo".

Nel piano (x_i, m) riportando gli stessi punti otteniamo una curva che si chiama "curva di Engel".

Si vedano gli esempi sugli appunti di classe e su Varian cap.6.

Cosa è importante sapere?

Le funzioni di utilità e il tipo di beni sottostanti danno luogo a curve di Engel che possono appartenere a tre distinti tipi:

1. *Lineari*. Ovvero al crescere del reddito, il consumo del bene mantiene la stessa proporzione (qualsiasi essa sia).
   - Quindi la curva di Engel è una retta con pendenza *costante*.
   - I beni che danno luogo a questo tipo di comportamento sono detti **beni normali**.
   - Le **preferenze** che danno luogo a questo tipo di comportamento sono dette **omotetiche**.
2. Il consumo del bene *aumenta meno che proporzionalmente* al crescere del reddito.
   - Quindi la curva di Engel è una curva con pendenza *crescente* se abbiamo x_i sulle ascisse e m sulle ordinate.
   - I beni che danno luogo a questo tipo di comportamento sono detti **beni necessari o di sussistenza.**
   - Le **preferenze** che danno luogo a questo tipo di comportamento sono dette **non omotetiche**.
3. Il consumo del bene *aumenta più che proporzionalmente* al crescere del reddito.
   - Quindi la curva di Engel è una curva con pendenza *decrescente* se abbiamo x_i sulle ascisse e m sulle ordinate.
   - I beni che danno luogo a questo tipo di comportamento sono detti **beni di lusso.**
   - Le **preferenze** che danno luogo a questo tipo di comportamento sono dette **non omotetiche**.

7 Variazione della domanda al variare dei prezzi.

La variazione della domanda al variare dei prezzi si studia in due grafici: il primo disegnato nel piano (x_1, x_2), l'altro nel piano (x_i, p_i) per $i = 1, 2$.

Nel piano (x_1, x_2) , congiungendo i punti di scelta ottima al variare di uno dei due prezzi si ottiene la "**curva prezzo-consumo**".

Nel piano (x_i, p_i) riportando gli stessi punti otteniamo una curva che si chiama **"curva di domanda"**.

Si vedano gli esempi sugli appunti di classe e su Varian cap.6.

Cosa puo' succedere?

1. Se, al crescere del prezzo di un bene, la sua domanda diminuisce, e viceversa, si tratta di **beni normali.**
2. Se, al contrario, al diminuire del prezzo di un bene la sua domanda diminuisce, (perchè il consumo di quel bene viene sostituito dal consumo di un altro bene preferito), il bene viene detto **bene inferiore o bene di Giffen.**

8 Equazione di Slutsky

Quando varia il prezzo di un bene p_i, la domanda di quel bene x_i varia per due ragioni:

1. perché è variato il saggio al quale si può scambiare il bene,
2. perché è variato il potere d'acquisto complessivo del reddito posseduto.

Dunque l'effetto totale si puo' scomporre nella somma algebrica di due effetti:

1. L'**effetto sostituzione**, dovuto al primo motivo.

   In questo si fanno variare i prezzi relativi, ma si aggiusta m verso un livello di reddito "fittizio", che chiamiamo m' , cosi' da mantenere costante il potere d'acquisto. Riassumendo

   - prezzo relativo varia,
   - potere d'acquisto costante.

   Graficamente questo è espresso dalla rotazione del vincolo di bilancio. Il nuovo vincolo di bilancio deve rispettare le due nuove intercette $\left(m'/p'_1; m'/p'_2\right)$

2. L'**effetto reddito**, dovuto al secondo motivo.

   In questo si fa variare il potere d'acquisto tenendo i prezzi costanti. Non è rilevante se si considera la coppia di prezzi iniziali o la coppia di prezzi finali. Varian tratta i prezzi finali. Quindi l'effetto reddito si studia nel variare del reddito da m' fittizio, fino al livello iniziale, m. Riassumendo

   - prezzo relativo costante,
   - potere d'acquisto variabile, pari a $m - m'$.

   Graficamente questo è espresso dallo spostamento parallelo del vincolo di bilancio. Il vincolo di bilancio deve spostarsi dalla posizione $\left(m'/p'_1; m'/p'_2\right)$ verso la posizione $\left(m/p'_1; m/p'_2\right)$, in cui appunto i prezzi sono fermi al livello finale e il reddito varia.

8.1 Metodo di calcolo

Supponiamo di avere già calcolato le funzioni di domanda, che chiamiamo nel caso generale

$$x_1\left(p_1, p_2, m\right)$$

$$x_2\left(p_1, p_2, m\right)$$

La **scelta iniziale**, che chiamiamo PUNTO A inserirà nelle funzioni i seguenti parametri

$$\mathbf{A} = \begin{cases} x_1\left(p_1, p_2, m\right) \\ x_2\left(p_1, p_2, m\right) \end{cases}$$

Poi facciamo variare il solo prezzo p_1 in $p_1^{'}$. Otteniamo la **scelta finale** che chiamiamo PUNTO C:

$$\mathbf{C} = \begin{cases} x_1\left(p_1', p_2', m\right) \\ x_2\left(p_1', p_2', m\right) \end{cases}$$

Per scomporre l'effetto sostituzione dall'effetto reddito, dobbiamo calcolare l'allocazione fittizia PUNTO B, in cui il reddito m' è tale da mantenere costante il potere d'acquisto della scelta A, ma ai nuovi prezzi. Questo si traduce nel costruire (e disegnare) un nuovo vincolo di bilancio caratterizzato dalla capacità di comprare il paniere A. Questo vuol dire che il vincolo di bilancio che determina il punto B avrà come termine di destra il valore m', definito come

$$m' = p_1' x_1\left(p_1, p_2, m\right) + p_2' x_2\left(p_1, p_2, m\right)$$

ovvero

$$m' \equiv p_1' x_1^A + p_2' x_2^A$$

ne risulta che il vincolo di bilancio "fittizio" avrà equazione

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1' x_1^A + p_2' x_2^A \tag{2}$$

Il sistema che definisce la scelta ottima, ovvero la curva d'indifferenza tangente al vincolo di bilancio (2) è

$$SMS = -\frac{p_1'}{p_2'}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m'$$

la cui soluzione è rappresentata dall'allocazione PUNTO B

$$\mathbf{B} = \begin{cases} x_1\left(p_1', p_2', m'\right) \\ x_2\left(p_1', p_2', m'\right) \end{cases}$$

La figura è tratta da [1].

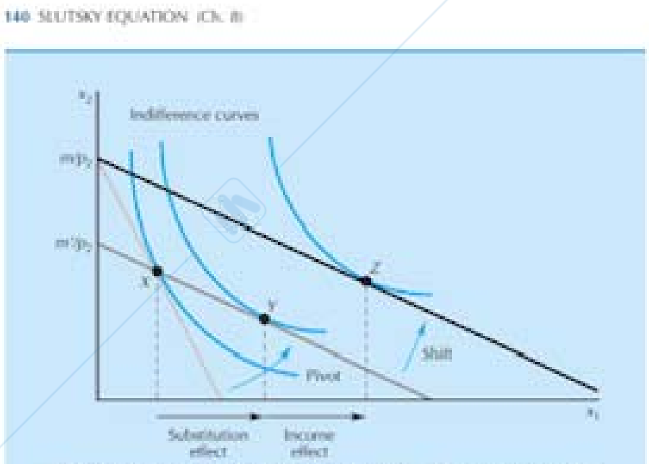


Figure 8.2 **Substitution effect and income effect.** The pivot gives the substitution effect, and the shift gives the income effect.

8.1.1 Esempio. Cobb Douglas

Quando avete le funzioni di domanda è sufficiente sostituire i giusti parametri, ovvero i prezzi iniziali o i prezzi finali, e la giusta definizione di reddito, per determinare i diversi punti. Dunque, avendo

$$\begin{array}{l} x_1 = \alpha \frac{m}{p_1} \\ x_2 = (1-\alpha)\frac{m}{p_2} \end{array}$$

Otterremo

$$\mathbf{A} = \begin{cases} x_1(p_1, p_2, m) = \alpha \frac{m}{p_1} \\ x_2(p_1, p_2, m) = (1-\alpha)\frac{m}{p_2} \end{cases}$$

$$\mathbf{C} = \begin{cases} x_1(p_1', p_2', m) = \alpha \frac{m}{p_1'} \\ x_2(p_1', p_2', m) = (1-\alpha)\frac{m}{p_2'} \end{cases}$$

$$\mathbf{B} = \begin{cases} x_1(p_1', p_2', m') = \alpha \frac{m'}{p_1'} \\ x_2(p_1', p_2', m') = (1-\alpha)\frac{m'}{p_2'} \end{cases}$$

9 Equazione di Slutsky

L'**effetto sostituzione** è dunque dato dalla differenza fra il punto B ed il punto A per ciascuna coordinata. Ovvero

$$\Delta x^s \stackrel{def}{=} [B - A]$$

quindi

$$\Delta x_1^s \stackrel{def}{=} x_1\left(p_1', p_2', m'\right) - x_1(p_1, p_2, m)$$

e

$$\Delta x_2^s \stackrel{def}{=} x_2\left(p_1', p_2', m'\right) - x_2(p_1, p_2, m)$$

L'**effetto reddito** è invece dato dalla differenza fra il punto C ed il punto B per ciascuna coordinata. Ovvero

$$\Delta x^n \stackrel{def}{=} [C - B]$$

quindi

$$\Delta x_1^n \stackrel{def}{=} x_1\left(p_1', p_2', m\right) - x_1\left(p_1', p_2', m'\right)$$

e

$$\Delta x_2^n \stackrel{def}{=} x_2\left(p_1', p_2', m\right) - x_2\left(p_1', p_2', m'\right)$$

La variazione complessiva della domanda (o equazione di Slutsky) è data quindi dalla somma dell'effetto sostituzione e dell'effetto reddito.

$$\Delta x_i^{TOT} = \Delta x_i^s + \Delta x_i^n$$

9.1 Segno della variazione totale

Il segno della variazione totale dipende, ovviamente, dalla somma algebrica dei segni degli effetti di sostituzione e reddito.

- Il **segno dell'effetto di sostituzione** è *sempre inverso al segno della variazione del prezzo relativo.*

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta(p_i/p_j)} \leq 0$$

  Ovvero, se ad un certo prezzo p_1 era stata scelta la quantità x_1, al crescere del prezzo non vi è ragione di sceglierne una quantità maggiore. Inoltre, seppure il prezzo del bene in questione non è variato, ma il prezzo dell'altro bene è diminuito, il prezzo relativo p_i/p_j è comunque aumentato.

- Il **segno dell'effetto reddito** invece puo' essere sia concorde che inverso rispetto al segno della variazione di prezzo. Supponendo $\Delta\left(p_i/p_j\right) > 0$:

  1. per i *beni normali* $\Rightarrow$ *segno negativo*,
     ovvero al crescere del prezzo la domanda diminuisce,
  2. per i *beni inferiori* $\Rightarrow$ *segno positivo*,
  3. per i *beni inferiori di Giffen* $\Rightarrow$ *segno positivo "grande"*, ovvero tale da piu' che compensare l'effetto di sostutuzione negativo.

9.1.1 Esempio numerico

	Δx_i^{TOT}	$= \Delta x_i^s$	$+\Delta x_i^n$
Beni normali	(-8)	$= (-5)$	(-3)
Beni inferiori	(-3)	$= (-5)$	$(+2)$
Beni Giffen	$(+2)$	$= (-5)$	$(+7)$

10 Scelta del consumatore avente "dotazione"

La dotazione dell'agente non è piu' espressa in termini monetari, dal valore m, ma è esplicitamente funzione della quantità di beni posseduti, moltiplicati per i prezzi dati.

DEF. **Dotazione.** E' il paniere di beni posseduto dall'agente. Si tratta del vettore $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ che esprime la quantità del bene 1 e la quantità del bene 2, possedute. Il paniere è un punto nel grafico a due dimensioni, che ha sull'asse delle ascisse la quantità del bene 1, x_1, e sull'asse delle ordinate la quantità del bene 2, x_2.

Il vincolo di bilancio che ne deriva è

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$

Per disegnarlo, possiamo continuare a chiamare il termine destro dell'equazione come m e procedere come al solito, ricavando x_2 in funzione di x_1. Come risultato abbiamo che il vincolo di bilancio è una retta passante per il punto ω avente pendenza pari a $(-p_1/p_2)$.

DEF. **Domanda lorda** $= x_i$

DEF. **Domanda netta** $= (x_i - \omega_i) > 0$,

DEF. **Offerta netta** $= (x_i - \omega_i) < 0$.

10.1 Variazioni di $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ e prezzi costanti

Per l'aumento della dotazione di almeno un bene ω_1 e/o ω_2 il vincolo di bilancio si sposta verso l'esterno (E' ovvio: se possiedo una quantità maggiore di almeno un bene, a prezzi costanti, sono piu' "ricco".) e viceversa.

10.2 Variazione dei prezzi e dotazione costante: Eq. di Slutsky con reddito di dotazione

Qual'è la novità? Al variare dei prezzi, varia il *"valore"* della mia dotazione.

Il problema di scelta del consumatore

$$\max U(x_1, x_2)$$
$$t.c.\ p_1x_1 + p_2x_2 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$

si risolve, al solito, risolvendo il sistema di due equazioni nelle due incognite x_1 e x_2

$$\begin{cases} SMS = -\frac{p_1}{p_2} \\ p_1x_1 + p_2x_2 = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 \end{cases}$$

Es. Se la funzione di utilità è Cobb-Douglas le funzioni di domanda restano funzioni del "reddito", inteso come termine di destra del vincolo di bilancio. Facendo i passaggi (si veda il metodo usato nel primo paragrafo) si ottiene

$$x_1^* = \alpha \frac{(p_1\omega_1 + p_2\omega_2)}{p_1}$$

$$x_2^* = (1-\alpha)\,\frac{(p_1\omega_1 + p_2\omega_2)}{p_2}$$

Pertanto se, per comodità di analisi e di calcolo, continuo a chiamare m il termine di destra del vincolo di bilancio, le funzioni di domanda restano le stesse.

Partiamo da una scelta ottima iniziale definita dal punto A, che rappresenta la scelta ottima rispetto al vincolo di bilancio che passa per la dotazione ω ai prezzi iniziali.

Al variare di almeno un prezzo, il vincolo di bilancio varia la pendenza verso la pendenza $(-p_1'/p_2')$. Si ottiene un vincolo di bilancio passante per la dotazione ω ai prezzi finali. La scelta finale ottima D rispetto al vincolo di bilancio calcolato ai nuovi prezzi.

Nel passare dal punto A al punto D possono essere isolati i seguenti tre effetti (per il primo riporto quanto già detto precedentemente:

1. L'**effetto sostituzione**, dovuto al variare del saggio di scambio fra i beni.

   In questo si fanno variare i prezzi relativi, ma si aggiusta m verso un livello di reddito "fittizio", che chiamiamo m' , cosi' da mantenere costante il potere d'acquisto. Riassumendo

   - prezzo relativo varia,
   - potere d'acquisto costante.

   Graficamente questo è espresso dalla rotazione del vincolo di bilancio, facendo perno nella scelta iniziale A. Il nuovo vincolo di bilancio deve rispettare le due nuove intercette $\left(m'/p_1'; m'/p_2'\right)$ dove

   $$m' = p_1' x_1^A + p_2' x_2^A$$

2. L'**effetto reddito ordinario**, dovuto alla variazione del potere d'acquisto del reddito espresso dalla dotazione iniziale, m. Se varia soltanto *un* prezzo, il vincolo di bilancio ruoterà facendo perno nell'intercetta m/p_i dove i è il bene il cui prezzo non è variato. Piu' in generale, graficamente, questo effetto è espresso dallo spostamento parallelo del vincolo di bilancio dalla posizione $\left(m'/p_1'; m'/p_2'\right)$ (in cui la scelta ottima è il punto B) verso la posizione $\left(m/p_1'; m/p_2'\right)$ (ovvero il punto C), in cui appunto i prezzi sono fermi al livello finale e il reddito varia.

   Riassumendo

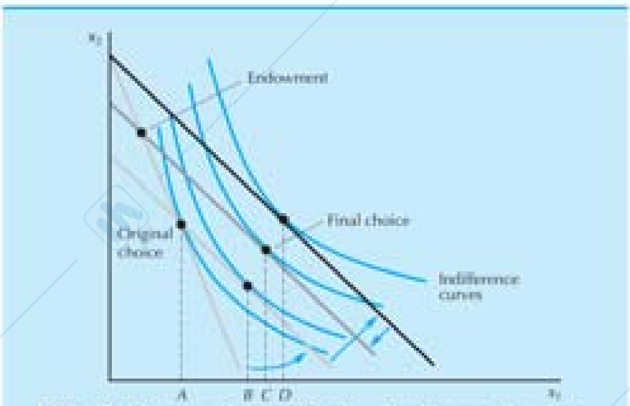
   - prezzo relativo costante,
   - potere d'acquisto della dotazione iniziale, varia, perchè variano i prezzi.

3. L'**effetto reddito di dotazione,** esprime la variazione del potere d'acquisto della dotazione. Il nuovo potere d'acquisto della dotazione è costituito dal valore della dotazione ai nuovi prezzi, ovvero da

   $$m'' \overset{def}{=} p_1'\omega_1 + p_2'\omega_2$$

   Il vincolo di bilancio che definisce la scelta ottima relativa (**Punto D**) *passa per la dotazione ω ai nuovi prezzi* (p_1', p_2').

Per le figure si veda [1], cap. 9, fra cui la seguente.



The Slutsky equation revisited. Breaking up the effect of the price change into the substitution effect (A to B), the ordinary income effect (B to D), and the endowment income effect (D to C).

Figure 9.7

10.3 Metodo di calcolo

Supponiamo di avere già calcolato le funzioni di domanda. Affianco al caso generale l'esempio delle funzioni di domanda Cobb Douglas per chiarezza espositiva e per mostrare che, avendo le funzioni di domanda, è sufficiente sostituire i giusti parametri, ovvero i prezzi iniziali o i prezzi finali, e la giusta definizione di reddito, m, m' o m'', per determinare i diversi punti.

$$x_1(p_1, p_2, m) = \alpha \frac{m}{p_1}$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = (1 - \alpha) \frac{m}{p_2}$$

La **scelta iniziale**, che chiamiamo **PUNTO A** inserirà nelle funzioni i seguenti parametri

$$\mathbf{A} = \begin{cases} x_1(p_1, p_2, m) = \alpha \frac{m}{p_1} \\ x_2(p_1, p_2, m) = (1 - \alpha) \frac{m}{p_2} \end{cases}$$

Poi facciamo variare i prezzi: p_1 in $p_1^{'}$ e p_2 in p_2'. Otteniamo la **scelta finale** che chiamiamo **PUNTO D** che passerà per la dotazione ai nuovi prezzi. La dotazione ai nuovi prezzi è espressa da

$$m'' \stackrel{def}{=} p_1' \omega_1 + p_2' \omega_2$$

da cui

$$\mathbf{D} = \begin{cases} x_1(p_1', p_2', m'') = \alpha \frac{m''}{p_1'} \\ x_2(p_1', p_2', m'') = (1 - \alpha) \frac{m''}{p_2'} \end{cases}$$

Per scomporre l'effetto sostituzione dall'effetto reddito, dobbiamo calcolare l'allocazione fittizia **PUNTO B**, in cui il reddito m' è tale da mantenere costante il potere d'acquisto della scelta A, ma ai nuovi prezzi. Questo si traduce nel costruire (e disegnare) un nuovo vincolo di bilancio caratterizzato dalla capacità di comprare il paniere A. Questo vuol dire che il vincolo di bilancio che determina il punto B avrà come termine di destra il valore m', definito come

$$m' = p_1' x_1(p_1, p_2, m) + p_2' x_2(p_1, p_2, m)$$

ovvero

$$m' \equiv p_1' x_1^A + p_2' x_2^A$$

ne risulta che il vincolo di bilancio "fittizio" avrà equazione

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1' x_1^A + p_2' x_2^A \tag{3}$$

Il sistema che definisce la scelta ottima, ovvero la curva d'indifferenza tangente al vincolo di bilancio (3) è

$$\begin{cases} SMS = -\frac{p_1'}{p_2'} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m' \end{cases}$$

la cui soluzione è rappresentata dall'allocazione PUNTO B

$$\mathbf{B} = \begin{cases} x_1\left(p_1', p_2', m'\right) = \alpha \frac{m'}{p_1'} \\ x_2\left(p_1', p_2', m'\right) = (1-\alpha)\frac{m'}{p_2'} \end{cases}$$

L'effetto reddito ordinario è espresso dal passaggio da A a C. Il punto C è calcolato analogamente al caso Slutsky senza dotazione. Pertanto è

$$\mathbf{C} = \begin{cases} x_1\left(p_1', p_2', m\right) = \alpha \frac{m}{p_1'} \\ x_2\left(p_1', p_2', m\right) = (1-\alpha)\frac{m}{p_2'} \end{cases}$$

11 Equazione di Slutsky con effetto reddito di dotazione

L'**effetto sostituzione** è dunque dato dalla differenza fra il punto B ed il punto A per ciascuna coordinata. Ovvero

$$\Delta x^s \overset{def}{=} [B - A]$$

quindi

$$\Delta x_1^s \overset{def}{=} x_1\left(p_1', p_2', m'\right) - x_1\left(p_1, p_2, m\right)$$

e

$$\Delta x_2^s \overset{def}{=} x_2\left(p_1', p_2', m'\right) - x_2\left(p_1, p_2, m\right)$$

L'**effetto reddito ordinario** è invece dato dalla differenza fra il punto C ed il punto B per ciascuna coordinata. Ovvero

$$\Delta x^n \overset{def}{=} [C - B]$$

quindi

$$\Delta x_1^n \overset{def}{=} x_1\left(p_1', p_2', m\right) - x_1\left(p_1', p_2', m'\right)$$

e

$$\Delta x_2^n \overset{def}{=} x_2\left(p_1', p_2', m\right) - x_2\left(p_1', p_2', m'\right)$$

Bisogna aggiungere l'effetto reddito di dotazione che è dato dalla differenza fra il punto D ed il punto C.

L'**effetto reddito di dotazione** è invece dato dalla differenza fra il punto D ed il punto C per ciascuna coordinata. Ovvero

$$\Delta x^{dot} \overset{def}{=} [D - C]$$

quindi

$$\Delta x_1^{dot} \overset{def}{=} x_1\left(p_1', p_2', m''\right) - x_1\left(p_1', p_2', m\right)$$

e

$$\Delta x_2^{dot} \overset{def}{=} x_2\left(p_1', p_2', m''\right) - x_2\left(p_1', p_2', m\right)$$

La variazione complessiva della domanda (o equazione di Slutsky) è data quindi dalla somma dell'effetto sostituzione, dell'effetto di reddito ordinario e dell'effetto reddito di dotazione

$$\Delta x_i^{TOT} = \Delta x_i^s + \Delta x_i^n + \Delta x_i^{dot}$$

L'effetto reddito complessivo è dato dalla somma algebrica degli ultimi due termini ed ha segno variabile a seconda

- della natura del bene,
- del fatto che l'agente sia acquirente o venditore netto del bene.

12 Applicazione: Scelta Intertemporale

Il consumatore deve scegliere fra consumo presente c_0 e consumo futuro c_1.

La dotazione $\omega = (\omega_0, \omega_1)$ rappresenta la dotazione di moneta in ciascun periodo.

La scelta è invece (c_0, c_1).

Se $(\omega_0 - c_0) > 0$, il consumatore è un risparmiatore netto nel primo periodo, versa il proprio risparmio in banca o lo da in prestito. Nel successivo periodo ottiene un reddito monetario aggiuntivo di $(\omega_0 - c_0)(1 + r)$ oltre alla dotazione ω_2.

Se invece $(\omega_0 - c_0) < 0$, il consumatore prenderà in prestito tale ammontare di denaro nel primo periodo, e il periodo successivo dovrà pagare alla banca $(\omega_0 - c_0)(1 + r)$.

Il problema di scelta è la massimizzazione della funzione di utilità soggetta ai due vincoli di bilancio correnti

$$\max_{c_0, c_1} U(c_0, c_1)$$

$$s.a \qquad p_0 c_0 + s = p_0 \omega_0 \qquad VB0$$

$$p_1 c_1 = p_1 \omega_1 + s(1 + r) \qquad VB1$$

dove s =risparmio. Si risolve s da $VB1$

$$s = \frac{p_1 c_1}{1 + r} - \frac{p_1 \omega_1}{1 + r}$$

e lo si inserisce nel $VB0$, ottenenendo il "Vincolo di Bilancio Intertemporale" VBI

$$p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{1 + r} = p_0 \omega_0 + \frac{p_1 \omega_1}{1 + r}$$

12.1 Caso semplice

Ipotesi: il prezzo del bene di consumo è costante nei due periodi: $p_0 = p_1 = 1$.

Il vincolo di bilancio puo' essere scritto indifferentemente in termini di valore presente, ovvero scontato a oggi

$$p_0 c_0 + \frac{p_1}{1 + r} c_1 = p_0 \omega_0 + \frac{p_1}{1 + r} \omega_1 \qquad (4)$$

o in termini di valore futuro

$$p_0 c_0 (1 + r) + p_1 c_1 = p_0 \omega_0 (1 + r) + p_1 \omega_1 \qquad (5)$$

Volendo ridurre questi vincoli ai vincoli tradizionali dobbiamo capire quali sono i "prezzi" del bene di consumo in ogni periodo.

Definizione 10 *I "prezzi" del bene di consumo in ogni periodo, P_t, sono costituiti da tutto ciò che moltiplica c_t.*

1. *In termini di valore presente, considerando il vincolo* (4) *si ha:*

$$P_0 = p_0; \qquad P_1 = \frac{p_1}{1 + r}$$

2. *Viceversa, in termini di valore futuro, considerando il vincolo* (5) *si ha:*

$$P_0 = p_0(1 + r); \qquad P_1 = p_1$$

1. *Nel caso del vincolo in termini di valore presente, il prezzo complessivo del consumo del primo periodo, che chiamo* $P_0 = 1$, *mentre il prezzo complessivo del consumo del secondo periodo, che chiamo* $P_1 = p_1/(1+r)$. *La pendenza del vincolo di bilancio risulta quindi*

$$-\frac{P_0}{P_1} = -\frac{p_0}{\frac{p_1}{(1+r)}} = -\frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

NB. Se $p_0 = p_1 = 1$, *ovvero il livello dei prezzi è costante, la pendenza del vincolo di bilancio è semplicemente* $(1+r)$. *Ovvero il prezzo relativo del futuro rispetto al presente è* $(1+r)$.

2. *Nel caso del vincolo in termini di valore futuro, il prezzo complessivo del consumo del primo periodo, che chiamo* $P_0 = p_0(1+r)$, *mentre il prezzo complessivo del consumo del secondo periodo, che chiamo* $P_1 = p_1$. *La pendenza del vincolo di bilancio risulta quindi*

$$-\frac{P_0}{P_1} = -\frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

I due vincoli sono pertanto equivalenti. Nel seguito opteremo per il vincolo in valore presente.
Consideriamo il seguente problema di scelta

$$\max U(c_0, c_1) = \alpha \ln c_0 + (1-\alpha) \ln c_1$$

$$t.c. \quad p_0 c_0 + \frac{p_1}{1+r} c_1 = p_0 \omega_0 + \frac{p_1}{1+r} \omega_1$$

Consideriamo il Lagrangiano e deriviamo per Il sistema per la soluzione

$$\begin{cases} SMS = -\frac{p_0}{p_1}(1+r) \\ p_0 c_0 + \frac{p_1}{1+r} c_1 = p_0 \omega_0 + \frac{p_1}{1+r} \omega_1 \end{cases}$$

Le definizioni di "reddito" (i.e. membro di destra del vincolo di bilancio) per applicare l'equazione di Slutsky sono

Le definizioni di "reddito" sono

$$m = p_0 \omega_0 + \frac{p_1}{1+r} \omega_1$$

$$m' = p_0' c_0^A + \frac{p_1' c_1^A}{1+r'}$$

$$m'' = p_0' \omega_0 + \frac{p_1' \omega_1}{1+r'}$$

12.2 Inflazione

Ipotesi: $p_1 = p_0 \left(1 + \dot{p}\right)$.

Il prezzo del bene nel secondo periodo è pari al prezzo del bene nel primo periodo, p_1, aumentato del tasso d'inflazione, $\dot{p}$. Il tasso d'inflazione è definito come tasso di variazione dei prezzi, ovvero

$$\dot{p} = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$$

Il vincolo di bilancio diventa

$$p_0 c_0 + \frac{p_0 \left(1 + \dot{p}\right)}{1+r} c_1 = p_0 \omega_0 + \frac{p_0 \left(1 + \dot{p}\right)}{1+r} \omega_1$$

Si può eliminare p_0 e chiamare il termine

$$\frac{1+\pi}{1+r} \stackrel{def}{=} \frac{1}{1+\rho}$$

dove $\rho =$ tasso d'interesse reale, il quale è circa uguale a $(r - \pi)$.

Il problema torna ad essere quello del caso semplice in cui sostituiamo il tasso d'interesse reale al tasso d'interesse nominale.

12.3 Calcolo punti per l'equazione di Slutsky

Siano le funzioni di domanda espresse nei "prezzi complessivi" P_1 e P_2

$$c_1(P_1, P_2, m) = \alpha \frac{m}{P_1}$$

$$c_2(P_1, P_2, m) = (1-\alpha)\frac{m}{P_2} = (1-\alpha)\frac{m}{\frac{p_2}{1+r}} = (1-\alpha)\frac{m}{p_2}(1+r)$$

tuttavia per omogeneità espositiva, manterremo le formule in P_1 e P_2, considerando che lo studente applichi ogni volta la definizione di essi adatta.

La **scelta iniziale**, **PUNTO A**

$$\mathbf{A} = \begin{cases} c_1(P_1, P_2, m) = \alpha \frac{m}{P_1} \\ c_2(P_1, P_2, m) = (1-\alpha)\frac{m}{P_2} \end{cases}$$

Poi facciamo variare i prezzi: P_1 in P_1' e P_2 in pP. Otteniamo la **scelta finale** che chiamiamo **PUNTO D** che passerà per la dotazione ai nuovi prezzi.

$$\mathbf{D} = \begin{cases} c_1(P_1', P_2', m'') = \alpha \frac{m''}{P_1'} \\ c_2(P_1', P_2', m'') = (1-\alpha)\frac{m''}{P_2'} \end{cases}$$

ruotando il vincolo di bilancio facendo perno nel punto A otteniamo

$$\mathbf{B} = \begin{cases} c_1(P_1', P_2', m') = \alpha \frac{m'}{P_1'} \\ c_2(P_1', P_2', m') = (1-\alpha)\frac{m'}{P_2'} \end{cases}$$

Infine ruotando il vincolo di bilancio in modo da farlo passare per le intercette

$$\left(\frac{m}{P_1'}, \frac{m}{P_2'}\right)$$

otteniamo la scelta C

$$\mathbf{C} = \begin{cases} c_1(P_1', P_2', m) = \alpha \frac{m}{P_1'} \\ c_2(P_1', P_2', m) = (1-\alpha)\frac{m}{P_2'} \end{cases}$$

References

[1] Varian, H. R. (2014). Intermediate Microeconomics with Calculus: a Modern Approach. WW Norton & Company.

Scelta Sequenziale ed Intertemporale in R2

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Pricing del Prodotti e degli Strumenti Finanziari

February 28, 2021

Abstract

L'obiettivo di questo capitolo è mostrare come la scelta intertemporale in contesto di certezza può essere assimilata ad una normale decisione microeconomica statica. Vengono effettuati gli esercizi di statica comparata sui parametri per individuare gli effetti di sostituzione, reddito e reddito da dotazione.

Abstract

The aim of this chapter is to show how the intertemporal consumption choice can be considered equivalent to a static microeconomic decision. Comparative statics exercises are developed to compute substitution, income and endowment effects.

1 Indice

L'obiettivo di questo capitolo è mostrare come la scelta intertemporale in contesto di certezza può essere assimilata ad una normale decisione microeconomica statica. Vengono effettuati gli esercizi di statica comparata sui parametri per individuare gli effetti di sostituzione, reddito e reddito da dotazione.

- Scelta di portafoglio fra 2 azioni al variare dei prezzi nel tempo.
- Scelta Intertemporale su 2 periodi: $t = 0, 1$.
- Appendice. Esercizio di Scelta Intertemporale per $t = 0, 1$. svolto.

1.1 Notazione per 2 azioni

- Numero di azioni (stocks) da poter comprare $i = 1, 2$. Es. $1 = AMZN$, $2 = GOOGL$.
- Il numero di ogni azione acquistata è $n_i \in R$.
- Un *"paniere di merci"* in questo caso = portafoglio di azioni è' il punto $n = (n_1, n_2) \in R^2$ è il punto di coordinate n_1, n_2 sul piano.

- Il *"prezzo"* di un bene è p_i. Es. p_1 = prezzo dell'azione Amazon, e p_2 = prezzo dell'azione Google. Es. $p_1 = 3$ mila \$, $p_2 = 2$ mila \$.
- I "prezzi di un portafoglio" al tempo t sono il vettore $p_t = (p_{t1}, p_{t2}) \in R^2$.
- Il "vettore della dotazioni" è il numero delle azioni già possedute in apertura di Borsa, $\omega_t = (\omega_{t1}, \omega_{t2})$.
- M_0 = Reddito monetario iniziale.
- $W_t = p_{t1}\omega_1 + p_{t2}\omega_2$ valore del portafoglio.
- t = *unità* di tempo. Es. giorno di Borsa.

Il problema di scelta ha due ingredienti:

1. Funzione obiettivo
2. Vincolo di bilancio.

Definiamo i due ingredienti:

Definizione 1 *Il"Vincolo di bilancio" è definito come*

$$(i) \qquad \underbrace{p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02}}_{spesa} = \underbrace{M_0}_{risorse}$$

$$(ii) \qquad \underbrace{p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02}}_{spesa} = \underbrace{p_{01}\omega_{01} + p_{02}\omega_{02}}_{risorse}$$

(i) Il reddito è definito da un ammontare monetario, non soggetto a variazioni quando variano i prezzi delle azioni.

(ii) Il reddito è definito dal valore delle azioni, soggetto a variazioni quando variano i prezzi delle azioni.

Il vincolo di bilancio si sposta per variazioni del: reddito M, p_{t1}, p_{t2}.

Esercizio 1 *Considerate il seguente vincolo di bilancio*

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 &= m \\ 3x_1 + 2x_2 &= 20 \end{aligned}$$

Calcolate le intercette sugli assi x_1 e x_2 (imponendo una volta $x_1 = 0$, poi $x_2 = 0$)

Disegnatelo su un foglio quadrettato e studiate come si sposta per singole variazioni (una alla volta): $m' = 15, p_1' = 1.5$, $p_{t2}' = 4$.

Come funzione obiettivo, in questo caso, utilizziamo una funzione d'utilità che valuti la "felicità" che otteniamo dal possedere un portafoglio costituito da sole due azioni, nelle quantità n_{t1}, n_{t2} : $U(n_{t1}, n_{t2})$.

Teorema 1 *Se le preferenze soddisfano gli assiomi necessari a definire un ordinamento (l'argomento esula il contenuto di questo corso) allora esiste una funzione di utilità continua $u(\mathbf{x}) : R_+^N \to R$.*

Nel seguito usiamo la funzione di utilità seguente, semplicemente perché ha le derivate più semplici

$$\ln U(n_{t1}, n_{t2}) = a \ln n_{t1} + b \ln n_{t2}$$

Per tutte le referenze alla funzione di utilità si raccomanda Varian Microeconomia (o Intermediate Microeconomics) capp. 1-10.

2 Scelta di portafoglio sequanziale.

Nel seguito consideriamo la scelta fra due beni, in questo caso rappresentati da due azioni, in due tempi successivi: $t = 0, 1$.

In $t = 0$, l'investitore ha una dotazione monetaria. Ai prezzi corenti, decide di comprare le due azioni secondo il metodo della scelta ottima, considerata nel capitolo precedente. In $t = 1$, ivestotore avrà come dotazione la scleta del periodo precedente, la quale, ai nuovi prezzi, creerà un nuovo incolo di bilanzio (vincolo di bilancio passante per il punto di dotazione ai prezzi del periodo $t = 1$, e, sulla base della sua funzione di utilità, valuterà se esiste una scelta migliore della dotazione che già possiede.

Calcoliamo poi cosa sarebbe successo, se l'investitore non avesse comprato le azioni nel periodo $t = 0$, e avesse quindi ancora il reddito monetario nel tempo $t = 1(bis)$ ed effettuasse dunque la sua scelta ottima partendo dal reddito monetario ed essendo i prezzi quelli della data $t = 1$.

2.1 Tempo iniziale $t = 0$.

L'investitore ha a disposizione un reddito monetario $M = 20$ mila €, che vuole utilizzare per comprare due azioni: $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \max_{n_1,n_2} U(n_1, n_2) &= n_{01}^a \cdot n_{02}^{(1-a)} \\ \text{soggetto a} \quad p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02} &= M_0 \qquad (VB0) \end{aligned}$$

$$PB1 : \begin{cases} \max_{n_1,n_2} U(n_1, n_2) = n_{01}^a \cdot n_{02}^{(1-a)} \\ \text{s. a} \quad p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02} = M_0 \qquad (VB0) \end{cases}$$

Per semplificare i calcoli facciamo il logaritmo dela funzione di utilità e risolviamo questo problema:

$$PB2 : \begin{cases} \max_{n_1,n_2} U(n_1, n_2) = a \ln n_{01} + (1-a) \ln n_{02} \\ \text{s. a} \quad p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02} = M_0 \qquad (VB0) \end{cases}$$

2.1.1 Calcolo soluzione

$$\begin{aligned} L &= U(n_1, n_2) - \lambda (VBO) \\ &= a \ln n_{01} + (1-a) \ln n_{02} - \lambda_0 (p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02} - M_0) \end{aligned}$$

Deriviamo il Lagrangiano L per le incognite $n_{01}, n_{02}, \lambda_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial n_{01}} &: \frac{a}{n_{01}} - \lambda_0 p_{01} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial n_{02}} &: \frac{(1-a)}{n_{02}} - \lambda_0 p_{02} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} &: p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02} - M_0 = 0 \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite.
Procediamo per sostituzione:
Mettiamo a rapporto le prime due e ricaviamo n_{02} :

$$\frac{\frac{a}{n_{01}}}{\frac{b}{n_{02}}} = \frac{p_{01}}{p_{02}} \qquad \Longrightarrow \qquad n_{02} = n_{01}\frac{(1-a)}{a}\frac{p_{01}}{p_{02}}$$

lo sostituiamo nel VB0

$$p_{01}n_{01} + p_{02}\left(n_{01}\frac{(1-a)}{a}\frac{p_{01}}{p_{02}}\right) - M_0 = 0$$

risolviamo per n_{01}

$$n_{01}^* = a\frac{M_0}{p_{01}}$$

reinserendolo in n_{01}

$$n_{02}^* = (1-a)\frac{M_0}{p_{02}}$$

Per trovare λ, sostituiamo n_{01} nella prima derivata

$$\lambda^* = \frac{1}{M_0}$$

2.1.2 Soluzioni numeriche

Inseriamo i parametri e **troviamo le soluzioni numeriche.**
Parametri: $p_{01} = 3$ mila \$, $p_{02} = 2$ mila \$, $M_0 = 20$ mila \$.

$$\begin{aligned} n_{01}^* &= 0.5\frac{20}{3} = 3.333 \\ n_{02}^* &= 0.5\frac{20}{2} = 5 \\ \lambda^* &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Vogliamo adesso valutare quanto risulta l'utilità dell'investitore dopo l'acquisto del portafoglio, avente un numero di azioni n_{01}^* azioni Amazon e n_{02}^* azioni Google comprate ai prezzi $p_{01} = 3, p_{02} = 2$, avendo un reddito monetario da spendere interamente, pari a $M_0 = 20$.

$$\begin{aligned} \ln U\left(n_{01}^* n_{02}^* \middle|\, p_{01} = 3, p_{02} = 2, M_0 = 20\right) &= a\ln n_{01}^* + (1-a)\ln n_{02}^* \\ &= \frac{1}{2}\ln 3.334 + \frac{1}{2}\ln 5 = \\ &= 1.4068 \overset{def}{=} \ln U_0 \\ &\Longrightarrow U_0 = \exp(1.4068) = 4.0829 \end{aligned}$$

Il numero U_0 non ha nessun senso quantitativo, ma serve solo a scopi comparativi, ovvero per capire se l'utilità successiva sarà più grande o più piccola. E' un valore "ordinale" soltanto.

Definizione 2 *Il costo e valore del portafoglio, al momento dell'acquisto, è, per costruzione pari al termine di destra del VB.*

$$W(p_{01}, p_{02}) = p_{01}n_{01} + p_{02}n_{02} = 3\cdot\frac{10}{3} + 2\cdot 5 = 20$$

2.1.3 Costruzione grafico

Per fare i grafici sul piano $\{n_1, n_2\}$ dobbiamo esplicitare le funzioni che vogliamo disegnare per la variabile sulle ordinate, in funzione della variabile sulle ascisse, fissando i valori delle altre variabili, ovvero

$$n_{02} = f\left(n_{01} \middle|\, p_{01} = 3, p_{02} = 2, M_0 = 20\right)$$

Dobbiamo mettere in grafico 2 curve: il VB0 esplicitato per n_{02} e la curva di indifferenza (= curva di isolivello della funzione di utilità) corrispondente alla massima utilità ottenuta con questa scelta.

- Grafico di $VB0$, retta color magenta nel grafico sotto

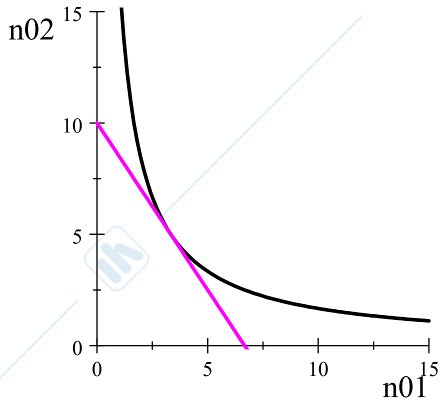
$$\begin{aligned} VB0 \quad : \qquad n_{02} &= \frac{M}{p_{02}} - \frac{p_{01}}{p_{02}} n_{01} \\ = \quad n_{02} &= \frac{20}{2} - \frac{3}{2} n_{01} \end{aligned}$$

NB: Le intercette sui due assi sono rispettivamente: $M/p_{01} = 20/3 = 6.6667$ e $M/p_{02} = 20/2 = 10$,

- Grafico $U\left(n_{01}^*, n_{02}^*\right)$, curva nera nel grafico sotto.

Per disegnare la curva di indifferenza dobbiamo tornare alle variabili non logaritmiche, quindi eleviamo tutta l'equazione

$$\begin{aligned} a \ln n_{01} + b \ln n_{02} \quad = \quad \ln U_0 \quad &\Longrightarrow \quad n_{01}^a n_{02}^{(1-a)} = U_0 \\ &\Longrightarrow \quad n_{02}^{(1-a)} = \left(\frac{U_0}{n_{01}^a}\right) \\ &\Longrightarrow \quad n_{02} = \left(\frac{U_0}{n_{01}^a}\right)^{\frac{1}{1-a}} \\ &\Longrightarrow \quad n_{02} = \left(\frac{4.0837}{n_{01}^{0.5}}\right)^{\frac{1}{1-0.5}} \end{aligned}$$



2.1.4 Variabili conseguenti per $t+1$

Una volta che il denaro M_0 è stato investito negli stocks, dopo la chiusura dei mercati, i miei acquisti di azioni diventano le mie "dotazioni" del giorno dopo. Quindi

- $\omega_{11} = n_{01}$;
- $\omega_{12} = n_{02}$;

Il giorno dopo, all'apertura dei mercati, i prezzi saranno diversi e le mie dotazioni non valgono più M_0, come era il giorno prima quando avevo usato quel denaro per comprare le due azioni, ma

- $M_0 \Longrightarrow$ Reddito da dotazione: $W_1 = p_{11}\omega_{11} + p_{12}\omega_{12} = ?$

A questo nuovo reddito W_1 ed a questi nuovi prezzi (p_{11}, p_{12}), la scelta precedente non è più ottima e comincia un nuovo processo di scelta con i nuovi parametri.

2.2 Tempo: $t = 1$

Le soluzioni teoriche restano le stesse.

2.2.1 Soluzioni numeriche

Supponiamo adesso che il prezzo delle azioni Amazon sia dimezzato! a $p_{11} = 1.5$ mila. Considero variazioni macroscopiche per rendere il grafico

Parametri: $p_{11} = 1.5$ mila \$, $p_{02} = 2$ mila \$, $W_1 = p_{11}\omega_{11} + p_{12}\omega_{12} = 1.5 \cdot 3.333 + 2 \cdot 5 = 15$.

Quindi quello che prima era M adesso è W

$$\begin{aligned} n_{11}^* &= 0.5\frac{15}{1.5} = 5 \\ n_{12}^* &= 0.5\frac{15}{2} = 3.75 \\ \lambda^* &= 1/15 \end{aligned}$$

Vogliamo adesso valutare quanto risulta l'utilità dell'investitore dopo l'acquisto del portafoglio, avente un numero di azioni n_{11}^* azioni Amazon e n_{12}^* azioni Google comprate ai prezzi $p_{01} = 1.5, p_{02} = 2$, avendo un reddito da spendere interamente, pari al valore del portafoglio ai nuovi prezzi

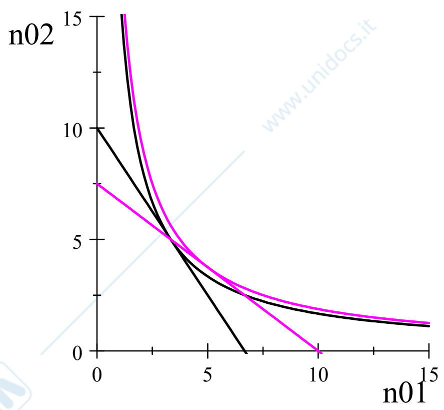
$$W_1 = p_{11}\omega_{11} + p_{12}\omega_{12} = 1.5 \cdot 5 + 2 \cdot 3.75 = 15.$$

$$\begin{aligned} \ln U\left(n_{01}^* n_{02}^* \middle|\, p_{11} = 1.5, p_{12} = 2, W_1 = 15\right) &= a \ln n_{11}^* + (1-a)\ln n_{12}^* \\ &= \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3.75 = \\ &= 1.4656 \overset{def}{=} \ln U_1 \\ &\Longrightarrow U_1^* = \exp(1.4656) = 4.3301 \end{aligned}$$

2.2.2 Costruzione grafico

$$
\begin{aligned}
VB0 \quad &: \qquad n_{12} = \frac{W_1}{p_{12}} - \frac{p_{11}}{p_{12}} n_{11} \\
&= \quad n_{12} = \frac{15}{2} - \frac{1.5}{2} n_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C.Indiff \quad &\Longrightarrow \qquad n_{12} = \left(\frac{W_1}{n_{11}^a} \right)^{\frac{1}{1-a}} \\
&\Longrightarrow \qquad n_{12} = \left(\frac{4.3301}{n_{11}^{0.5}} \right)^{\frac{1}{1-0.5}}
\end{aligned}
$$



2.2.3 Variabili conseguenti per $t+1$

Una volta che il denaro M_0 è stato investito negli stocks, dopo la chiusura dei mercati, i miei acquisti di azioni diventano le mie "dotazioni" del giorno dopo. Quindi

- $\omega_{21} = n_{11}$;
- $\omega_{22} = n_{12}$;

All'apertura dei mercati, i prezzi cambiano e le mie dotazioni non valgono più M_0, come era il giorno prima quando avevo usato quel denaro per comprare le due azioni, ma un

- $W_1 \Longrightarrow$ Reddito da dotazione: $W_2 = p_{21}\omega_{21} + p_{22}\omega_{22}$, ovvero è la dotazione misurata ai nuovi prezzi.

A questo nuovo reddito W_1 ed a questi nuovi prezzi (p_{21}, p_{22}), la scelta precedente non è più ottima e comincio un nuovo processo di scelta con i nuovi parametri.

2.3 Tempo: $t = 1bis$

Consideriamo adesso cosa sarebbe successo SE l'investitore non avesse investito in data $t = 0$, ma avesse aspettato la data $t = 1(bis)$ avendo ancora il reddito monetario.

Il problema è adesso al PB2 sopra, ma in cui i prezzi sono quelli del giorno $t = 1$.

Le soluzioni teoriche restano le stesse, è sufficiente cambiare i prezzi.

2.3.1 Soluzioni numeriche

Parametri: $p_{11} = 1.5$ mila \$, $p_{12} = 2$ mila \$, $M = 20$.

$$\begin{aligned} n^*_{1bis,1} &= 0.5\frac{20}{1.5} = 6.6667 \\ n^*_{1bis,2} &= 0.5\frac{20}{2} = 5 \\ \lambda^*_{1bis} &= 1/20 \end{aligned}$$

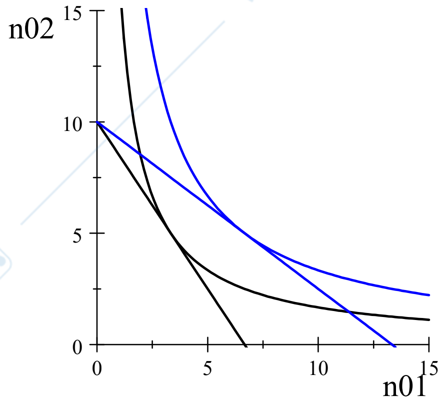
Vogliamo adesso valutare quanto risulta l'utilità dell'investitore dopo l'acquisto del portafoglio, avendo un reddito monetario da spendere interamente, pari a $M_0 = 20$.

$$\begin{aligned} \ln U\left(n^*_{01} n^*_{02} \middle| \, p_{1bis1} = 1.5, p_{02} = 2, M = 20\right) &= a \ln n^*_{1bis,1} + (1-a)\ln n^*_{1bis,2} \\ &= \frac{1}{2}\ln 6.6667 + \frac{1}{2}\ln 5 = \\ &= 1.7533 \overset{def}{=} \ln U_1 \\ &\Longrightarrow U^*_1 = \exp(1.7533) = 5.7736 \end{aligned}$$

2.3.2 Costruzione grafico

$$\begin{aligned} VB0 \quad &: \qquad n_{12} = \frac{M}{p_{12}} - \frac{p_{11}}{p_{12}} n_{11} \\ &= n_{12} = \frac{20}{2} - \frac{1.5}{2} n_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C.Indiff \quad &\Longrightarrow \qquad n_{12} = \left(\frac{W_1}{n_{11}^a}\right)^{\frac{1}{1-a}} \\ &\Longrightarrow \qquad n_{12} = \left(\frac{5.7736}{n_{11}^{0.5}}\right)^{\frac{1}{1-0.5}} \end{aligned}$$



2.3.3 Variabili conseguenti per $t+1$

Una volta che il denaro M_0 è stato investito negli stocks, dopo la chiusura dei mercati, i miei acquisti di azioni diventano le mie "dotazioni" del giorno dopo. Quindi

- $\omega_{21} = n_{11}$;
- $\omega_{22} = n_{12}$;

All'apertura dei mercati, i prezzi cambiano e le mie dotazioni non valgono più M_0, come era il giorno prima quando avevo usato quel denaro per comprare le due azioni, ma un

- $W_1 \Longrightarrow$ Reddito da dotazione: $W_2 = p_{21}\omega_{21} + p_{22}\omega_{22}$?

A questo nuovo reddito W_1 ed a questi nuovi prezzi (p_{21}, p_{22}), la scelta precedente non è più ottima e comincio un nuovo processo di scelta con i nuovi parametri.

2.4 Effetti sostituzione e reddito

Il passaggio dalla soluzione in $t = 0$, alla soluzione in $t = 1$, esprime esattamente l'**effetto sostituzione**, perché l'investitore utilizza il reddito che proviene dalla dotazione corrente per acquistarne una più conveniente a pari potere d'acquisto e prezzi variati.

Il passaggio dalla soluzione in $t = 0$, alla soluzione in $t = 1bis$, esprime esattamente l'**effetto reddito**, perché l'investitore utilizza il lo stesso reddito, ma siccome sono variati i prezzi ha un diverso potere d'acquisto e va a cercare una scelta migliore.

E' chiaro che se almeno un prezzo diminuisce, a parità degli altri, a parità di reddito è aumentato il potere d'acquisto.

Si leggano i paragrafi successivi per un ripasso di teoria microeconomica su questi effetti.

Esercizio 2 *Consideriamo il percorso:* $t = 0, 1, 2$. *In* $t = 2$, *abbiamo come dotazioni gli acquisti del periodo precedente e i prezzi variati*

$$\omega_{t=2} = (\omega_{21} = n_{11} = 5; \quad \omega_{22} = n_{12} = 3.75)$$

$$p_{t=2} = (p_{21} = 1.5; \quad p_{22} = 3)$$

(i) Calcolare tutta la soluzione e tentare di fare il grafico con i 3 vincoli di bilancio e egnate i punto della dotazione.

(ii) Quali di queste variazioni sono riconducibili a uno o più degli effetti sostituzione, reddito, reddito da dotazione (Fare riferimento alla Dispensa 1).

Esercizio 3 *Consideriamo il percorso:* $t = 0, 1bis, 2$. *In* $t = 2bis$, *abbiamo come dotazioni gli acquisti del periodo* $t = 1bis$ *e i prezzi variati*

$$\omega_{t=2} = (\omega_{21} = n_{11} = 6.667; \quad \omega_{22} = n_{12} = 5)$$

$$p_{t=2} = (p_{21} = 1.5; \quad p_{22} = 3)$$

(i) Calcolare tutta la soluzione e tentare di fare il grafico con i 3 vincoli di bilancio e egnate i punto della dotazione.

(ii) Quali di queste variazioni sono riconducibili a uno o più degli effetti sostituzione, reddito, reddito da dotazione (Fare riferimento alla Dispensa 1)?

Gli esercizi mostrano come le scelte sequenziali siano dipendenti dalle scelte effettuate nei periodi precdenti (path-dependent).

Si vedano le soluzioni nel file Excel.

3 Scelta Intertemporale $[t = 0, 1; s = 1]$

Consideriamo adesso il caso in cui esista un solo bene e in ogni periodo si possieda e si consumi solo tale bene, che sarà il bene di consumo. La scelta è fra il consumarlo oggi o nell'unico periodo successivo (Es. t = anni; t=0 giovinezza, t=1 vecchiaia)

Ipotesi.

1. Esiste un unico bene: per es. il grano o la moneta. L'importante è che sia lo stesso bene a costituire sia la dotazione iniziale ω_t, che la quantità di "consumo" prescelta c_t.
2. $t = 0, 1$. Ovvero consideriamo solo 2 periodi di tempo.
3. Stati di natura in data futura: $s = 1 \Longrightarrow$ Certezza

Conseguenze.

1. Parametri dati.
   (a) dotazione iniziale nell'unico bene esistente, quindi lo stesso che viene conumato $\omega = (\omega_{t=0}, \omega_{t=1})$,
   (b) prezzi $p = (p_{t=0}, p_{t=1})$
   (c) tasso d'interesse r,
   (d) forma esplicita della funzione di utilità $U(c_0, c_1)$, diversa in ogni esercizio.
   (e) tasso di preferenza intertemporale dell'agente θ.
2. **Incognite**: Scelta $c = (c_{t=0}, c_{t=1})$.

Se usiamo l'esempio del grano possiamo immaginare che in ogni periodo t, ne guadagnamo o produciamo un ammontare ω_t e ne consumiamo un ammontare $c_t \gtreqless \omega_t$. Possiamo consumarne meno della dotazione e in quel caso lo risparmiamo, oppure di più della dotazione (lo prendiamo a prestito) e lo dovremo restituire, perché, come spieghiamo di seguito, alla fine del periodo finale il vincolo di bilancio intertemporale deve essere rispettato.

Il consumatore deve scegliere fra consumo presente c_0 e consumo futuro c_1.

Se $\omega_0 > c_0$, il consumatore è un risparmiatore netto nel primo periodo, versa il proprio risparmio in banca o lo da in prestito. Nel successivo periodo ottiene un reddito monetario aggiuntivo di $(\omega_0 - c_0)(1 + r)$ oltre alla dotazione ω_2.

Se invece $\omega_0 < c_0$, il consumatore prenderà in prestito tale ammontare di denaro nel primo periodo, e il periodo successivo dovrà pagare alla banca o restituire il grano $(\omega_0 - c_0)(1 + r)$.

Il problema di scelta è la massimizzazione della funzione di utilità soggetta ai due vincoli di bilancio correnti

$$\max_{c_0,c_1} U(c_0, c_1)$$

$$s.a \qquad p_0c_0 + s = p_0\omega_0 \qquad (VB0)$$

$$p_1c_1 = p_1\omega_1 + s(1 + r) \qquad (VB1)$$

dove s = risparmio. Si risolve s da $VB1$

$$s = \frac{p_1c_1}{1 + r} - \frac{p_1\omega_1}{1 + r}$$

e lo si inserisce nel $VB0$, ottenenendo il **"Vincolo di Bilancio Intertemporale"** (VBI)

$$p_0c_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right)c_1 = \underbrace{p_0\omega_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right)\omega_1}_{W} \qquad (VBI)$$

dove il termine di destra esprime il "Reddito da dotazione" che chiamiamo W.

3.0.1 Disegno sul piano R_2

1. *Vincolo di bilancio.*

   Inserire i parametri: prezzi, r e dotazioni.

   Calcolare il reddito da dotazione.

   Risolvere (VBI) per c_2

2. *Curva d'indifferenza*

   Imporre il livello di U per il quale vogliamo calcolare la curva di isolivello, che può essere qualla ottima $U^* = U(c_0^*, c_1^*)$ o una qualsiasi.

   Inserire i parametri della funzione di utilità: a, θ etc.

   Risolvere la d'indifferenza per c_2.

3.1 Caso semplice

Ipotesi 1 *Il prezzo del bene di consumo è costante nei due periodi:* $p_0 = p_1 = 1$.

Il vincolo di bilancio puo' essere scritto indifferentemente in termini di **valore presente**, ovvero scontato ad oggi

$$p_0c_0 + \frac{p_1}{1+r}c_1 = p_0\omega_0 + \frac{p_1}{1+r}\omega_1 \tag{1}$$

o in termini di **valore futuro**

$$p_0c_0(1+r) + p_1c_1 = p_0\omega_0(1+r) + p_1\omega_1 \tag{2}$$

Volendo ridurre questi vincoli ai vincoli tradizionali dobbiamo capire **quali sono i "prezzi" del bene di consumo in ogni periodo**.

Definizione 3 *I "prezzi" del bene di consumo in ogni periodo, P_t, sono costituiti da tutto ciò che moltiplica c_t.*

1. *In termini di valore presente, considerando il vincolo* (1) *si ha:*

$$P_0 = p_0; \qquad P_1 = \frac{p_1}{1+r}$$

2. *Viceversa, in termini di valore futuro, considerando il vincolo* (2) *si ha:*

$$P_0 = p_0(1+r); \qquad P_1 = p_1$$

1. Nel "caso del vincolo in termini di valore presente", il prezzo complessivo del consumo del primo periodo, che chiamo $P_0 = 1$, mentre il prezzo complessivo del consumo del secondo periodo, che chiamo $P_1 = p_1/(1+r)$. La pendenza del vincolo di bilancio risulta quindi

$$-\frac{P_0}{P_1} = -\frac{p_0}{\frac{p_1}{(1+r)}} = -\frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

   NB. Se $p_0 = p_1 = 1$, ovvero il livello dei prezzi è costante, la pendenza del vincolo di bilancio è semplicemente $(1+r)$. Ovvero il prezzo relativo del futuro rispetto al presente è $(1+r)$.

2. Nel "caso del vincolo in termini di valore futuro", il prezzo complessivo del consumo del primo periodo, che chiamo $P_0 = p_0(1+r)$, mentre il prezzo complessivo del consumo del secondo periodo, che chiamo $P_1 = p_1$. La pendenza del vincolo di bilancio risulta quindi

$$-\frac{P_0}{P_1} = -\frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

I due vincoli sono pertanto equivalenti. Nel seguito opteremo per il vincolo in valore presente, perché le scelte finanziarie si effettuano ex-ante.

osservazione 1 *Notare che per $p_0 = p_1$ la pendenza del VBI è $(1+r)$, dove $r =$ "prezzo del tempo".*

3.1.1 Scelta Ottima

Consideriamo il seguente problema di scelta

$$\max_{c_0,c_1} \ln U(c_0,c_1) = \alpha \ln c_0 + (1-\alpha)\ln c_1$$

$$t.c. \quad p_0c_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right)c_1 = \underbrace{p_0\omega_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right)\omega_1}_{W} \qquad (VBI)$$

Consideriamo il Lagrangiano e deriviamo per Il sistema per la soluzione

$$\max_{c_0,c_1} L(c_0,c_1,\lambda) = a\ln c_0 + (1-a)\ln c_1 - \lambda\left(p_0c_0 + \frac{p_1}{1+r}c_1 - \left(p_0\omega_0 + \frac{p_1}{1+r}\omega_1\right)\right)$$

$$a\ln c_0 + (1-a)\ln c_1 = \ln U$$

Le Condizioni del I ordine (CPO):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_0} &: \frac{a}{c_0} - \lambda p_0 = 0\\
\frac{\partial L}{\partial c_1} &: \frac{1-a}{c_1} - \lambda p_1 = 0\\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &: p_0c_0 + \frac{p_1}{1+r}c_1 - \left(p_0\omega_0 + \frac{p_1}{1+r}\omega_1\right) = 0
\end{aligned}$$

Al solito dividiamo la prima CPO con la seconda

$$\frac{\frac{a}{c_0}}{\frac{1-a}{c_1}} = \frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

che possiamo riscrivere

$$\underbrace{\frac{a}{1-a}\frac{c_1}{c_0}}_{Pend-C.Indiff} = \underbrace{\frac{p_0}{p_1}(1+r)}_{Pend.VBI} \tag{3}$$

dove la *pendenza della curva di indifferenza* è data dal **"saggio marginale di sostituzione"** (SMS) su una curva di indifferenza per mantenere l'utilità costante.

Calcolo SMS.

1. Definire un livello della funzione di utilita, che fornisce l'equazione della curva di isolivello o curva d'indifferenza. Per esempio

$$U(c_0, c_1) : a \ln c_0 + (1-a) \ln c_1 = U_0$$

2. Calcolare il differenziale totale, assumendo che $dU_0 = 0$ per ipotesi.$a \ln c_0 + (1-a) \ln c_1 = U_0$

$$a \frac{\partial U}{\partial c_0} dc_0 + (1-a) \frac{\partial U}{\partial c_1} dc_1 = dU_0 \equiv 0$$

da cui

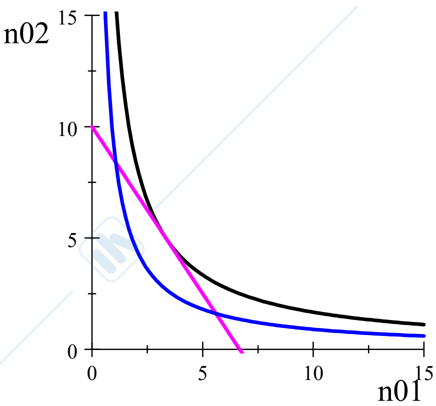
$$\frac{dc_1}{dc_0} = -\frac{a}{(1-a)} \frac{\partial U / \partial c_0}{\partial U / \partial c_1}$$

3. Applicando la regola, nell'esempio utilizzato, si ottiene

$$\frac{dc_1}{dc_0} = -\frac{a}{1-a} \frac{c_1}{c_0}$$

osservazione 2 *Le due pendenze non sono in generale uguali. La scelta "ottima" implica la tangenza fra il VBI e la curva d'indifferenza. Ma tale tangenza non dipende dal reddito e potrebbe verificarsi a tanti livelli del vincolo di bilancio, ovvero di* W. *Pertanto la "scelta ottima vincolata" richiede due condizioni:*

(i) La tangenza fra le due pendenze, eq. (3),
(ii) Il vincolo di bilancio : $p_0 c_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right) c_1 = p_0 \omega_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right) \omega_1$.



osservazione 3 *In questo grafico, la curva d'indifferenza azzurra non è ottima. Perché interseca il VBI avendo pendenze diverse. Le allocazioni nelle intersezioni,* costano *sempre il reddito espresso dal vincolo di bilancio* (W), *ma* forniscono una utilità *più bassa.*

osservazione 4 *Esprimendo le CPO (Condizioni del Primo Ordine) in questo modo, abbiamo che le (i) e (ii) sono le due equazioni che portano alla soluzione delle due incognite* c_0, c_1.

Torniamo al calcolo della soluzione. Esplicitiamo da (3) per c_1

$$c_1 = \frac{1-a}{a}\frac{p_0}{p_1}(1+r)\,c_0$$

e la inseriamo inseriamo nel VBI

$$p_0 c_0 + \frac{p_1}{1+r}\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_0}{p_1}(1+r)\,c_0\right) = \underbrace{p_0\omega_0 + \frac{p_1}{1+r}\omega_1}_{W}$$

$$p_0 c_0 + \frac{p_1}{1+r}\left(\frac{1-a}{a}\frac{p_0}{p_1}(1+r)\,c_0\right) = W$$

da cui le soluzioni per le 3 incognite:

$$\begin{aligned} c_0^* &= a\frac{W}{p_0}; \qquad c_1^* = (1-a)\frac{W}{p_0}; \qquad \lambda^* = \frac{1}{W} \\ \ln U(c_0^*, c_0^*) &= \ln c_0^* + (1-a)\ln c_1^* \Longrightarrow U^* = \exp\left(\ln U(c_0^*, c_0^*)\right) \end{aligned}$$

dove chiamiamo il membro di destra come $W =$ reddito da dotazione intertemporale.

Le definizioni di "reddito da dotazione" (i.e. membro di destra del vincolo di bilancio) per applicare l'equazione di Slutsky sono

Le definizioni di "reddito" sono

$$W = p_0 \cdot \omega_0 + \left(\frac{p_1}{1+r}\right)\omega_1$$

$$W' = p_0' \cdot c_0^A + \left(\frac{p_1'}{1+r'}\right)c_1^A$$

$$W'' = p_0' \cdot \omega_0 + \left(\frac{p_1'}{1+r'}\right)\omega_1$$

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{c_1}{c_0} = \frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

da qui ricavate c_1 e lo sostituite nel VBI etc.

3.2 Calcolo punti per l'equazione di Slutsky

Siano le funzioni di domanda espresse nei "prezzi complessivi" P_1 e P_2

$$c_1(P_1, P_2, W) = \alpha \frac{W}{P_1}$$

$$c_2(P_1, P_2, W) = (1-\alpha)\frac{W}{P_2} = (1-\alpha)\frac{W}{\frac{p_2}{1+r}} = (1-\alpha)\frac{W}{p_2}(1+r)$$

tuttavia per omogeneità espositiva, manterremo le formule in P_1 e P_2, considerando che lo studente applichi ogni volta la definizione di essi adatta.

La **scelta iniziale**, **PUNTO A**

$$\mathbf{A} = \begin{cases} c_1(P_1, P_2, W) = \alpha \frac{W}{P_1} \\ c_2(P_1, P_2, W) = (1-\alpha)\frac{W}{P_2} \end{cases}$$

Poi facciamo variare i prezzi: P_1 in P_1' e P_2 in pP. Otteniamo la **scelta finale** che chiamiamo **PUNTO D** che passerà per la dotazione ai nuovi prezzi.

$$\mathbf{D} = \begin{cases} c_1(P_1', P_2', W'') = \alpha \frac{W''}{P_1'} \\ c_2(P_1', P_2', W'') = (1-\alpha)\frac{W''}{P_2'} \end{cases}$$

ruotando il vincolo di bilancio facendo perno nel punto A otteniamo

$$\mathbf{B} = \begin{cases} c_1(P_1', P_2', W') = \alpha \frac{W'}{P_1'} \\ c_2(P_1', P_2', W') = (1-\alpha)\frac{W'}{P_2'} \end{cases}$$

Infine ruotando il vincolo di bilancio in modo da farlo passare per le intercette

$$\left(\frac{W}{P_1'}, \frac{W}{P_2'}\right)$$

otteniamo la scelta C

$$\mathbf{C} = \begin{cases} c_1(P_1', P_2', W) = \alpha \frac{W}{P_1'} \\ c_2(P_1', P_2', W) = (1-\alpha)\frac{W}{P_2'} \end{cases}$$

3.2.1 Risparmio e pricing dell'unica attività finanziaria

Quanto vale dunque il risparmio? Come dalla definizione data all'inizio del paragrafo, il risparmio deriva dalla differenza fra le scelte calcolate di consumo nei due periodi:

$$s = p_0\omega_0 - p_0 c_0$$

Come detto, il risparmio è il veicolo per trasportare ricchezza da un periodo all'altro. Se il mercato ha un "tasso d'interesse d'equilibrio" che è un dato per l singolo consumatore, egli potrà investire la sua ricchezza a quel tasso ed ottenere $s(1+r)$ nel periodo successivo.

Finora non abbiamo parlato di un prezzo per l'attività finanziaria.

Se l'attività finanziaria è un titolo a reddito fisso, quell'attività finanziaria deve costare un prezzo.

Riscriviamo i due vincoli con segno di uguaglianza

$$p_0 c_0 + s = p_0 \omega_0 \qquad (VB0)$$
$$p_1 c_1 \leq p_1 \omega_1 + s(1+r) \qquad (VB1)$$

dove $s =$ risparmio.

Nei VB correnti: il prezzo di $s = 1$ e a scadenza deve valere $(1+r)$

Dunque in termini di valore presente:

$$v_0^B = \frac{1}{1+r} \leq 1 \tag{4}$$

e varrà un prezzo $v_1^B = 1$ a scadenza.

Se fosse

$$v_0^B < \frac{1}{1+r}$$

ovvero costasse "poco", molti la comprerebbero fino a che il suo prezzo tornasse all'equilibrio (4). Se fosse il contrario, ovvero

$$v_0^B > \frac{1}{1+r}$$

nessuno la vorrebbe fino a quando il suo prezzo non torni all'equilibrio (4).

Vedremo la generalizzazione di queste questioni più avanti.

3.3 Inflazione

Definizione 4 *Tasso d'inflazione* $p_1 = p_0 \left(1 + \dot{p}\right)$.

Il prezzo del bene nel secondo periodo è pari al prezzo del bene nel primo periodo, p_1, aumentato del tasso d'inflazione, $\dot{p}$. Il tasso d'inflazione è definito come tasso di variazione dei prezzi, ovvero

$$\dot{p} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} - 1$$

Il vincolo di bilancio diventa

$$p_0 c_0 + \frac{p_0 \left(1 + \dot{p}\right)}{1+r} c_1 = p_0 \omega_0 + \frac{p_0 \left(1 + \dot{p}\right)}{1+r} \omega_1$$

Si può eliminare p_0 e chiamare il termine

Definizione 5 *Sia il tasso d'interesse reale* ρ *circa uguale a* $(r - \pi)$

$$\rho \overset{def}{\simeq} r - \dot{p}$$

Proof.

$$\frac{1 + \dot{p}}{1+r} \overset{def}{=} \frac{1}{1+\rho}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+\dot{p})-\ln(1+r) &= -\ln(1+\rho)\\ \ln r- &= \\ \exp(\ln r)-\exp\left(\ln\left(\dot{p}\right)\right) &= \exp(\ln\rho)\end{aligned}$$

Dunque

$$\rho \simeq r - \dot{p}$$

dove $\rho =$ tasso d'interesse reale, il quale è circa uguale a $(r-\pi)$. ■

Il problema torna ad essere quello del caso semplice in cui sostituiamo il tasso d'interesse reale al tasso d'interesse nominale.

3.4 Tasso di crescita del reddito

In qualche caso potrebbe essere utile avere anche questo tipo di semplificazioni.

Ipotesi 2 *Se il reddito cresce ad un tasso di crescita γ variabile o costante (costante nell'esempio), si può assumere che le dotazioni (qui denominate come reddito y_t), crescano ad un tasso di crescita γ*

$$y_1 = y_0(1+\gamma)$$

In questo caso il VBI diventa

$$p_0c_0 + \frac{(1+\pi)}{(1+r)}p_0c_1 \leq p_0y_0 + \frac{(1+\pi)(1+\gamma)}{(1+r)}p_0y_0$$

Quindi, volendo esprimere il **vincolo di bilancio in termini di tasso d'interesse reale e di tasso di crescita** scriveremo

$$p_0c_0 + \frac{p_0c_1}{1+\rho} \leq p_0y_0 + \frac{(1+\gamma)}{1+\rho}p_0y_0$$

Esercizio 4 *Dati $\omega = (\omega_0 = 10; \omega_1 = 2)$, $p_0 = p_1 = 1$; $r = 5\% = 0.05$, e la funzione di utilità pari a*

$$\ln U(c_0, c_1) = \alpha \ln c_0 + (1-\alpha)\ln c_1$$

calcolare:
(i) la scelta ottima: $c^* = (c_0^*; c_1^*)$ e s^*
(ii) ricalcolare a scelta ottima e il risparmio per $r = 20\% = 0.2$.
(iii) ricalcolare (i) e (ii) avendo dotazione $\omega = (\omega_0 = 2; \omega_1 = 10)$. Come se l'individuo sapesse di ricevere un'eredità in vecchiaia.

Esercizio 5 *Ripetere l'esercizio sopra con funzione di utilità lineare (ovvero agenti con neutralità al rischio). (Studiare prima la scelta con funzioni di utilità con perfetti sostituti nella Dispensa 1).*

$$\ln U(c_0, c_1) = c_0 + c_1$$

Esercizio 6 *Ripetere l'esercizio sopra con funzione di utilità lineare*

$$\ln U(c_0, c_1) = c_0 + \frac{1}{1+\theta}c_1$$

dove $1/(1+\theta)$ è il saggio di preferenza intertemporale, ovvero il tasso di sconto "soggettivo" di ciascun agente, il quale indica la "propria" preferenza interteporale.
(i) Considerate il caso $\theta > r$. Es. $\theta = 40\%$.
(ii) Considerate il caso $\theta < r$. Es. $\theta = 10\%$.
(iii) Considerate il caso $\theta = r$. Es. $\theta = 20\%$.

4 Conclusioni

Cosa ricordare di questo capitolo:

1. Ingredienti di una teoria delle decisioni: (i) Funzione obiettivo o scelta, (ii) Insieme delle scelte possibili: vincolo di bilancio in tutte le sue forme (VB correnti e VB Intertemporale, e spostamenti).
2. Come calcolare l'ottimo (Langrangiano, sue derivate ...).
3. Come la soluzione si sposta al variare dei parametri.
4. *** Come le possibilità di scelta siano "path-dependent".
5. *** Come la variazione del tasso di interesse (= prezzo del tempo) e/o i prezzi relativi spostino le scelte di risparmio.
6. *** Come le dotazioni facciano variare la posizione del consumatore da investitore di risparmio a persona che si indebita per restituire nel secondo periodo.

References

[1] Varian, H. R. (2014). Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach. WW Norton & Company.

5 Appendice. Esercizio svolto (facoltativo)

Il problema di scelta è la massimizzazione della funzione di utilità soggetta ai due vincoli di bilancio correnti

$$\max_{c_0,c_1} U(c_0,c_1) = \alpha \ln c_0 + (1-\alpha)\ln c_1 \tag{5}$$
$$s.a \qquad p_0c_0 + s \leq p_0\omega_0 \qquad (VB0)$$
$$p_1c_1 \leq p_1\omega_1 + s(1+r) \qquad (VB1)$$

Parametri: $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1,\ r = 10\%,\ \omega_0 = 7, \omega_1 = 0.$

5.0.1 Disegno del problema sul piano (c_0, c_1)

Per poter disegnare le (5) e (**??**) , bisogna risolverle entrambe per c_1 in funzione di c_0

- La funzione di utilità diventa:

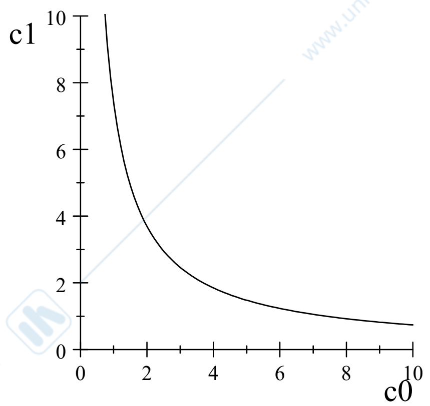
  Esempio con funzione di utilità logaritmica

$$\overline{u} = \alpha \ln c_0 + (1-\alpha)\ln c_1$$

$$\begin{aligned} \ln c_1 &= \frac{\overline{u}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0 \\ &= \frac{1}{0.5} - \ln c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(\ln c_1) &= \exp\left(\frac{u}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) \\ c_1(\overline{u}=1) &= \exp(2-\ln c_0) \end{aligned} \tag{6}$$

Grafico della curva d'indifferenza



- Il vincolo di bilancio intertemporale (VBI)

$$p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{1+r} = \underbrace{p_0 \omega_0 + \frac{p_1 \omega_1}{1+r}}_{M}$$

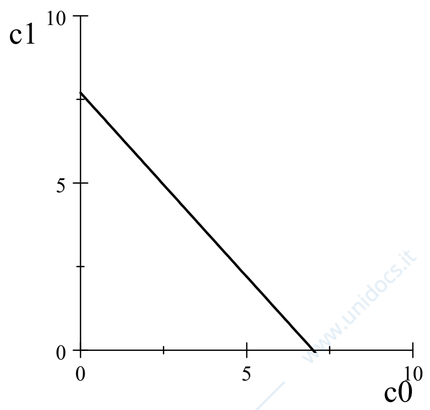
Chiamiamo il reddito intertemporale (termine a destra dell'equazione)

$$M = p_0 \omega_0 + \frac{p_1 \omega_1}{1+r} = 1 \cdot 7 + 0$$

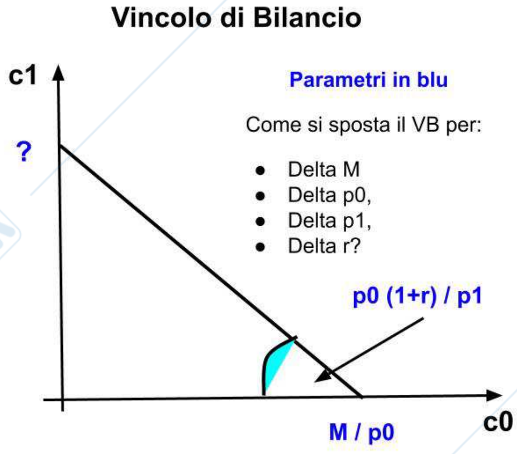
osservazione 5 *Per semplicità è comodo usare il termine M per considerare tutto il termine di destra dell'equazione, ma durante i prossimi esercizi di statica comparata, bisogna abbandonare tale semplificazione.*

-

$$\begin{aligned} c_1 &= M\frac{(1+r)}{p_1} - p_0\frac{(1+r)}{p_1}c_0 \\ &= M\frac{(1+r)}{p_1} - \frac{p_0}{p_1}(1+r) \cdot c_0 \\ &= 7 \cdot 1.1 - 1.1c_0 \end{aligned}$$

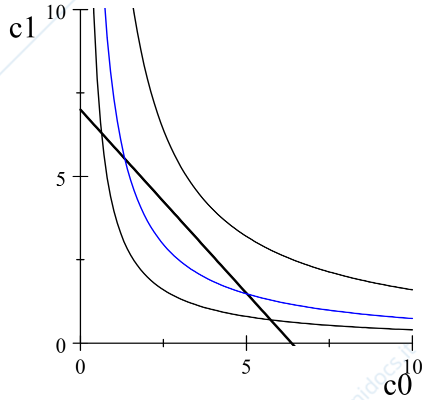


osservazione 6 *Notare quali sono le variabili e quali sono i parametri.*



Esercizio 7 *Disegnate il VBI per i parametri dati e osservate come si sposta al variare di ciascuno dei parametri citati, dando valori arbitrari.*

- Adesso inseriamo la curva d'indifferenza (in blu quella calcolata sopra per $\omega_0 = 1$) nello stesso grafico del vincolo di bilancio



Curve di indifferenza per $\overline{u} = 1, 2, 4$.

Nel seguito, risolvendo il problema di ottimo, cerchiamo il punto (c_0^*, c_1^*) che dia la massima utilità al consumatore, compatibilmente con il suo vincolo di bilancio.

5.0.2 Soluzione

Consideriamo il Lagrangiano, ovvero la funzione che include la funzione obiettivo e pone un peso negativo $(-\lambda)$ al fatto di sforare il termine a destra, il reddito intertemporale disponibile

$$\begin{aligned}\max_{c_0,c_1} L(c_0, c_1) &= U(c_0, c_1) - \lambda (VBI) \\ &= \alpha \ln c_0 + (1-\alpha) \ln c_1 - \lambda \left(p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{1+r} - p_0 \omega_0 - \frac{p_1 \omega_1}{1+r} \right)\end{aligned}$$

Cerchiamo il punto costituito dalle variabili endogene $\{c_0^*, c_1^*\}$ che massimizza tale funzione. Per ottenerlo si deriva il lagrangiano L, per ciascuna delle variabili endogene e si ottiene il **sistema delle equazioni del I ordine**:

$$\frac{\partial L}{\partial c_0} : \frac{\alpha}{c_0} - \lambda p_0 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} : \frac{1-\alpha}{c_1} - \lambda \frac{p_1}{1+r} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{1+r} - p_0 \omega_0 - \frac{p_1 \omega_1}{1+r} = 0 \tag{9}$$

Risolviamo (e faremo quasi sempre in questo modo):

- Dividiamo la (7) per la (8)

$$\underbrace{\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{c_1}{c_0}}_{pendenza-c-indiff} = \underbrace{\frac{p_0}{p_1}(1+r)}_{pendenza-VB}$$

  ma questa è la nota eguaglianza che in equilibrio deve avvenire fra la pendenza della curva di indifferenza (termine di sinistra), ovvero il Saggio Marginale di Sostituzione (SMS) e la pendenza del vincolo di bilancio. Risolviamo per c_1

  Es. $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1, r = 10\%$

$$c_1 = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{p_0}{p_1} (1+r) c_0 \tag{10}$$

  e lo nella (9) che è il VBI.

  Consideriamo i seguenti parametri

$$\begin{aligned} p_0 c_0 + \frac{p_1}{1+r} \left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{p_0}{p_1} (1+r) c_0 \right) - M &= 0 \\ p_0 c_0 \left(1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right) &= M \\ p_0 c_0 \left(\frac{\alpha + 1 - \alpha}{\alpha} \right) &= M \end{aligned}$$

  da cui

$$c_0^* = \alpha \frac{M}{p_0} = 0.5 \cdot \frac{7}{1} = 3.5$$

  sostituendo c_0^* in c_1. Risulta

$$c_1^* = (1-\alpha) \frac{(1+r)}{p_1} M = 0.5 \cdot \frac{1.1}{1} 7 = 3.85$$

  Sostituendo c_0^* nella (7) , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{c_0} - \lambda p_0 &= 0 \\ \frac{\alpha}{\alpha \frac{M}{p_0}} - \lambda p_0 &= 0 \end{aligned}$$

  da cui

$$\lambda^* = \frac{1}{M} = \frac{1}{7}$$

- Calcoliamo l'utilità derivante dai consumi ottimi e controlliamo se la corrispondente curva d'indifferenza sia tangente al vincolo di bilancio.

$$\begin{aligned} U(c_0^*, c_1^*) &= \alpha \ln c_0^* + (1-\alpha)\ln c_1^* && (11) \\ &= \alpha \ln\left(\alpha \frac{M}{p_0}\right) + (1-\alpha)\ln\left((1-\alpha)\frac{M}{p_1}\right) && (12) \\ &= 0.5 \ln\left(0.5\frac{7}{1}\right) + (0.5)\ln\left(0.5\frac{(1.1)}{1}7\right) \\ u^* &= 1.3 \end{aligned}$$

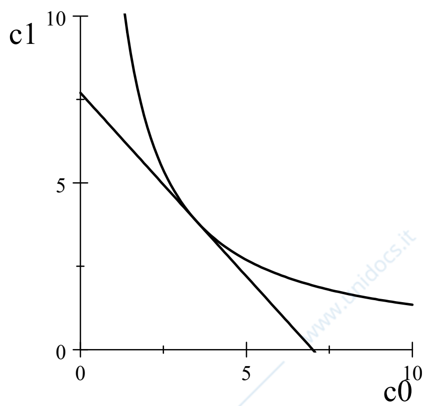
- Calcoliamo la curva di indifferenza di *questo livello di utilità*. Ovvero dobbiamo mettere in grafico la curva di isolivello corrispondente a $U(c_0^*, c_1^*)$.

  Simplifying eq. (11)

$$u^* = \alpha \ln c_0^* + (1-\alpha)\ln c_1^*$$

  Risolviamo per c_1 per poter disegnare la curva d'indifferenza corrispondente all'isolivello trovato sul piano (c_0, c_1)

$$\begin{aligned} c_1 &= \exp\left(\frac{u^*}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) \\ &= \exp\left(\frac{1.3}{0.5} - \ln c_0\right) \end{aligned}$$

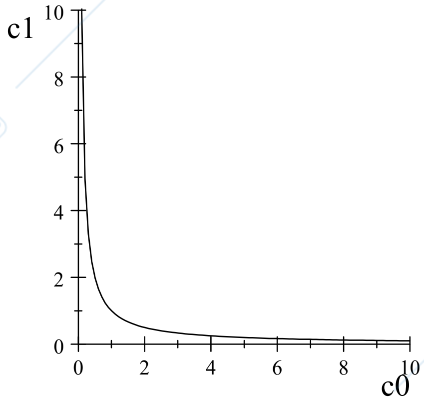


Risultato 1 *La curva d'indifferenza relativa all'ultilità ottima è effettivamente tangente al vincolo di bilancio.*

Esercizio 8 *(N0!) Ripetere tutto il procedimento con la* funzione di utilità esponenziale

$$u = c_0^{\alpha} c_1^{(1-\alpha)}$$
$$c_1^{(1-\alpha)} = \frac{u}{c_0^{\alpha}}$$

$$c_1 = \left(\frac{u}{c_0^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{1}{c_0^{0.5}}\right)^{\frac{1}{0.5}} = \frac{1}{c_0}$$



Suggerimenti per il calcolo della soluzione

$$\begin{aligned}
\max_{c_0,c_1} L(c_0,c_1) &= U(c_0,c_1) - \lambda(VBI) \\
&= c_0^{\alpha} c_1^{(1-\alpha)} - \lambda\left(p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{1+r} - p_0\omega_0 - \frac{p_1\omega_1}{1+r}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_0} &: \ \alpha c_0^{(\alpha-1)} c_1^{(1-\alpha)} - \lambda p_0 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial c_1} &: \ (1-\alpha)\, c_0^{\alpha} c_1^{(-\alpha)} - \lambda \frac{p_1}{1+r} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &: \ p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{1+r} - p_0\omega_0 - \frac{p_1\omega_1}{1+r} = 0
\end{aligned}$$

Divido la CPO1/CPO2

$$\frac{\alpha c_0^{(\alpha-1)} c_1^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)\, c_0^{\alpha} c_1^{(-\alpha)}} = \frac{\lambda p_0}{\lambda \frac{p_1}{1+r}}$$

semplificando gli esponenti e λ la stessa equazione diventa

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{c_1}{c_0} = \frac{p_0}{p_1}(1+r)$$

da qui ricavate c_1 e lo sostituite nel VBI etc.

5.1 Statica Comparata ed Effetti Reddito, Sostituzione e Dotazione

Interessa adesso esplorare come si sposta la scelta ottima al variare dei parametri.

Chiamiamo A il punto di scelta ottima calcolato nel paragrafo precedente che possiamo riassumere in

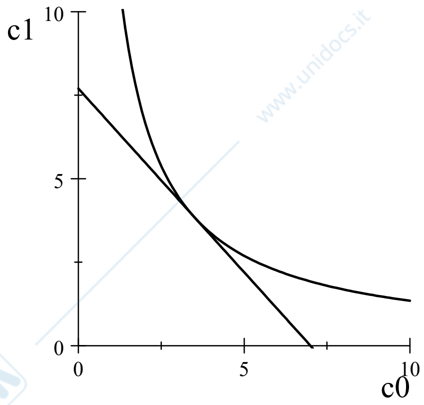
5.1.1 A : Status quo.

Parametri: $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1$, $r = 10\%$, $\omega_0 = 7, \omega_1 = 0$.

$$A = \begin{cases} M^A = p_0\omega_0 + \frac{p_1\omega_1}{1+r} & = 7 \\ c_0^{A*} = \alpha \frac{M}{p_0} & = 3.5 \\ c_1^{A*} = (1-\alpha)\frac{(1+r)}{p_1} M & = 3.85 \\ \lambda^{A*} = \frac{1}{M} & = 1/7 \\ u^{A*} = \alpha \ln c_0^* + (1-\alpha)\ln c_1^* & = 1.3 \end{cases}$$

Grafico:

$$A : \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{A*} = (1+r)\, M - \frac{p_0}{p_1}(1+r)\cdot c_0 = (1.1)\, 7 - 1\,(1.1)\, c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{A*} = \exp\left(\frac{u^{A*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.3}{0.5} - 1\ln c_0\right) \end{cases}$$



5.1.2 D : Scelta finale

$r\prime = r + \Delta r = 50\%$

Possiamo utilizzare le funzioni già calcolate e valutarle al nuovo r'.

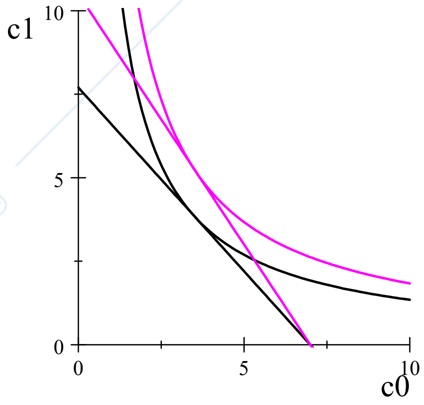
D : Parametri: $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1$, $r = 50\%$, $\omega_0 = 7, \omega_1 = 0$.

$$D = \begin{cases} M^D = p_0\omega_0 + \frac{p_1\omega_1}{1+r'} & = 7 \\ c_0^{D*} = \alpha \frac{M}{p_0} & = 3.5 \\ c_1^{D*} = (1-\alpha)\frac{(1+r')}{p_1} M & = 0.5\frac{(1+0.5)}{1}7 = 5.25 \\ \lambda^{D*} = \frac{1}{M} & = 1/7 \\ u^{D*} = \alpha \ln c_0^{D*} + (1-\alpha)\ln c_1^{D*} & = 0.5\ln 3.5 + (1-0.5)\ln 5.25 = 1.4555 \end{cases}$$

- L'effetto dell'incremento del tasso d'interesse passa attraverso la modifica del reddito disponibile M^D e modifica la scelta del consumo futuro soltanto.

Grafico:

$$D : \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{D*} = (1+r')\, M^D - \frac{p_0}{p_1}(1+r')\cdot c_0 = (1.5)\, 7 - 1\,(1.5)\, c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{D*} = \exp\left(\frac{u^{D*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.455}{0.5} - 1\cdot\ln c_0\right) \end{cases}$$



La distanza fra il punto D e il punto A rappresenta la variazione totale della scelta al variare del / dei parametri.

$$\|D - A\| = \text{Effetto Totale}$$

Il calcolo va fatto per entrambe le coordinate, ovvero

$$\begin{aligned} c_0^D - c_0^A &= 3.5 - 3.5 = 0 \\ c_1^D - c_1^A &= 5.25 - 3.85 = 1.4 \end{aligned}$$

Poiché l'agente aveva solo ricchezza in $t = 0$, è quindi un risparmiatore netto: investe il suo risparmio in $t = 0$ per ottenerlo in $t = 1$. L'aumento del tasso incrementa il valore del suo risparmio e quindi il consumo in $t = 1$.

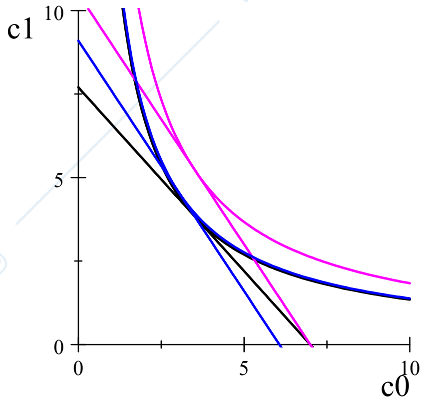
5.1.3 B: Calcolo Effetto Sostituzione

Si costruisce un punto B fittizio che posiziona il reddito disponibile pari al reddito generato dalla scelta ottima A e si studia di quanto varia la scelta a causa della variazione del solo (dei soli) parametri, escludendo la variazione del reddito disponibile.

$$B = \begin{cases} M^B = p_0 c_0^A + \frac{p_1 c_1^A}{1+r'} & = 1 \cdot 3.5 + \frac{1 \cdot 3.85}{1+0.5} = 6.067 \\ c_0^{B*} = \alpha \frac{M^B}{p_0} & = 0.5 \cdot 6.067 = 3.0335 \\ c_1^{B*} = (1-\alpha) \frac{(1+r')}{p_1} M^B & = 0.5 \frac{(1+0.5)}{1} 6.067 = 4.5503 \\ \lambda^{B*} = \frac{1}{M^B} & = 1/6.067 \\ u^{B*} = \alpha \ln c_0^{D*} + (1-\alpha) \ln c_1^{D*} & = 0.5 \ln 3.0335 + (1-0.5) \ln 4.5503 = 1.3125 \end{cases}$$

Grafico:

$$B: \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{B*} = (1+r') M^B - \frac{p_0}{p_1} (1+r') \cdot c_0 = (1.5) 6.067 - 1 (1.5) c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{B*} = \exp\left(\frac{u^{B*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.3125}{0.5} - 1 \cdot \ln c_0\right) \end{cases}$$



Definizione 6

$$\|B - A\| = \textit{Effetto Sostituzione}$$

$$\begin{aligned} c_0^B - c_0^A &= 3.0335 - 3.5 = -0.466\,5 \\ c_1^B - c_1^A &= 4.550\,3 - 4.550\,3 = 0.700\,3 \end{aligned}$$

In questo caso, si vuole valutare come la variazione dei prezzi faccia variare la scelta ottima senza variare il potere d'acquisto che si aveva già nella scelta A. Si considera quindi la scelta A come dotazione, e quindi si fa ruotare il vincolo di bilancio al crescere del tasso d'interesse, facendo perno nel punto A. E a partire da tale vincolo di bilancio si calcola la scelta ottima.

Poiché il tasso d'interesse è maggiore, è ottimo risparmiare di più $\left(c_0^B < c_0^A\right)$, in favore di un maggior consumo in $t = 1$, $\left(c_1^B > c_1^A\right)$.

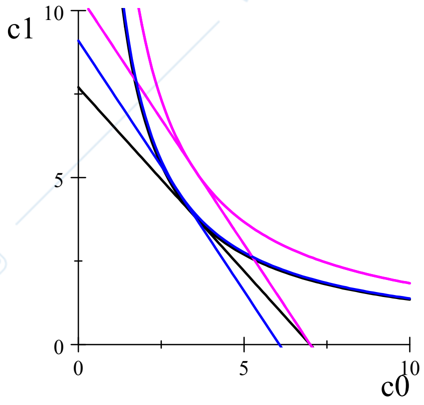
5.1.4 C: Calcolo Effetto Reddito Monetario

Si costruisce un punto C fittizio che considera il reddito disponibile pari al valore del reddito M iniziale senza considerare la variazione dei prezzi (come se il consumatore/investitore avesse venduto la dotazione iniziale ai prezzi precedenti (il portafoglio iniziale ai prezzi pecedenti) ed avesse ora, come dotazione, soltanto il reddito monetario, non più sensibile alla variazione di p_0, p_1, r. Ovvero $M^C = M^A$. Si e si studia di quanto varia la scelta a causa della variazione del solo (dei soli) parametri.

$$C = \begin{cases} M^C = M^A = p_0\omega_0 + \frac{p_1\omega_1}{1+r} & = 1 \cdot 3.5 + \frac{1 \cdot 3.85}{1+0.1} = 7 \\ c_0^{C*} = \alpha \frac{M^A}{p_0} & = 0.5 \cdot 7 = 3.5 \\ c_1^{C*} = (1-\alpha)\frac{(1+r')}{p_1} M^A & = 0.5 \frac{(1+0.5)}{1} 7 = 5.25 \\ \lambda^{C*} = \frac{1}{M^A} & = 1/7 \\ u^{C*} = \alpha \ln c_0^{C*} + (1-\alpha) \ln c_1^{C*} & = 0.5 \ln 3.5 + (1-0.5) \ln 5.25 = 1.4555 \end{cases}$$

Grafico:

$$C: \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{C*} = (1+r') M^C - \frac{p_0}{p_1}(1+r') \cdot c_0 = (1.5)\,7 - 1\,(1.5)\,c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{C*} = \exp\left(\frac{u^{C*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.455}{0.5} - 1 \cdot \ln c_0\right) \end{cases}$$



Definizione 7

$$\|C-B\| = \textit{Effetto Reddito Monetario}$$

$$\begin{aligned} c_0^C - c_0^B &= 3.5 - 3.0335 = 0.4665 \\ c_1^C - c_1^B &= 5.25 - 4.5503 = 0.6997 \end{aligned}$$

In questo caso, al crescere del tasso d'interesse, si isola il solo effetto dovuto all'incremento di valore della dotazione.

- In questo caso non possiamo calcolare l'effetto di dotazione, perché, essendo $\omega_1 = 0$, r' non fa variare il reddito da dotazione.

5.2 Esercizio 2 con Soluzione

1. Rifare tutto il calcolo dei diversi effetti, **al variare di** $r = 0.10 \longrightarrow r' = 0.5$, considerando una nuova dotazione $\omega_0 = 2, \omega_1 = 5.5$, che genera inizialmente lo stesso valore monetario che si aveva nel caso precedente.

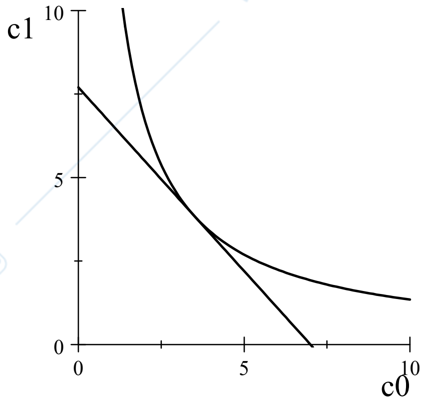
5.2.1 A : Status quo.

Parametri: $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1$, $r = 10\%$, $\omega_0 = 2, \omega_1 = 5.5$.

$$A = \begin{cases} M^A = p_0\omega_0 + \frac{p_1\omega_1}{1+r} & = 2 + \frac{5.5}{1+0.1} = 7 \\ c_0^{A*} = \alpha\frac{M}{p_0} & = 0.5\frac{7}{1} = 3.5 \\ c_1^{A*} = (1-\alpha)\frac{(1+r)}{p_1}M & = 0.5\frac{1.1}{1}7 = 3.85 \\ \lambda^{A*} = \frac{1}{M} & = 1/7 = 0.14286 \\ u^{A*} = \alpha\ln c_0^* + (1-\alpha)\ln c_1^* & = 0.5\ln 3.5 + 0.5\ln 3.85 = 1.3 \end{cases}$$

Grafico:

$$A: \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{A*} = (1+r)M - \frac{p_0}{p_1}(1+r)\cdot c_0 = (1.1)7 - 1(1.1)c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{A*} = \exp\left(\frac{u^{A*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.3}{0.5} - 1\ln c_0\right) \end{cases}$$



5.2.2 D : Scelta finale

$r\prime = r + \Delta r = 50\%$

Possiamo utilizzare le funzioni già calcolate e valutarle al nuovo r'.

D : Parametri: $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1$, $r = 50\%$, $\omega_0 = 2, \omega_1 = 5.5$.

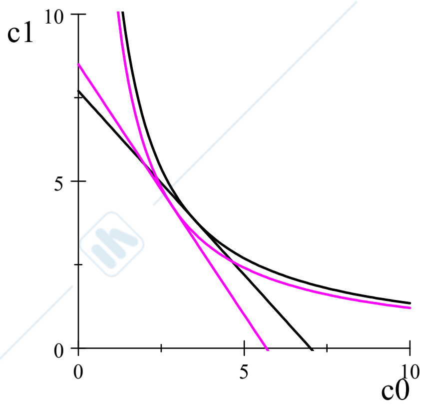
$$D = \begin{cases} M^D = p_0\omega_0 + \frac{p_1\omega_1}{1+r'} & = 1 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 5.5}{1+0.5} = 5.6667 \\ c_0^{D*} = \alpha \frac{M}{p_0} & = 0.5 \frac{5.6667}{1} = 2.833\,4 \\ c_1^{D*} = (1-\alpha)\frac{(1+r')}{p_1} M & = 0.5 \frac{(1+0.5)}{1} 5.6667 = 4.25 \\ \lambda^{D*} = \frac{1}{M} & = 1/5.6667 = 0.17 \\ u^{D*} = \alpha \ln c_0^{D*} + (1-\alpha) \ln c_1^{D*} & = 0.5 \ln 2.833\,4 + (1-0.5) \ln 4.25 = 1.2442 \end{cases}$$

Commenti.

L'effetto dell'incremento del tasso d'interesse passa attraverso la modifica del reddito disponibile M e modifica la scelta del consumo futuro soltanto.

Grafico:

$$D : \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{D*} = (1+r') M^D - \frac{p_0}{p_1}(1+r') \cdot c_0 = (1.5)\,5.6667 - 1\,(1.5)\,c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{D*} = \exp\left(\frac{u^{D*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.2442}{0.5} - 1 \cdot \ln c_0\right) \end{cases}$$



osservazione 7 *Il vincolo di bilancio fa perno nel punto di dotazione iniziale. L'agente ha poca dotazione in $t = 0$, pertanto deve indebitarsi. Quindi il tasso d'nteresse più alto lo impoverisce sia in termini di reddito intertmporale, sia di utilità (curve magenta).*

La distanza fra il punto D e il punto A rappresenta la variazione totale della scelta al variare del / dei parametri.

$$\|D - A\| = \text{Effetto Totale}$$

Il calcolo va fatto per entrambe le coordinate, ovvero

$$\begin{aligned} c_0^D - c_0^A &= 2.8334 - 3.5 = -0.6666 \\ c_1^D - c_1^A &= 4.25 - 3.85 = 0.4 \end{aligned}$$

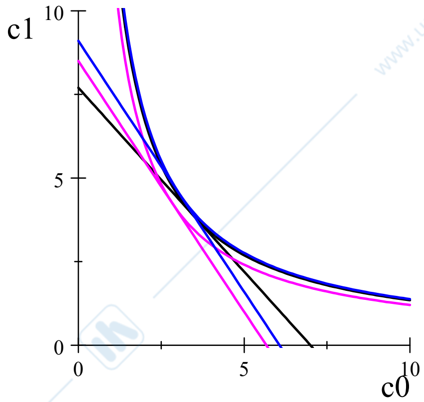
5.2.3 B: Calcolo Effetto Sostituzione

Si costruisce un punto B fittizio che posiziona il reddito disponibile pari al reddito generato dalla scelta ottima A e si studia di quanto varia la scelta a causa della variazione del solo (dei soli) parametri, escludendo la variazione del reddito disponibile.

$$B = \begin{cases} M^B = p_0 c_0^A + \frac{p_1 c_1^A}{1+r'} & = 1 \cdot 3.5 + \frac{1 \cdot 3.85}{1+0.5} = 6.067 \\ c_0^{B*} = \alpha \frac{M^B}{p_0} & = 0.5 \cdot 6.067 = 3.0335 \\ c_1^{B*} = (1-\alpha) \frac{(1+r')}{p_1} M^B & = 0.5 \frac{(1+0.5)}{1} 6.067 = 4.5503 \\ \lambda^{B*} = \frac{1}{M^B} & = 1/6.067 \\ u^{B*} = \alpha \ln c_0^{D*} + (1-\alpha) \ln c_1^{D*} & = 0.5 \ln 3.0335 + (1-0.5) \ln 4.5503 = 1.3125 \end{cases}$$

Grafico:

$$B : \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{B*} = (1+r') M^B - \frac{p_0}{p_1} (1+r') \cdot c_0 = (1.5) 6.067 - 1 (1.5) c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{B*} = \exp\left(\frac{u^{B*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.3125}{0.5} - 1 \cdot \ln c_0\right) \end{cases}$$



Il vincolo tuota facendo perno nel punto A.

Definizione 8

$$\|B - A\| = \textit{Effetto Sostituzione}$$

$$\begin{aligned} c_0^B - c_0^A &= 3.0335 - 3.5 = -0.466\,5 \\ c_1^B - c_1^A &= 4.550\,3 - 4.550\,3 = 0.700\,3 \end{aligned}$$

In questo caso, si blocca

al crescere del tasso d'interesse, si isola solo la sostituzione della composizione del paniere / portafoglio al variare dei prezzi, lasciando fermo è ottimo per il consumatore/investitore, consumare meno in c_0 per poter investire di più.

osservazione 8 *Poiché la scelta A e la variazione del tasso d'interesse sono identiche all'esercizio precedente con* $(\omega_0 = 7, \omega_1 = 0)$ *l'effetto sostituzione è uguale.*

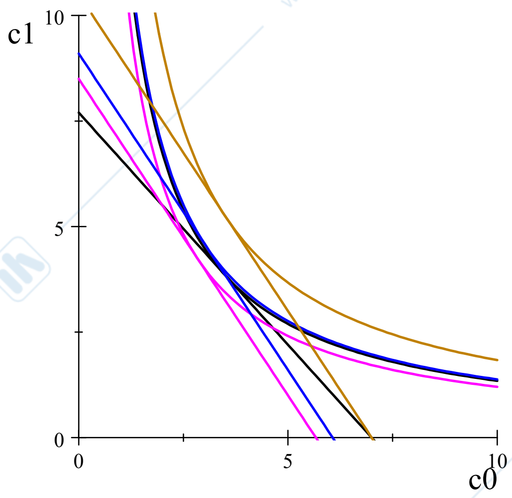
5.2.4 C: Calcolo Effetto Reddito Monetario

Si costruisce un punto C fittizio che considera il reddito disponibile pari al valore del reddito M^A iniziale, ovvero non si considera la variazione del valore della dotazione al variare dei parametri, come se il consumatore/investitore avesse venduto la dotazione iniziale ai prezzi precedenti (Per es, aver venduto il portafoglio iniziale ai prezzi precedenti.) ed avesse ora, come dotazione, soltanto il reddito monetario, non più sensibile alla variazione di p_0, p_1, r. Ovvero $M^C = M^A$. Dopodiché si cerca la scelta ottima considerando il vincolo di bilancio generato da tale reddito M^A. Tale vincolo di bilancio è rappresentato dalla rotazione della retta di bilancio facendo perno nel reddito M iniziale misurato sull'asse c_0.

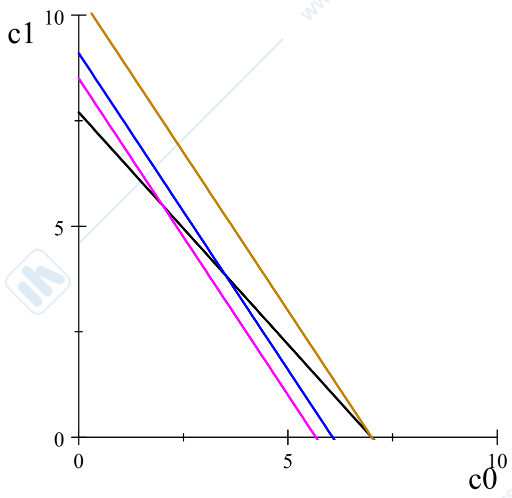
$$C\left(M^C = M^A, r' = 0.5\right) = \begin{cases} M^C = M^A = p_0\omega_0 + \frac{p_1\omega_1}{1+r} & = 1 \cdot 3.5 + \frac{1 \cdot 3.85}{1+0.1} = 7 \\ c_0^{B*} = \alpha \frac{M^A}{p_0} & = 0.5 \cdot 7 = 3.5 \\ c_1^{B*} = (1-\alpha)\frac{(1+r')}{p_1} M^A & = 0.5 \frac{(1+0.5)}{1} 7 = 5.25 \\ \lambda^{B*} = \frac{1}{M^A} & = 1/7 \\ u^{B*} = \alpha \ln c_0^{D*} + (1-\alpha)\ln c_1^{D*} & = 0.5 \ln 3.5 + (1-0.5)\ln 5.25 = 1.4555 \end{cases}$$

Grafico:

$$C : \begin{cases} \text{Vincolo Bilancio} & c_1^{B*} = (1+r')\,M^C - \frac{p_0}{p_1}(1+r') \cdot c_0 = (1.5)\,7 - 1\,(1.5)\,c_0 \\ \text{Curva Indiff} & c_1^{B*} = \exp\left(\frac{u^{B*}}{1-\alpha} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln c_0\right) = \exp\left(\frac{1.455}{0.5} - 1 \cdot \ln c_0\right) \end{cases}$$



A: Nero; D: Rosa; B: Blu; C: Ocra.



A: Nero; D: Rosa; B: Blu; C: Ocra.

Definizione 9

$$\|C - B\| = \textit{Effetto Reddito Monetario}$$

$$\begin{aligned} c_0^C - c_0^B &= 3.5 - 3.0335 = 0.466\,5 \\ c_1^C - c_1^B &= 5.25 - 4.550\,3 = 0.699\,7 \end{aligned}$$

Definizione 10

$$\|D - C\| = \textit{Effetto Reddito Dotazione}$$

$$\begin{aligned} c_0^D - c_0^C &= 2.\,833\,4 - 3.5 = -0.666\,6 \\ c_1^D - c_1^C &= 4.25 - 5.25 = -1 \end{aligned}$$

In questo caso, la dotazione scarsa in $t = 0$ e il conseguente indebitamento, mostrano il peggioramento dell'allocazione finale, ovvero un effetto da reddito di dotazione negativo su entrambi i casi.

Esercizio 9 *Considerando i parametri costanti:* $\alpha = 0.5, p_0 = p_1 = 1$, $r = 10\%$, $\omega_0 = 2, \omega_1 = 5.5$, *rifare tutto il calcolo dei diversi effetti, facendo crescere* $p_0 = 1 \longrightarrow p'_0 = 2$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Scelta Intertemporale su 3 periodi

Maria-Augusta Miceli*
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Lezioni di "Pricing dei prodotti e Servizi Finanziari"

March 3, 2021

KEYWORDS: consumer theory, intertemporal consumption, complete markets, intertemporal preference.

JEL: A23, D15.

1 Modello Intertemporale $t = 0, 1, 2;\ s = 1, \forall t$

1.1 Vincoli correnti e vincolo intertemporale

Consideriamo il problema di scelta del consumatore fra il periodo presente e due periodi futuri. Assumiamo inoltre che nel futuro vi sia 1 solo stato di natura, ovvero siamo in condizioni di "certezza". Riassumendo:

Ipotesi 1 *1. Periodi:* $t = 0, 1, 2$.

2. Incognite: c_0, c_1, c_2.

3. Variabili residue: $s_0 = p_0 (y_0 - c_0)\,;\ s_1 = p_1 (y_1 - c_1)\,.$

4. Parametri dati:

   (a) la dotazione nel bene consumo in ciascun periodo $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)\,.$

   (b) i tassi d'interesse r_1, r_2*, oppure* $r_1 = r_2 = r$.

   (c) la forma esplicita della funzione di utilità.

*Department of Economics and Law, University of Rome "Sapienza" - 9 via del Castro Laurenziano - 00161 Roma - Italy. Email: augusta.miceli@uniroma1.it.

Cominciamo definendo i vincoli di bilancio correnti per ogni periodo t, dove $t = 0$ è il periodo corrente. Per esemplificare la situazione consideriamo tre periodi, ipotizzando quindi che la data finale sia $T = 2$ ed alla fine del terzo periodo "tutto" finisca.

$$\begin{aligned} p_0 c_0 + s_0 &= p_0 y_0 && (VB0) \\ p_1 c_1 + s_1 &= p_1 y_1 + s_0 (1 + r) && (VB1) \\ p_2 c_2 &= p_2 y_2 + s_1 (1 + r) && (VB2) \end{aligned}$$

In ogni periodo il consumatore riceve un reddito (da dotazione, oppure monetario o da lavoro), $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)$.

Il consumatore in ogni periodo t trasferirà ricchezza verso il periodo successivo investendo un risparmio s_t, il quale frutterà un interesse r_t nel periodo successivo.

Ipotesi 2 *Esiste una data finale* $(T = 2)$. *Pertanto non c'è bisogno di trasferire ricchzza dal periodo* $T = 2$ *in avanti: nell'ultimo periodo non si risparmia.*

Vogliamo calcolare il "vincolo di bilancio intertemporale". Si risolve l'ultimo VB corrente, $VB2$ (o VBT) per il risparmio s_1. Si sostituisce questo in $VB1$ e si risolve quest'ultimo per s_0 e lo si inserisce in $VB0$. Si ottiene, a partire dai singoli vincoli di bilancio correnti, il **vincolo di bilancio intertemporale.**

Condizioni necessarie:

(i) deve esistere una attività finanziaria per trasferire ricchezza,

(ii) $s_T = 0$.

Calcolo VBI

Parto da $t = T = 2$, data finale, ricavo s_1

$$s_1 = \frac{p_2}{(1+r)} c_2 - \frac{p_2}{(1+r)} y_2$$

lo insersco dentro VB1 e risolvo per s_0

$$p_1 c_1 + \left(\frac{p_2}{(1+r)} c_2 - \frac{p_2}{(1+r)} y_2 \right) = p_1 y_1 + s_0 (1+r)$$

$$s_0 = \frac{p_1}{(1+r)} c_1 + \frac{p_2}{(1+r)^2} c_2 - \frac{p_2}{(1+r)^2} y_2 - \frac{p_1}{(1+r)} y_1$$

Lo sostituisco in VBO e ottengo

$$p_0 c_0 + \frac{p_1 c_1}{(1+r)} + \frac{p_2 c_2}{(1+r)^2} = \underbrace{p_0 y_0 + \frac{p_1 y_1}{(1+r)} + \frac{p_2 y_2}{(1+r)^2}}_{W}$$

Lo stesso risultato si ottiene sommando i tre vincoli di bilancio, moltiplicando ciascuno per il suo tasso di sconto appropriato, ovvero

(i) in ciascun VB corrente si portano tutti i termini a sinistra e si eguagliano a zero;

(ii) si sommano i VB(t) moltiplicando ognuno per il tasso di sconto elevato alla t;

(iii) volendo, si riportano i termini negativi a destra del segno di eguale

$$\begin{aligned} VBI &= VB0 + \frac{VB1}{(1+r)} + \frac{VB2}{(1+r)^2} \\ &= \sum_{t=0}^{T} \frac{VB(t)}{(1+r)^t} \end{aligned}$$

Se utile, è possibile ipotizzare:

Ipotesi 3 *$r_t = r$ in ogni periodo;*

Ipotesi 4 *il livello dei prezzi aumenta secondo un tasso di inflazione π_t che può essere variabile o costante (costante nell'esempio):*

$$p_1 = p_0 (1+\pi) \qquad \Longrightarrow \qquad p_2 = p_1 (1+\pi) = p_0 (1+\pi)^2$$

Ipotesi 5 *il reddito cresce ad un tasso di crescita γ variabile o costante (costante nell'esempio)*

$$y_1 = y_0 (1+\gamma) \qquad \Longrightarrow \qquad y_2 = y_1 (1+\gamma) = y_0 (1+\gamma)^2$$

In questo caso il VBI diventa

$$p_0 c_0 + \frac{(1+\pi)}{(1+r)} p_0 c_1 + \frac{(1+\pi)^2}{(1+r)^2} p_0 c_2 \leq p_0 y_0 + \frac{(1+\pi)(1+\gamma)}{(1+r)} p_0 y_0 + \frac{(1+\pi)^2 (1+\gamma)^2}{(1+r)^2} p_0 y_0$$

Definizione 1 Tasso d'interesse reale *(reciproco del tasso di sconto usato qui sopra)*

$$\frac{(1+r)}{(1+\pi)} - 1 = \frac{r-\pi}{(1+\pi)} \approx r - \pi \overset{def}{\equiv} \rho$$

Quindi, volendo esprimere il **vincolo di bilancio in termini di tasso d'interesse reale** scriveremo

$$p_0 c_0 + \frac{p_0 c_1}{1+\rho} + \frac{p_0 c_2}{(1+\rho)^2} = p_0 y_0 + \frac{(1+\gamma)}{1+\rho} p_0 y_0 + \frac{(1+\gamma)^2}{(1+\rho)^2} p_0 y_0$$

Per semplificare, seguendo lo stesso principio di cui sopra

$$\begin{aligned} \frac{(1+r)}{(1+\pi)(1+\gamma)} - 1 &= \frac{(1+r)-1}{(1+\pi)(1+\gamma)} = \frac{1+r-1-\pi-\gamma-\pi\gamma}{1+\pi+\gamma+\pi\gamma} \\ &= (\pi\gamma \approx 0, 1+\pi+\gamma \approx 1) \approx r - \pi - \gamma \end{aligned}$$

da cui

Definizione 2 Tasso d'interesse reale al netto del tasso di crescita

$$\frac{(1+r)}{(1+\pi)(1+\gamma)} \approx 1 + (r-\pi-\gamma) = 1 + (\rho - \gamma)$$

e

$$\frac{1+\gamma}{1+\rho} \approx \frac{1}{1+\rho-\gamma}$$

che useremo più avanti.

DA IMPARARE:

1. Il mezzo per trasferire ricchezza da un periodo all'altro è l'investimento del risparmio.
2. Il valore dell'unità di tempo misurato dal mercato è r_t, saggio al quale viene remunerato il trasferimento della ricchezza.
3. (In condizioni di certezza (1 solo stato di natura per ogni periodo futuro) una sola attività finanziaria è sufficiente a trasferire la ricchezza. In condizioni di incertezza sono necessarie un numero di attività finanziarie pari al numero di stati di natura (Mercati completi)).
4. Nell'ultimo periodo non si risparmia/investe, perché non esiste un periodo successivo verso il quale trasferire ricchezza. Pertanto si spende tutto.
5. In ogni periodo l'individuo rappresentativo (approssimazione della totalità delle famiglie) riceve un reddito y_t, che rappresenta il reddito individuale (il PIL nel caso della totalità delle famiglie).
6. In un modello macroeconomico che includesse il legame fra crescita del prodotto interno lordo (y_y) e i fattori di produzione dovremmo sostituire

$$y_t = y_t(K_t, L_t)$$

   dove la funzione di produzione include le teorie della crescita (argomento non trattato in questo corso) e a partire dalla quale vanno reinserite tutte le questioni riguardanti la curve di offerta aggregata. Per ora supponiamo che y_t sia un dato.

1.2 Ottimo del consumatore $t = 0, 1, 2;\ s = 1, \forall t$

Il consumatore vuole massimizzare il proprio consumo su tre periodi, avendo un reddito annuo reale y_t, moltiplicato per il livello dei prezzi.

Per semplificare i calcoli usiamo:

Definizione 3 *una funzione di utilità separabile nel consumo di ogni anno.*

La funzione di utilità è uguale in ogni periodo, ma è moltipicata per

Definizione 4 *un "tasso di sconto soggettivo del consumatore" o tasso di preferenza intertemporale del consumatore / investitore*

$$\frac{1}{1+\theta}$$

Nella scelta, tale saggio di preferenza sarà paragonato al tasso d'interesse che rappresenta il saggio di preferenza intertemporale del mercato.

Esercizio 1 *Supponendo che r e θ siano costanti in ogni periodo, se $\theta < r$, secondo voi, il consumatore consumerà più nel periodo corrente o nel futuro? (Provate a dare una risposta intuitiva. Il seguito cerca di offrire la risposta formale esaustiva.)*

Il problema di scelta è il seguente, dove

$$\begin{cases} \max_{c_0,c_1,c_2} U(c_0,c_1,c_2) = u(c_0) + \frac{1}{1+\theta}u(c_1) + \frac{1}{(1+\theta)^2}u(c_2) \\ s.t. \quad p_0c_0 + s_0 \leq p_0y_0 \quad (VB0) \\ p_1c_1 + s_1 \leq p_1y_1 + s_0(1+r) \quad (VB1) \\ p_2c_2 \leq p_2y_2 + s_1(1+r) \quad (VB2) \end{cases}$$

dove $1/(1+\theta) =$ tasso di sconto soggettivo del consumatore (tasso di preferenza intertemporale).

osservazione 1 *I coefficienti che moltiplicano $u(c_0), u(c_1)$ e $u(c_2)$ rappresentano le preferenza percentuali verso le tre grandezze. Come detto tali grandezze sono "soggettive". In questo caso il giudizio soggettivo è sul coefficiente θ che rappresenta il tasso di preferenza intertemporale del soggetto, e che va posto in relazione con il tasso d'interesse di mercato.*

Definizione 5 *Definiremo "miopi" i consumatori che tendono a preferire il presente rispetto alla preferenza del mercato $(\theta > r)$ e "lungimiranti" coloro che considerano il contrario $(\theta < r)$.*

Tanto minore è θ tanto più il consumatore prende in considerazione il futuro (la formica). Per $\theta \longrightarrow \infty$ il consumo futuro non interessa e si tende quindi a massimzzare il solo consumo presente (la cicala).

Ipotesi:

1. $p_t = p_0(1+\pi)^t$, dove π è il tasso di inflazione.
2. Definiamo il tasso d'interesse reale
$$1+\rho = \frac{1+r}{1+\pi}$$
3. In ogni periodo il consumatore riceve un reddito (monetario o da lavoro), y_t il quale cresce ad un tasso γ, ovvero $y_t = (1+\gamma)^t$.
4. Il consumatore in ogni periodo t trasferirà ricchezza verso il periodo successivo investendo un risparmio s_t, il quale frutterà un interesse costante r nel periodo successivo.

Ricavando il VB Intertemporale e utilizzando i vari tassi di inflazione e crescita, si ottiene

$$p_0c_0 + \frac{1}{(1+\rho)}p_0c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2}p_0c_2 = p_0y_0 + \frac{1+\gamma}{1+\rho}p_0y_0 + \left(\frac{1+\gamma}{1+\rho}\right)^2 p_0y_{0,} \qquad (VBI)$$

In generale

$$\begin{cases} \max_{c_0,c_1,c_2} u(c_0,c_1,...c_T) \\ s.t. \quad \sum_{t=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t p_tc_t = \sum_{t=0}^{T}\left(\frac{1}{1+r}\right)^t p_ty_t \end{cases}$$

dove, volendo, il vincolo di bilancio può essere scritto in termini di tasso di crescita e di inflazione

$$\sum_{t=0}^{T}\frac{1}{(1+\rho)^t}p_0c_t = p_0y_0\sum_{t=0}^{T}\frac{(1+\gamma)^t}{(1+\rho)^t}$$

Definizione 6 *Chiamiamo la somma attualizzata dei termini a destra il* ***reddito intertemporale***

$$\begin{aligned} W &= \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+r)^t} p_t y_t \\ &\approx p_0 y_0 \sum_{t=0}^{T} \frac{(1+\gamma)^t}{(1+\rho)^t} \end{aligned}$$

Definizione 7 *Sia il* ***"reddito permanente"*** *quel reddito uniperiodale costante y_p, che garantisce al consumatore un dato livello di ricchezza intertemporale W, (per semplificare la formula lasciamo il tasso d'inflazione costante, (π) costituito dalla somma scontata di redditi uniperiodali diversi.*

$$\begin{aligned} y_p \quad : \quad W \equiv p_0 \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{(1+\pi)}{(1+r)}\right]^t y_0 = p_0 y_p \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{(1+\pi)}{(1+r)}\right]^t \\ = p_0 y_p \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{1}{(1+\rho)}\right]^t \end{aligned}$$

1.3 Calcolo soluzione

$$L(c_0, c_1, c_2, \lambda) = u(c_0) + \frac{1}{1+\theta} u(c_1) + \frac{1}{(1+\theta)^2} u(c_2) - \lambda \left[p_0 c_0 + \frac{1}{(1+\rho)} p_1 c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2} p_2 c_2 - W\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_0} \quad : \quad u'(c_0) = \lambda p_0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} \quad : \quad \frac{1}{1+\theta} u'(c_1) = \lambda \frac{1}{(1+\rho)} p_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} \quad : \quad \frac{1}{(1+\theta)^2} u'(c_2) = \lambda \frac{1}{(1+\rho)^2} p_2 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \quad : \quad p_0 c_0 + \frac{1}{(1+\rho)} p_1 c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2} p_2 c_2 = W \tag{4}$$

Mettendo a rapporto le prime tre condizioni del primo ordine a due a due, otteniamo le condizioni di tangenza fra pendenza della curva d'indifferenza e rapporto fra prezzi.

Il rapporto fra le CPO di due periodi contingui

$$\begin{aligned} SMS_{t+1,t} \overset{def}{\equiv} \frac{dc_{t+1}}{dc_t} &= -\frac{p_t}{p_{t+1}} (1+\rho) \\ -(1+\theta) \frac{\partial U / \partial c_t}{\partial U / \partial c_{t+1}} &= -(1+\rho) \frac{p_t}{p_{t+1}} \end{aligned}$$

$$\underbrace{-(1+\theta) \frac{\partial U / \partial c_t}{\partial U / \partial c_{t+1}}}_{\text{Pend. C. Indiff}} = \underbrace{-(1+\rho)}_{\text{Pend. Vinc Bil}}$$

Il rapporto fra le CPO a due periodi di distanza

$$SMS_{t+2,t} \stackrel{def}{\equiv} \frac{dc_{t+2}}{dc_t} = -(1+\theta)^2 \frac{\partial U/\partial c_t}{\partial U/\partial c_{t+2}} = -\frac{p_t}{p_{t+2}}(1+r)^2$$

Bisogna risolvere le 4 condizioni del I ordine nelle 4 incognite c_0, c_1, c_2, λ.

Dopodiché, i risparmi vengono calcolati sostituendo le soluzioni c_0^*, c_1^* nei vincoli di bilancio correnti relativi $(VB0)$ e $(VB1)$.

Per calcolare una soluzione numerica dobbiamo considerare una forma esplicita della funzione di utilità.

1.4 Esempio con $u(.) = \ln(c_t)$

Utilizzando le stesse ipotesi del paragrafo precedente, viene calcolata una soluzione effettiva, partendo da una funzione di utilità esplicita in cui $\theta \in [0,\infty)$ rappresenti il tasso di preferenza intertemporale soggettivo del consumatore.

Parametri: $p_0 = 1$, $\theta = 0.1$, $r = 0.06$, $\pi = 0.02, y_0 = 10000$, $\gamma = 0.01$.

$$\max_{c_0,c_1,c_2} \ln U(c_0,c_1,c_2) = \ln c_0 + \frac{1}{1+\theta}\ln c_1 + \frac{1}{(1+\theta)^2}\ln c_2$$

1. Scrivere i tre vincoli correnti: $VB0, VB1, VB2$. Attenzione, esiste s_2?

$$\begin{array}{rcll} p_0c_0 + s_0 & \leq & p_0y_0 & (VB0) \\ p_1c_1 + s_1 & \leq & p_1y_1 + s_0(1+r) & (VB1) \\ p_2c_2 & \leq & p_2y_2 + s_1(1+r) & (VB2) \end{array}$$

s_2 non esiste perché non esiste una data $T+1$ verso la quale trasmettere ricchezza.

2. Sostituendo a ritroso mediante il risparmio, costruire il VBI scrivendo le grandezze future, utilizzando le ipotesi 1. e 2. e il tasso reale.

$$p_0c_0 + \frac{1}{(1+\rho)}p_1c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2}p_2c_2 = p_0y_0 + \frac{1}{(1+\rho)}p_1y_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2}p_2y_2$$

$$p_0c_0 + \frac{1}{(1+\rho)}p_0c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2}p_0c_2 = p_0y_0 + \frac{1+\gamma}{1+\rho}p_0y_0 + \left(\frac{1+\gamma}{1+\rho}\right)^2 p_0y_0$$

e possiamo eliminare p_0 dappertutto.

3. Definire il membro di destra del VBI , come reddito intertemporale W.

$$\begin{aligned} W &= p_0y_0 + \frac{1+\gamma}{1+\rho}p_0y_1 + \left(\frac{1+\gamma}{1+\rho}\right)^2 p_0y_2 \\ &= 10000\left(1 + \frac{1+0.01}{1+.04} + \left(\frac{1+0.01}{1+.04}\right)^2\right) = 29143 \end{aligned}$$

4. Disegnare il VBI sul piano c_0, c_1, trattando le grandezze del periodo $t=2$, come una costante.

Consideriamo il VBI , inseriamo tutti i parametri

$$c_0+\frac{1}{(1+\rho)}c_1+\frac{1}{(1+\rho)^2}c_2=W$$

Risolviamo per c_2 in funzione di c_1

$$\begin{aligned} c_1 &= (1+\rho)\left[W-\frac{1+\rho}{(1+\rho)^2}c_2\right]-(1+\rho)\,c_0 \\ &= \left[(1+\rho)\,W-\frac{1}{(1+\rho)}c_2\right]-(1+\rho)\,c_0 \end{aligned}$$

dove il termine entro parentesi quadra è l'intercetta del VB sull'asse delle ordinate, in questo caso, asse di c_1.

Tale VB sarà calcolato alla fine sulla base delle soluzioni effettive.

5. Disegnare il VBI sul piano c_1, c_2, trattando le grandezze del periodo $t=0$, come una costante. In questo caso risolvo il VB per c_2 in funzione di c_1.

$$\begin{aligned} c_2 &= \left[(1+\rho)^2(W-c_0)\right]-\frac{(1+\rho)^2}{(1+\rho)}c_1 \\ &= \left[(1+\rho)^2(W-c_0)\right]-(1+\rho)\,c_1 \end{aligned}$$

6. Disegnare il VBI sul piano c_0, c_2, trattando le grandezze del periodo $t=1$, come una costante.

$$\begin{aligned} c_2 &= (1+\rho)^2\left(W-\frac{1}{(1+\rho)}c_1\right)-(1+\rho)^2\,c_0 \\ &= \left[(1+\rho)^2\,W-(1+\rho)\,c_1\right]-(1+\rho)^2\,c_0 \end{aligned}$$

L'unica cosa da notare è, considerando il trasferimento di ricchezza per due periodi, la pendenza del VB considera il tasso composto $(1+\rho)^2$, perché questa volta il trasferimento è verso due periodi più avanti.

7. Calcolate il differenziale totale della funzione di utilità e costruite i tre possibili SMS, lasciando appunto l'"avanzo" a destra:

$$U(c_0,c_1,c_2)=\ln c_0+\frac{1}{1+\theta}\ln c_1+\frac{1}{(1+\theta)^2}\ln c_2$$

Il differenziale totale è

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial u(c_0)}{\partial c_0}dc_0+\frac{1}{1+\theta}\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1}dc_1+\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\frac{\partial u(c_2)}{\partial c_2}dc_2 \\ 0 &= \frac{1}{c_0}dc_0+\frac{1}{(1+\theta)}\frac{1}{c_1}dc_1+\frac{1}{(1+\theta)^2}\frac{1}{c_2}dc_2 \\ 0 &= UM_0dc_0+UM_1dc_1+UM_2dc_2 \end{aligned}$$

- $SMS_{0,1} \overset{def}{\equiv} \frac{dc_1}{dc_0} =?$:

$$\frac{1}{(1+\theta)}\frac{1}{c_1}dc_1 = -\frac{1}{c_0}dc_0 - \frac{1}{(1+\theta)^2}\frac{1}{c_2}dc_2$$

$$\begin{aligned} SMS_{0,1} \overset{def}{\equiv} \frac{dc_1}{dc_0} &= -\frac{\frac{1}{c_0}}{\frac{1}{(1+\theta)}\frac{1}{c_1}} - \underbrace{\frac{\frac{1}{(1+\theta)^2}\frac{1}{c_2}}{\frac{1}{(1+\theta)}\frac{1}{c_1}}\frac{dc_2}{dc_0}}_{\text{"avanzo"}} \\ &= -(1+\theta)\frac{c_1}{c_0} - \underbrace{\frac{1}{(1+\theta)}\frac{c_1}{c_2}\frac{dc_2}{dc_0}}_{\text{"avanzo"}} \\ &= -(1+\theta)\frac{c_1}{c_0} - 0 \end{aligned}$$

NB. Poché $dc_2 = 0$, il secondo termine a destra è pari a zero.

- $SMS_{1,2} \overset{def}{\equiv} \frac{dc_2}{dc_1} =?$

$$SMS_{1,2} \overset{def}{\equiv} \frac{dc_2}{dc_1} = -(1+\theta)\frac{c_2}{c_1}$$

- $SMS_{0,2} \overset{def}{\equiv} \frac{dc_2}{dc_0} =?$

$$\begin{aligned} \frac{dc_2}{dc_0} &= -(1+\theta)^2\frac{c_2}{c_0} - (1+\theta)\frac{c_2}{c_1}\frac{dc_1}{dc_0} \\ &= -(1+\theta)^2\frac{c_2}{c_0} - 0 \end{aligned}$$

8. Scrivere il Lagrangiano L.

$$\max U(c_0, c_1) = \ln c_0 + \frac{1}{1+\theta}\ln c_1 + \frac{1}{(1+\theta)^2}\ln c_2$$

$$t.c. \qquad p_0c_0 + \frac{1}{(1+r)}p_1c_1 + \frac{1}{(1+r)^2}p_2c_2 = p_0y_0 + \frac{1}{1+r}p_1y_1 + \frac{1}{(1+r)^2}p_2y_2$$

Usiamo la semplificazione del tasso reale, notate che r diventa ρ e tutti i prezzi diventano p_0.

$$L(c_0, c_1, c_2, \lambda) = \ln c_0 + \frac{1}{1+\theta}\ln c_1 + \frac{1}{(1+\theta)^2}\ln c_2 - \lambda\left[p_0c_0 + \frac{1}{(1+\rho)}p_0c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2}p_0c_2 - W\right]$$

9. Calcolare le 4 CPO.

$$\frac{\partial L}{\partial c_0} : \frac{1}{c_0} = \lambda p_0 \quad (5)$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_1} : \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{1}{c_1} = \lambda \frac{1}{(1+\rho)} p_0 \quad (6)$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} : \frac{1}{(1+\theta)^2} \cdot \frac{1}{c_2} = \lambda \frac{1}{(1+\rho)^2} p_0 \quad (7)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : p_0 c_0 + \frac{1}{(1+\rho)} p_0 c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2} p_0 c_2 = W \quad (8)$$

10. Dividete CPO_0/CPO_1 e fatene un grafico approssimativo.

10.a. Qual'è il ruolo di ρ rispetto a θ nell'aumentare o diminuire la scelta c_0?

10.b. E la scelta di "risparmio" (attenzione a come viene rappresentata sull'asse delle ascisse)?

11. Adesso calcolate le soluzioni effettive delle 4 incognite: $c_0^*, c_1^*, c_2^*, \lambda^*$, grazie al sistema seguente delle 4 CPO.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_0} &= \lambda p_0 \\
\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{1}{c_1} &= \lambda \frac{1}{(1+\rho)} p_0 \\
\frac{1}{(1+\theta)^2} \cdot \frac{1}{c_2} &= \lambda \frac{1}{(1+\rho)^2} p_0 \\
p_0 c_0 + \frac{1}{(1+\rho)} p_0 c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2} p_0 c_2 &= W
\end{aligned}$$

Dividendo la (5) per la (6) otteniamo

$$\frac{\frac{1}{c_0}}{\frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{1}{c_1}} = \frac{\lambda p_0}{\lambda \frac{1}{(1+r)} p_0} \Longrightarrow (1+\theta) \frac{c_1}{c_0} = 1 + r$$
$$c_1 = \frac{1+\rho}{1+\theta} c_0$$

osservazione 2 *Il consumatore consuma di più nel periodo futuro c_1 rispetto a c_0 nella misura in cui il "rendimento reale" ρ dell'investimento è maggiore della sua preferenza per il consumo oggi, θ. Maggiore è θ (cicala), maggiore deve essere ρ.*

Dividendo la (6) per la (7) otteniamo

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1+\rho}{1+\theta} c_1 \\
&= \left(\frac{1+\rho}{1+\theta}\right)^2 c_0
\end{aligned}$$

Sostituendo nel VBI

$$p_0 c_0 + \frac{1}{(1+\rho)} p_0 c_1 + \frac{1}{(1+\rho)^2} p_0 c_2 = W$$

Per semplificare i calcoli usiamo il tasso d'interesse reale

$$c_0 + \frac{1}{(1+\rho)}\frac{1+\rho}{1+\theta}c_0 + \frac{1}{(1+\rho)^2}\left(\frac{1+\rho}{1+\theta}\right)^2 c_0 = W$$

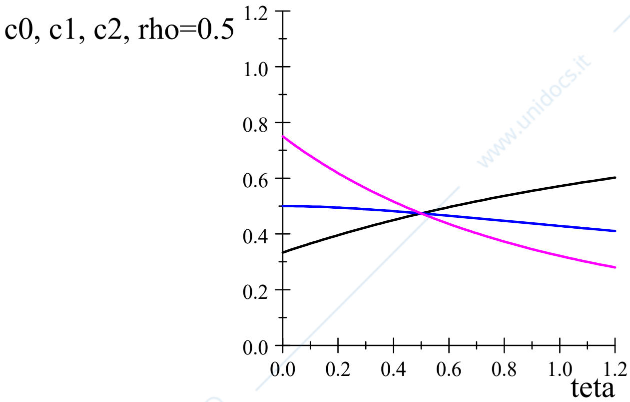
$$\begin{aligned} c_0^* &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+\theta}\right)+\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2}W \\ &= \frac{(1+\theta)^2}{\theta^2+3\theta+3}W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1^* &= \frac{1+\rho}{1+\theta}c_0 = \frac{1+\rho}{1+\theta}\frac{(1+\theta)^2}{\theta^2+3\theta+3}W \\ &= \frac{(1+\rho)(1+\theta)}{\theta^2+3\theta+3}W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2^* &= \frac{1+\rho}{1+\theta}\cdot\frac{(1+\rho)(1+\theta)}{\theta^2+3\theta+3}W \\ &= \frac{(1+\rho)^2}{\theta^2+3\theta+3}W \end{aligned}$$

Si mostra l'andamento del consumo nei tre periodi al variare di θ, per un dato $\rho = 5\%$ (per vedere meglio il grafico).

Fig.



c0 nero; c1 blue; c2 magenta

Le curve sono tutte uguali nel punto $\rho = \theta$.
Per $\theta > \rho$ viene preferito c_0 e viceversa.

Risultato 1 *Se $c_t^* = y_t$ e $\rho = \theta$, non vi sarebbe alcun risparmio, perché il reddito corrente soddisfa esattamente il consumo corrente.*

Risultato 2 *Se $y_t \neq c_t^*$ e $\rho \neq \theta$, anche se il consumatore cerca di avere un consumo costante, cercherà di risparmiare di più, proporzionalmente a quanto l'interesse reale del mercato ρ è superiore al suo tasso di preferenza temporale soggettivo θ.*

Esercizio 2 *Ripetere tutto l'esempio* [1.4] *sopra, con $U = c_0^{\alpha} c_1^{\beta} c_2^{1-\alpha-\beta}$, dove $\alpha = 0.37$, $\beta = 0.33$, $1 - \alpha - \beta = 0.3$, i quali rappresentano le preferenza intertemporale dell'investitore.*

2 Conclusioni

In questo capitolo è stato spiegato il metodo di scelta intertemporale su T=2 periodi futuri, in condizioni di certezza.

Scelta in condizioni di incertezza e asset pricing: Stati di natura discreti e mercati completi. (Choice under Uncertainty and Asset Pricing: Complete Markets)

Maria Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

March 15, 2021

Abstract

In these lecture notes I try to emphasize how asset pricing in discrete states of nature and complete markets, is a way to move wealth around states of nature in order to smooth consumption. The aim is to construct the system of equation to be solved for unknowns and how to mechanize the model into simple software algorithms. Two solution strategies are presented: backward and forward, through Bellman equation. The problems to be solved start from the easy case of pure assets to the case of complex assets having yields in many or all states of nature.

Abstract

In queste note si cerca di evidenziare come l'asset pricing, nel contesto di stati di natura discreti emercati completi, sia un metodo per spostare ricchezza attraverso gli stati di natura, per ottenere un consumo il più possibile omogeneo nei diversi stati di natura. L'obiettivo è costruire il sistema di equazioni da risolvere per le incognite e come meccanizzare il modello in semplici algoritmi risolvibili dal computer. Vengono esposte le due strategie di soluzioni equivalenti: a ritroso (backward) e in avanti (forward, tramite l'equazione di Bellman). I problemi considerati vanno dal caso più semplice di attività finanziarie "pure" ai casi di attività finanziarie "complesse" che danno luogo a rendimenti in più o tutti gli stati di natura.

KEYWORDS: portafoglio, portfolio, asset pricing, complete markets, consumption smoothing, intertemporal consumption, Bellman equation.

JEL: D11, D81, G11, G12.

1 Introduzione

Ingredienti della teoria della decisione ottima:

(i) Metodo di scelta espresso da una funzione obiettivo.

(ii) Oggetti di scelta.

Condizioni di "certezza"

(i) Metodo di scelta = Preferenze e le loro proprietà possono essere rappresentate da una f. di utilità "ordinale".

(ii) Oggetti di scelta = Panieri di beni appartenenti all'insieme (iperpiano) con dimensioni pari al numero dei beni e racchiusi nell'insieme di bilancio: $x \in B^n \subset R^n_+$.

Condizioni di "incertezza"

(i) Metodo di scelta = Preferenze e le loro proprietà possono essere rappresentate da una f. di "utilità attesa" "cardinale".

(ii) Oggetti di scelta =

- bene condizionato allo stato di natura x_s,
- bene medio o lotteria.

Cominciamo dagli oggetti di scelta.

2 Oggetti di scelta

Definizione 1 *"Stato di natura" o "evento". Il futuro viene diviso in diversi stati di natura, uno per ogni evento possibile, in numero finito S^t, per ogni unità di tempo t . L'insieme di essi deve esaurire l'universo delle possibilità future. Es. Pioggia, Sole.*

$$S^t = \{1, ..., s^t, ..., S^t\}$$

Definizione 2 *Ad ogni stato di natura viene attribuita una "probabilita"' esogena (in questo contesto) π^t_s con le seguenti proprietà:*
(i) $\pi^t_s \geq 0$.
(ii) $\sum_{s^t=1}^{S^t} \pi^t_s = 1$, *per ogni unità di tempo t e rappresentiamo con $\boldsymbol{\pi} = (\pi^t_1, ..., \pi^t_S)$ il vettore riga in cui ogni elemento è la probabilità associata ad un evento s.*
(iii) $\boldsymbol{\pi} \in P \subseteq \Re^{S-1}$. *Naturalmente possiamo avere infiniti vettori $\boldsymbol{\pi}$, tali che le loro componenti sommino a 1. Chiamiamo $P \in \Re^{S-1}$, l'insieme di tutti i vettori possibili (ovvero tutte le possibili distribuzioni di probabilità). Il fatto che appartenga ad un insieme a $S-1$ dimensioni è dovuto al fatto che gli elementi devono sommare a 1 e quindi l'ultimo elemento è residuale..*

Nel seguito terremo t costante, per cui ometteremo l'indice.

Definizione 3 *Bene o pagamento contingente. Ogni bene può essere distinto, a pari caratteristica fisica, per ogni stato e per ogni data. Per es.* x_1 *diventa*

$$x_{1s}^t$$

Definizione 4 *Lotteria. Oggetto di scelta in data t, che offre un payoff in ogni stato di natura ponderato per la probabilità di quello stato di natura. Ovvero è la quantità media attesa di un bene nel periodo successivo, ponderando su tutti gli stati di natura*

$$\ell = E_t x^t = \sum_{s^t=1}^{S^t} \pi_s^t x_{1s}^t$$

La nozione di quantità media attesa è piuttosto ostica. Siamo più abituati alla nozione di prezzo atteso.

Esempio. Consideriamo la lotteria "scommessa alla roulette sul rosso. Ovvero punto una fiche sul per ottenerne

$$\ell\,(\text{rosso}) = \begin{cases} 2 & \text{se esce rosso, con } \pi_{s=1}^{t+1} = 1/2 \\ 0 & \text{se esce nero, con } \pi_{s=2}^{t+1} = 1/2 \end{cases}$$

Il payoff atteso dal puntare sul rosso è dunque

$$E\ell\,(\text{rosso}) = (1/2)2 + (1/2)0 = 1$$

Analogamente. Se punto una fiche su un qualunque numero singolo ($n = \{1, ..., 36\}$), ottengo 36 volte ciò che ho puntatose esce il mio numero n oppure zero

$$\ell\,(n) = \begin{cases} 36 & \text{se esce } n, \text{ con } \pi_n = 1/36 \\ 0 & \text{se esce } n' \neq n, \text{ con } \pi_{n'} = 35/36 \end{cases}$$

NB. Nella realtà la ruota della roulette ha 37 numeri, perché include lo zero verde, per cui le probabilità sono

$$\ell\,(n) = (1/37)36 + (36/37)0 = 0.973$$

Etc. Lo zero fa eccezione, per ripagare il costo del Casinò!

La stessa nozione può essere riferita ai prezzi.

Es. Prezzo del gelato domani

$$p^{t+1} = \begin{cases} 3€ & \text{se c'è il sole, con } \pi_{s=1}^{t+1} = 2/3 \\ 1,5€ & \text{se piove, con con } \pi_{s=2}^{t+1} = 1/3 \end{cases}$$

$$E\left(p^{t+1}\right) = \pi_{s=1}^{t+1} 3 + \pi_{s=2}^{t+1} 1.5 = \left(\frac{2}{3}\right) 3 + \left(\frac{1}{3}\right) 1.5 = 2.5\ €$$

3 Metodo di scelta

Si può calcolare l'utilità di ciascun bene contingente e POI ponderarla per le probabilità

$$E_t U(x^{t+1}) = \sum_{s^t=1}^{S^t} \pi_s^{t+1} U(x_{1s}^{t+1}) \tag{1}$$

oppure calcolare l'utilità del bene già ponderato.

$$U(E_t\left(x^{t+1}\right)) = U\left[\sum_{s^t=1}^{S^t} \pi_s^{t+1} x_{1s}^{t+1}\right] \tag{2}$$

Definizione 5 ***"Utilità attesa"*** (1). *Sotto 4 assiomi viene dimostrata l'esistenza e l'unicità della (1) come rappresentazione delle preferenze del consumatore (ovvero unicità del vettore di probabilità).*

- *La* ***distribuzione di probabilità attribuita ai diversi stati di natura è "soggettiva"*** *e dipende ancora dalle preferenze del consumatore/ investitore.*

Osservazione 1 ***"Utilità attesa normalizzata"****Presa qualunque utilità ordinale* $U(x_1), U(x_2), ...U(x_s)$*, la pondero per le probabilità e divido ogni termine per il valore totale* $EU(x_s^{t+1})$*, ottengo 1 e quindi le funzioni di utilità attesa di diversi individui sono numericamente comparabili.*

$$1 = \frac{1}{EU(x_s^{t+1})} \sum_{s^t=1}^{S^t} \pi_s^{t+1} U(x_{1s}^{t+1})$$

Osservazione 2 *L'Utilità attesa "normalizzata" è,* ***cardinale****.*

(Cfr Varian per dettagli assiomi)

4 Avversione al rischio[1]

L'avversione al rischio può essere messa in relazione con la forma della funzione di utilità.

Per potere dimostrare questo fatto abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Nel seguito chiameremo l'utilità attesa come EU (expected utility), ovvero valore atteso matematico dell'utilità (anche chiamata "speranza matematica").

La EU costituisce un riferimento per valutare il grado di avversione al rischio degli agenti.

Consideriamo che il valore di un bene futuro, payoff (salario, valore di un'azione, valore della mia casa .... etc) sia una variabile aleatoria $\widetilde{x}$ la quale potrà presentare un valore diverso in ogni evento s. Consideriamo qui solo 2 eventi e quindi 2 valori:

$$\widetilde{x}\,(t+1) = \begin{array}{ll} x_1, & \text{con probabilità } \pi \\ x_2, & \text{con probabilità } (1-\pi) \end{array}$$

Per misurare la teoria dell'avversione al rischio viene costruita la media ponderata dei due payoff attesi (x_1, x_2) con le probabilità π e la chiamiamo "valore atteso del bene" o "lotteria".

Il valore del bene futuro valutato ex-ante (ovvero oggi) è quindi

$$Ex = \pi \cdot x_1 + (1-\pi) \cdot x_2$$

Si considera poi la media delle utilità derivanti dai due payoff calcolata con le stesse probabilità o Utilità attesa, ovvero la media sull'asse delle ordinate.

$$EU(x) = \pi \cdot U(x_1) + (1-\pi) \cdot U(x_2)$$

Poi si paragonano le due grandezze e possiamo controllare i due valori sull'asse delle ordinate

- se $U(Ex) > EU(x)$ ==> L'Individuo che ha quella forma di f. di utilità è AVVERSO al Rischio, ==> paga un $\rho > 0$ per evitare l'incertezza

[1] La maggior parte del paragrafo è tratto da [[2]] pp. 55-59.

- se $U(Ex) = EU(x)$ ==> L'Individuo che ha quella forma di f. di utilità è NEUTRALE al Rischio, ==> paga un $\rho = 0$ per evitare l'incertezza
- se $U(Ex) < EU(x)$ ==> L'Individuo che ha quella forma di f. di utilità è AMANTE del Rischio, ==> paga un $\rho < 0$, ovvero entra spontaneamente nell'incertezza (scommessa).

Definizione 6 ***"Accettare la scommessa"*** *significa accettare l'utilità che capita nello stato di natura che si verificherà. Ex-ante, questo vuol dire valutare il valore medio ponderato delle utilità ottenibili nei diversi stati di natura. E quindi ottenere nel periodo successivo EU.*

Esempio.

Supponiamo che io abbia oggi 100€, li investa e con prob. 1/2 io possa ottenere 50€ oppure 150€. Preferisco tenermi 100€ anche domani e quindi ottenere $U(100)$ oppure preferisco il valore atteso del partecipare alla scommessa? Preferisco

$$EU(x) \overset{def}{\equiv} \frac{1}{2}U(50) + \frac{1}{2}U(150) \overset{?}{\lesseqgtr} U\left(\frac{1}{2}50 + \frac{1}{2}150\right) \overset{def}{\equiv} U(Ex)$$

Dipende dalla forma della mia funzione di utilità. Quindi, innanzitutto:

"Accettare la scommessa" $\Rightarrow EU(x)$
"Non accettare la scommessa" $\Rightarrow U(Ex)$

Sulla base delle proprietà della funzione di utilità possiamo definire

Definizione 7 *Avversione al rischio (RA = risk aversion), se*

$$EU(x) < U(Ex)$$

Corrisponde ad una funzione strettamente quasi-concava $[U' \geq 0, U'' \leq 0]$.

Definizione 8 *Propensione al rischio (agente amante del rischio, RL = risk lover), se*

$$EU(x) > U(Ex)$$

Corrisponde ad una funzione convessa $[U' \geq 0, U'' \geq 0]$

Definizione 9 *Neutralità al rischio (RN = risk neutral), se*

$$EU(x) = U(Ex)$$

Corrisponde ad una funzione lineare $[U' \geq 0, U" = 0]$.

Esempi.
Funzione di utilità con avversione al rischio, CONCAVA: $U(x) = x^{\alpha}, \alpha < 1$. Per esempio $\alpha = 1/2$.
Funzione di utilità con avversione al rischio, LINEARE: $U(x) = x^{\alpha}, \alpha = 1$.
Funzione di utilità con avversione al rischio, CONVESSA: $U(x) = x^{\alpha}, \alpha > 1$. Per esempio $\alpha = 2$.
Dimostriamo adesso le ragioni di tali affermazioni.

Risultato 1 *Per una funzione concava vale la "diseguaglianza di Jensen". Date:*

- *una variabile aleatoria $\widetilde{x}$ con valore atteso $E(\widetilde{x})$*

- *una funzione di utilita* $U(x) : \Re \longrightarrow \Re$, *sia una funzione strettamente quasi concava (ovvero tale che* $U'(x) > 0, U''(x) < 0$

Allora

$$EU(\widetilde{x}) < U(E\widetilde{x})$$

Cerchiamola quantità $\rho(\widetilde{x})$

Definizione 10 ***Premio al rischio*** $\rho(\widetilde{x})$ *tale che*

$$EU(\widetilde{x}) = U(E\widetilde{x} - \rho(\widetilde{x})) \tag{3}$$

ovvero esso rappresenta la quantità massima di moneta che si è disposti a pagare "per uscire dalla scommessa" ed ottenere il valore medio della scommessa $EU(\widetilde{x})$ *con certezza.*

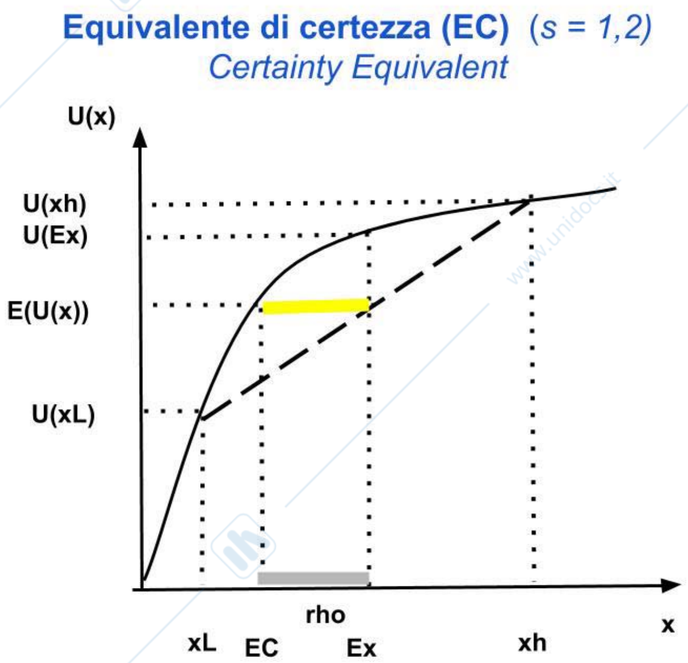
Definizione 11 Equivalente di certezza. *E' il reddito* W^C *tale che*

$$EU(\widetilde{W}) = U\left[\underbrace{EW - \rho}_{W_C}\right]$$

dove

$$W^C \overset{def}{=} EW - \rho$$

Fig. Equivalente di Certezza e Premio al Rischio



Risultato 2 *Il **premio al rischio** è pari a*

$$\rho\left(\widetilde{x}\right) \simeq -\frac{U"\left(x\right)}{U'\left(x\right)}\frac{\sigma^2}{2}$$

Proof. *(Facoltativo) Consideriamo la funzione di utilità nel punto x e studiamo il suo incremento per $\varepsilon > 0$, mediante l'espansione in serie di Taylor. Si ha*

$$U\left(x+\varepsilon\right) \simeq U\left(x\right) + \varepsilon\frac{U'\left(x\right)}{1!} + \frac{\left(\varepsilon-0\right)^2}{2!}U"\left(x\right)$$

Consideriamo il suo valore atteso

$$\begin{aligned} E\left[U\left(\widetilde{x}\right)\right] &= U\left(x\right) + \underbrace{E\left(\varepsilon\right)}_{=0}\frac{U'\left(x\right)}{1!} + \frac{E\left(\varepsilon-0\right)^2}{2\cdot 1}U"\left(x\right) \\ &= U\left(x\right) + 0 + \frac{\sigma^2}{2}U"\left(x\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Applichiamo il risultato al caso in cui $+\varepsilon = -\rho\left(\widetilde{x}\right)$. Si ha:

$$U(E\widetilde{x} - \rho\left(\widetilde{x}\right)) = U\left(x\right) + 0 - \rho\left(\widetilde{x}\right)U''\left(x\right) \tag{5}$$

Riconsideriamo la (3) e sostituiamo a sinistra la (3) e a destra la (5)

$$\begin{aligned} EU(\widetilde{x}) &= U(E\widetilde{x} - \rho\left(\widetilde{x}\right)) \\ U\left(x\right) + 0 + \frac{\sigma^2}{2}U"\left(x\right) &\simeq U\left(x\right) + 0 - \rho\left(\widetilde{x}\right)U''\left(x\right) \end{aligned}$$

si ricava

$$\rho\left(\widetilde{x}\right) \simeq -\frac{U''\left(x\right)}{U'\left(x\right)}\frac{\sigma^2}{2}$$

■

Dove

Definizione 12 *Il **"coefficiente assoluto di avversione al rischio"** della funzione $u\left(.\right)$ nel punto x è:*

$$\rho_A\left(\widetilde{x}\right) \overset{def}{=} -\frac{U''\left(x\right)}{U'\left(x\right)}\frac{\sigma^2}{2}$$

Osservazione 3 *Pertanto il premio al rischio è formato da due parti*[2]*:*

- una parte oggettiva: $\sigma^2\left(\widetilde{x}\right)$ della variabie aleatoria,
- uno soggettivo $\rho_A\left(\widetilde{x}\right)$ che dipende dalla funzione di utilità dell'individuo e può essere considerato una misura locale dell'avversione al rischio, ovvero una misura del trade-off media-varianza per il nostro individuo, perché determina l'incremento nella ricchezza attesa $\left[U"\left(x\right)\right]$ che compensi l'incremento unitario della varianza oggettiva $\sigma^2\left(\widetilde{x}\right)$, rispetto a variazioni della ricchezza prossime alla ricchezza attesa in x, i.e. $\left[U'\left(x\right)\right]$

[2] L'osservazione è di [2, pp. 55-56.]

Altre volte viene utilizzato

Definizione 13 *Il "**coefficiente relativo di avversione al rischio**"*

$$\rho_R(\widetilde{x}) = x \cdot \rho_A(\widetilde{x}) \overset{def}{=} -x\frac{U''(x)}{U'(x)}\frac{\sigma^2}{2}$$

Uscendo dal contesto delle scommesse ed entrando nel mondo reale, il futuro è qualcosa cui non si sfugge e dunque si è soggetti , ovvero, "si entra nella scommessa" comunque.

Esistono quindi due definizioni.

Definizione 14 *Se siamo in una situazione di incertezza e vogliamo uscirne, il premio al rischio rappresenta l'ammontare di denaro che siamo disposti a pagare per **"uscire dall'incertezza"**. La definizione matematica è la (3).*

Definizione 15 *Se siamo in una situazione di certezza, il premio al rischio è la somma di denaro che induce un agente ad **"accettare l'incertezza"**. La definizione matematica è*

$$EU(\widetilde{x} + \delta) = U(E\widetilde{x})$$

Per variazioni "piccole" $\delta \equiv \rho$.

Se l'agente è amante del rischio i segni dei due coefficienti saranno opposti al caso in cui l'agente sia avverso al rischio. Se l'agente è neutrale al rischio, i due coefficienti sono nulli.

Il premio al rischio rappresenta per esempio l'ammontare di moneta che la società assicuratrice pretende per assumersi il rischio al posto dell'agente, che vuole evitarlo.

Per es. il premio al rischio è quanto si è disposti a pagare all'assicurazione per ottenere un reddito certo in ogni evento.

4.1 Classificazione delle funzioni di utilità[3]

Le funzioni di utilità possono essere classificate a seconda del coefficiente assoluto di avversione al rischio in:

- DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion) se $r_u^{a\prime}(x) < 0, \forall x \in \Re_x$;
- CARA (Constant Absolute Risk Aversion) se $r_u^{a\prime}(x) = 0, \forall x \in \Re_x$;
- IARA (Increasing Absolute Risk Aversion) se $r_u^{a\prime}(x) > 0, \forall x \in \Re_x$;

4.1.1 Esempi

- Utilità Esponenziale ($CARA$):

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{1}{a}e^{-ax}, \qquad (a > 0) \\ \rho(\widetilde{x}) &= -\frac{-ae^{-ax}}{e^{-ax}} = a \\ \frac{\partial \rho(\widetilde{x})}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

[3] [2] pp. 56-58.

- Utilità Quadratica $(IARA)$:

$$\begin{aligned} U(x) &= x - \frac{b}{2}x^2, \qquad (b>0) \\ \rho_A(\widetilde{x}) &= \frac{b}{1-bx} > 0 \\ \frac{\partial \rho_A(\widetilde{x})}{\partial x} &= \frac{b^2}{(1-bx)^2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, 1/b) \end{aligned}$$

IARA perché la derivata è crescente in x.

- Utilità Potenza $(DARA)$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{1-\gamma}x^{(1-\gamma)}, \qquad (\gamma > 0, \gamma \neq 1) \\ \rho(\widetilde{x}) &= \frac{\gamma}{x} \\ \frac{\partial \rho(\widetilde{x})}{\partial x} &= -\frac{\gamma}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

DARA perché la derivata è decrescente in x.

$$\rho_R(\widetilde{x}) = \gamma$$

mentre il coefficiente relativo è costante.

- Utilità logaritmica $(DARA)$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \ln(x), \qquad (\gamma > 0, \gamma \neq 1) \\ \rho_A(\widetilde{x}) &= \frac{1}{x}, \\ \frac{\partial \rho_A(\widetilde{x})}{\partial x} &= -\frac{1}{x_2} \end{aligned}$$

DARA perché la derivata è decrescente in x

$$\rho_R(\widetilde{x}) = 1$$

mentre il coefficiente relativo è costante.

- HARA (Hyperbolic Absolute Risk Aversion), tale che il **"coefficiente di tolleranza al rischio"** è linerare nella ricchezza x.

$$t_u(x) = \frac{1}{\rho_A(\widetilde{x})} = a + bx, \qquad \forall x \in \Re_x;$$

Questa classe comprende:

  - per $a = 0 \Longrightarrow$ utilità potenza;
  - per $a = 0, b = 1 \Longrightarrow$ utilità logaritmica;
  - per $a > 0, b = -1 \Longrightarrow$ utilità quadratica;
  - per $b = 1 \Longrightarrow$ utilità $ln(x+a)$
  - per $b = 0 \Longrightarrow$ utilità $-a\exp(-x/a)$

4.2 Comparazione fra le diverse avversioni al rischio (facoltativo)

Definizione 16 *Un individuo "a" ha maggiore avversione al rischio dell'individuo "b"*

$$\rho_u^a (x + \widetilde{\varepsilon}) > \rho_u^b (x + \widetilde{\varepsilon})$$

Proposizione 1 *Date due funzioni di utilità $u^a(x)$ e $u^b(x)$, montòne crescenti, strettamente quasi-concave e derivabili due volte, ed esiste una funzione $g(.)$ crescente e derivabile due volte tale che*

$$u^a (x) = g \left[u^b (x) \right]$$

allora il coefficiente assoluto di avversione al rischio dell'individuo a

$$\rho^a (x) = \rho^b (x) - \frac{g" \left[u^b (x) \right]}{g' \left[u^b (x) \right]} u^b (x)$$

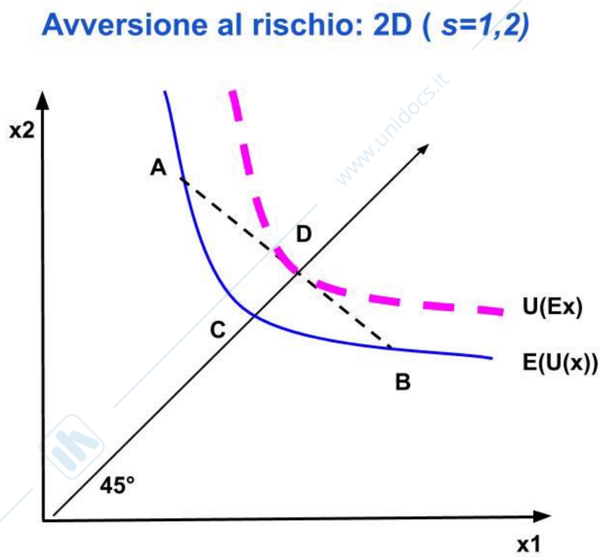
$$\Longrightarrow \rho^a (x) = \rho^b (x) \Longleftrightarrow \frac{g" \left[u^b (x) \right]}{g' \left[u^b (x) \right]} \leq 0$$

Proof. *See [2] p. 57.* ■

5 Avversione al rischio in 2 dimensioni

Consideriamo due punti (panieri, portafogli, o altro), $A = \{x_1^A, x_2^A\}$ e $B = \{x_1^B, x_2^B\}$ sul piano (x_1, x_2) che danno origine alla stessa utilità, ovvero che giacciono sulla stessa curva d'indifferenza. Vediamo che l'utilità della media ponderata $E(\mathbf{x})$, giace su una curva d'indifferenza più alta. Rispettiamo quindi ancora il fatto che, dato

$$
\begin{aligned}
\text{Se } U[E(\mathbf{x})] &> \pi u(\mathbf{x}^A) + (1-\pi) u(\mathbf{x}^B) \equiv EU(\mathbf{x}) \Longrightarrow R.A. (\text{Risk-aversion}) \\
\text{Se } U[E(\mathbf{x})] &= \pi u(\mathbf{x}^A) + (1-\pi) u(\mathbf{x}^B) \equiv EU(\mathbf{x}) \Longrightarrow R.N. (\text{Risk-neutral}) \\
\text{Se } U[E(\mathbf{x})] &< \pi u(\mathbf{x}^A) + (1-\pi) u(\mathbf{x}^B) \equiv EU(\mathbf{x}) \Longrightarrow R.L. (\text{Risk-lover})
\end{aligned}
$$



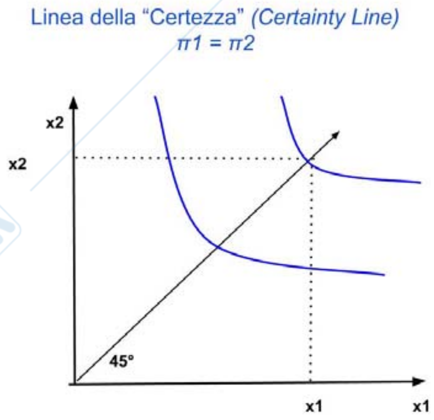
Esercizio 1 *Qual'è il punto del piano che rappresenta il reddito equivalente di certezza nel caso con 2 stati di natura e perché?*

5.0.1 Certainty Line

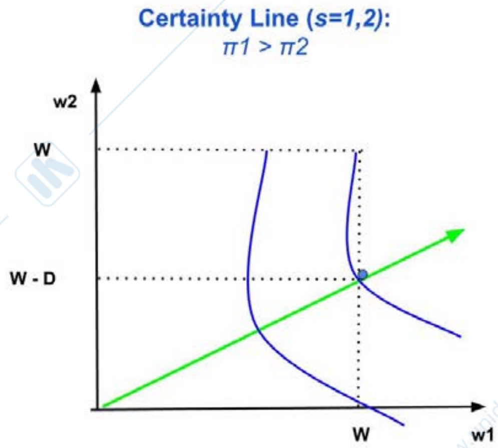
Consideriamo i punti sul piano con coordinate $\{x_1, x_2\} : x \in \gneqq \Re_+^2$. Ogni punto rapresenta i payoff di un'attività finanziaria nel periodo futuro, in ciascuno degli stati di natura $s = 1, 2$.

Definizione 17 *La "Retta della Certezza" (**Certainty Line**) è il luogo dei punti che rappresenta le attività o beni che garantiscano lo stesso payoff nei diversi stati di natura (qui $s = 2$).*

- *Se gli stati di natura sono equiprobabili, per $s = 2$, si ha $\pi_1 = \pi_2$ (equivalentemente $\pi = 1 - \pi$) la certainty line è la retta con pendenza $\pi_2/\pi_1 = 1$ $(45°)$.*



- Se, ad esempio, è $\pi_1 > \pi_2$ (equivalentemente $\pi > 1 - \pi$), la pendenza sarà $\pi_2/\pi_1 < 1$.



6 Assicurazioni

Definizione 18 *Sia una Polizza Assicurativa, un'attività finanziaria di costo percentuale γ da commisurare al capitale assicurato K, che garantisca un payoff uguale in ogni stato di natura.*

Viene mostrato un caso di assicurazione per mostrare come si arriva ad ottenere lo stesso payoff in entrambi gli stati di natura.

Notazione: W = ricchezza; D = danno; K = valore assicurato $(K \leq D)$; γ = premio per l'assicurazione; π = prob. di incendio.

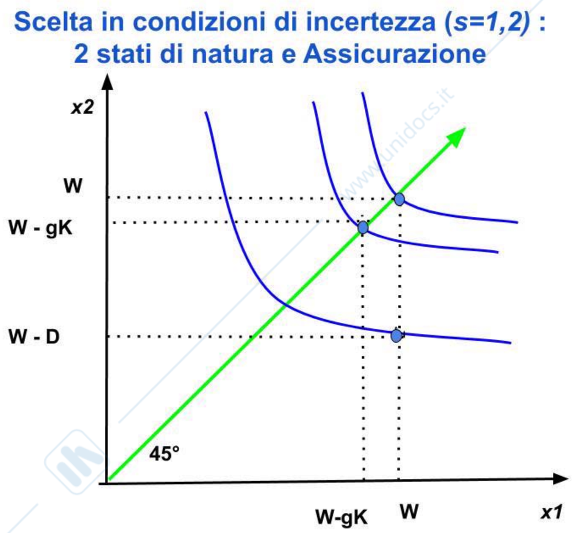
Lotterie \ *Eventi*	**Incendio** π	**Non Incendio** $1-\pi$
Non Ass.	$W-D$	W
Assicurarsi	$W-D+K-\gamma K$	$W-\gamma K$

Per definizione, assicurarsi vuol dire NON accettare l'incertezza e, come vedremo, cercare di ottenere la stessa ricchezza in ogni stato di natura. Pertanto:

"Assicurarsi" equivale a "non partecipare alla scommessa" e prendere $U(W)$.

"Non assicurarsi" equivale a "partecipare alla scommessa" ovvero, ad "accettare l'incertezza" e dunque ricevere $EU(W)$.

Procedimento formale secondo la teoria economica.



Lato del Produttore: Impresa assicuratrice o venditore di assicurazione.

Ipotesi: concorrenza perfetta $\Rightarrow$ libera entrata $\Rightarrow$ profitti nulli (ad hoc)

Il produttore deve decidere il prezzo % della polizza γ rispetto al capitale da rimborsare. Secondo la soluzione di concorrenza perfetta

$$\max_{\gamma} profitti = \pi\left(\gamma K - K\right) + \left(1-\pi\right)\gamma K = 0$$

risulta $\gamma^* = \pi$, ovvero la polizza percentuale deve essere pari alla probabilità del danno.

Lato del Consumatore: Compratore di assicurazione

Il consumatore deve ottimizzare l'utilità attesa. Egli deve ponderare l'utilità attesa dal reddito in ogni evento: nel caso di "incendio" e nel caso di "non-incendio". La sua variabile decisione è la quantità di capitale K da assicurare rispetto al massimo danno D. La scelta di K determina il pagamento della polizza pari a γK. L'obiettivo è dunque scegliere K per massimizzare l'utilità attesa rispetto ai due stati di natura "incendio" "non-incendio". Ricordare che le probabilità dei due eventi π e quindi $(1-\pi)$ contenute nella funzione di utilità sono "soggettive"!

$$\max_{K} EU(Ass) = \pi U\left(W - D - \gamma K + K\right) + \left(1-\pi\right)U\left(W-\gamma K\right)$$

dove $(W - D - \gamma K + K) = x_{s=1}$ e $(W - \gamma K) = x_{s=2.}$ rappresentano la ricchezza (ciò che era il "consumo" nei modelli precedenti) nei due stati di natura. Massimmizzando rispetto a K

$$\frac{\partial EU(.\because.)}{\partial K} : \pi U' (W - D - \gamma K + K)(1 - \gamma) + (1 - \pi) U' (W - \gamma K)(-\gamma) = 0$$

e risistemando la condizione del I ordine risulta

$$\frac{\pi}{(1-\pi)} \frac{U' (W - D - \gamma K + K)}{U' (W - \gamma K)} = \frac{\gamma}{(1-\gamma)} \tag{6}$$

L'equazione (6) rappresenta la solita condizione di tangenza fra il saggio marginale di sostituzione della funzione di utilità (a sinistra) e il rapporto dei prezzi. Questa volta i "prezzi" sono il prezzo relativo della polizza assicurativa rispetto al suo complementare. Perché questa volta non c'è bisogno del vincolo di bilancio? Il vincolo di bilancio è espresso dalla somma dei prezzi dei singoli eventi, in questo caso rappresentati da

$$\gamma + (1 - \gamma) = 1$$

Poiché il vincolo è sempre pari a 1 per costruzione, lo si omette. In generale ciò equivale a dire che la somma della valutazione della probabilità da parte del mercato (la somma dei prezzi degli eventi) deve sommare a uno, ovviamente, essendo probabilità.

Si noti che SE le probabilità soggettive

$$\{\pi_s\}_{s=1}^{S} = \{\gamma_s\}_{s=1}^{S}$$

la soluzione in K^* porta il consumatore ad ottenere lo stesso reddito in ogni stato di natura.

Proposizione 2 *(da sapere!) "Perfetta assicurazione": se* $\{\pi_s\}_{s=1}^{S} = \{\gamma_s\}_{s=1}^{S} \implies x_1 = x_2 = ... = x_S$.

In questo caso la proposizione equivale a: se $\pi = \gamma$, K^* sarà tale che $W - D - \gamma K + K = W - \gamma K$.

Esaminiamo la soluzione per ricostruire il modello generale. Nel caso di "perfetta assicurazione" la condizione di tangenza (6) diventa

$$\frac{\pi}{(1-\pi)} \frac{U' (W - D - \gamma K + K)}{U' (W - \gamma K)} \frac{(1-\gamma)}{\gamma} = 1$$

ovvero il SMS fra i due stati di natura deve essere a 1 perché il consumatore vorrebbe "uscire dall'incertezza" ovvero avere ricchezza costante nei due casi. Si ha infatti

$$SMS_{2,1} = -1, \text{ ovvero } \quad -\frac{UM_1}{UM_2} = -1 \tag{7}$$

ovvero

$$\frac{U' (W - D - \gamma K + K)}{U' (W - \gamma K)} = 1$$

Affinché questo sia vero, gli argomenti delle due utilità marginali devono essere uguali quindi risolvo l'equazione seguente per K

$$W - D - \gamma K + K = W - \gamma K$$

risulta $K^* = D$.

Vediamo adesso un esercizio in cui, per qualche ragione, il premio assicurativo γ sia maggiore della probabilità del π e quindi non vi sia assicurazione perfetta.

Esercizio 2 *Sia* $U(.) = \sqrt{...}$; $W = 1000$, $D = 500$, $\pi = 0.10$, $\gamma = 0.15$. *Calcolare la scelta ottima del consumatore rispetto alla quantità di capitale* K *da investire.*

Soluzione. E' sufficiente riscrivere la (7) sostituendo i parametri

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{(1-\pi)} \frac{U'(W-D-\gamma K+K)}{U'(W-\gamma K)} \frac{(1-\gamma)}{\gamma} &= 1 \\
\frac{0.10}{(1-0.10)} \frac{2\sqrt{W-\gamma K}}{2\sqrt{W-D-\gamma K+K}} \frac{(1-0.15)}{0.15} &= 1 \\
\frac{0.10}{(1-0.10)} \frac{\sqrt{1000-0.15K}}{\sqrt{1000-500-0.15K+K}} \frac{(1-0.15)}{0.15} &= 1 \\
0.11 \cdot \sqrt{1000-0.15K} \cdot 5.67 &= \sqrt{1000-500-0.15K+K} \\
(5.67 \cdot 0.11)^2 \cdot (1000-0.15K) &= 1000-500-0.15K+K
\end{aligned}$$

$$\{K^* = -113.88\}$$

La differenza è cosi grande che $K < 0$!, ovvero il consumatore non compra affatto l'assicurazione!!!

Se invece $\gamma = 0.12$

$$\frac{0.10}{(1-0.10)} \frac{\sqrt{1000-0.12K}}{\sqrt{1000-500-0.12K+K}} \frac{(1-0.12)}{0.12} = 1$$

$\Longrightarrow K^* = 170.8$, che è comunque solo parte del danno D.

7 Dominanza Stocastica [4]

Questo concetto risponde alla domanda: date le funzioni di probabilità di due attività, in quali casi possiamo affermare che una delle due offre un rendimento maggiore in ogni, progressivo, stato di natura W? Per esempio due attività finanziarie che abbiano lo stesso campo di variazione.

Definizione 19 *La **funzione di densità** (density function) è la frequenza di una variabile su tutto il campo di variazione, per semplicità continuo, normalizzata sul totale delle frequenze, ovvero il suo integrale (l'area al di sotto della curva è pari ad 1).*

Definizione 20 *La **funzione di ripartizione** (cumulative function) è la funzione di densità cumulata.*

Consideriamo due attività finanziarie $\widetilde{x}$ e $\widetilde{y}$ con i rendimenti aleatori che seguono le seguenti funzioni di densità:

- funzioni di densità $f(x)$ e $g(y)$ con medie e varianze diverse,
- funzioni di probabilità cumulata (funzione di ripartizione) $F(x)$ e $G(y)$.

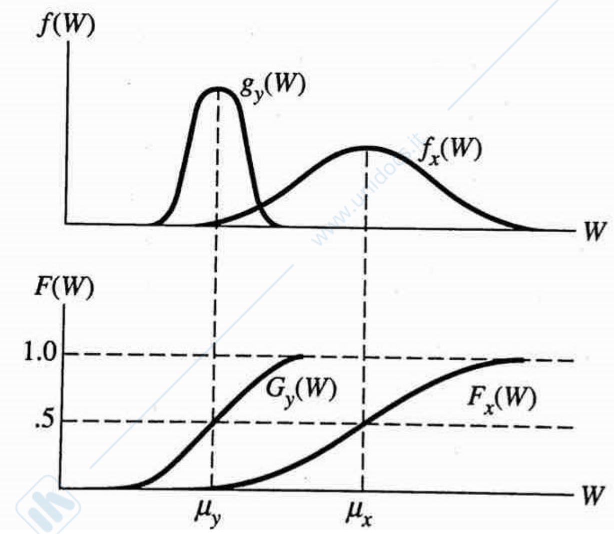
Definizione 21 ***Dominanza stocastica di I grado:***

$$\widetilde{x}\ DS1\ \widetilde{y}$$

se

$$\begin{array}{rcll} F_x(W) & \leq & G_y(W), & \forall W \\ Fx(W) & < & G_y(W), & \textit{per almeno un punto } W \end{array}$$

Figure 3.8 An example of first-order stochastic dominance.



Intuizione. L'attività y offre rendimenti sistematicamente più bassi, quindi ha una maggiore probabilità cumulata sulla parte sinistra dell'asse.

Ne deriva che

[4] La versione con variabili discrete è nel file Excel.

Risultato 3 *SE le funzioni di utilità sono strettamente non decrescenti, il valore atteso dell'utilità derivante dall'attività finanziaria con probabilità x è più alto di quella con probabilità y.*

$$\begin{aligned} E_x U(W) &> E_y U(W) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} U(W) f_x(W)\,dW &> \int_{-\infty}^{+\infty} U(W) g_y(W)\,dW \end{aligned}$$

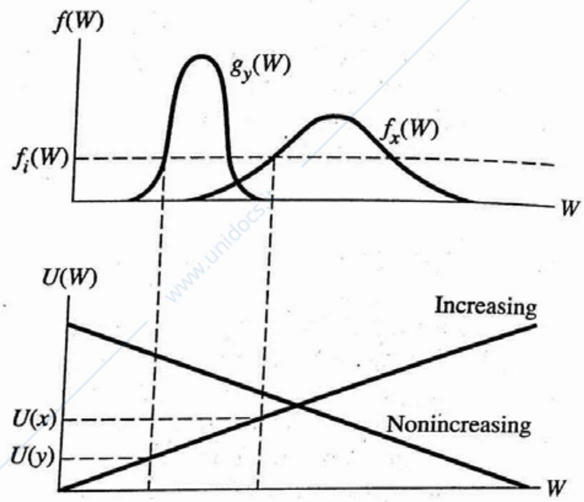


Figure 3.9 First-order stochastic dominance and expected utility.

- Se le due funzioni di probabilità / densità hanno la stessa media, abbiamo bisogno di una nozione più precisa.

Definizione 22 ***Dominanza stocastica di II grado***

$$\widetilde{x} \text{ DS-II } \widetilde{y}$$

se la somma cumulativa delle differenze fra le due funzionidi ripartizione

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{W} \left[G_y(W) - F_y(W)\right] dW &\geq 0, \qquad \forall W \\ G_y(W_i) &\neq F_y(W_i), \qquad \textit{per almeno un punto } W_i \end{aligned}$$

In questo caso, l'area accumulata sotto $G(.)$ deve essere sistematicamente maggiore di quella sotto $F(.)$. L'attività distribuita secondo $G(.)$ ha varianza più larga e ha più probabilità che moltiplica i valori alti. Quindi, per l'individuo avverso al rischio che ha un'utilità marginale più alta sulla parte iniziale dell'asse, l'attività distribuita secondo $F(.)$ offre maggiore rendimento in quell'intervallo e la preferisce.

Figure 3.10 An example of second-order stochastic dominance.

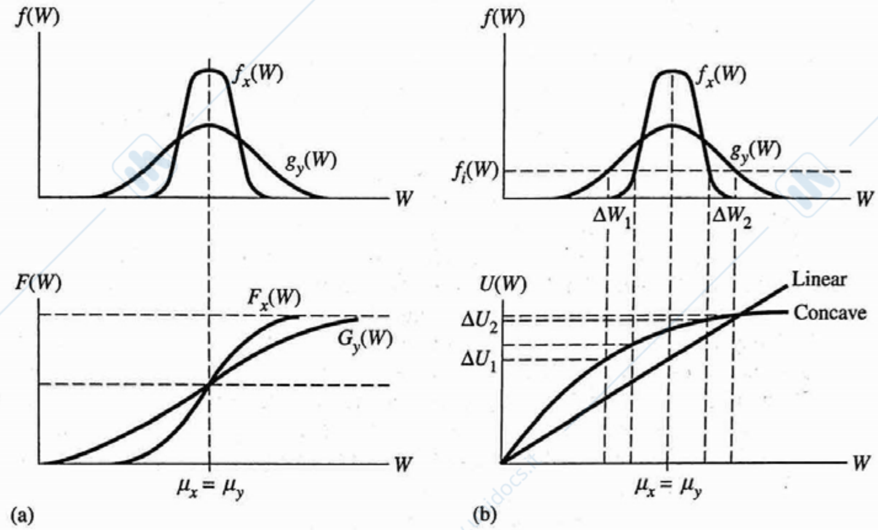
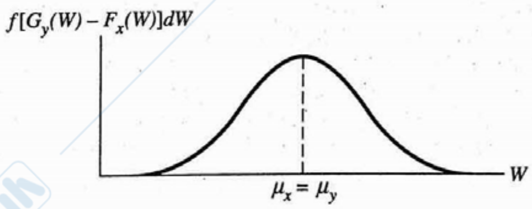


Figure 3.11 Graphical representation of the sum of the differences in cumulative probabilities.



Osservazione 4 *Se i due agenti fossero neutrali al rischio (RN), le aree prima e dopo l'intersezione sarebbero uguali e pertanto gli agenti sarebbero indifferenti alle due attività finanziarie. Nel caso in cui uno fosse avverso al rischio, con f utilità concava, è chiaro che l'area sotto la retta commisurata a W più alta è maggiore.*

8 Scelta Intertemporale con 2 stati di natura

- Torniamo alla ottimizzazone del consumo intertemporale, dove vi è un solo periodo futuro, ma questa volta suddiviso in due possibili stati di natura.

$$t = \begin{cases} 0 & \text{presente} \\ 1 & \text{futuro} \end{cases}$$

consideriamo che nel periodo futuro possano verificarsi due eventi complementari e indipendenti $s = 1, 2$.

$$t = 1 : s = \begin{cases} 1 & \text{stato di natura 1} \\ 2 & \text{stato di natura 2} \end{cases}$$

Per semplicità di notazione e per convenzione si usa un solo indice s, dove $s = 0$ significa il periodo presente e $s = 1$ e $s = 2$ i due eventi. Per massimizzare l'utilità nel tempo è necessario prendere due decisioni:
(i) quanto risparmiare per il prossimo periodo;
(ii) come collocare il risparmio fra le diverse attività esistenti.

Definizione 23 ***Mercati completi.*** *Quando il numero delle attività disponibili è pari al numero degli stati di natura nel periodo futuro, è possibile trasferire la ricchezza in ognuno degli stati di natura in maniera indipendente ed è possibile in questo modo realizzare l'assicurazione perfetta. Quando il numero delle attività è inferiore al numero degli eventi ($K < S$), per esempio il caso realistico in cui gli eventi siano infiniti e le attività "finite", la perfetta assicurazione non si realizza mai.*

Nell'ipotesi di numero di attività finanziarie pari al numero degli stati di natura, ipotesi detta di "mercati completi", la scelta intertemporale ottima di consumo può essere scritta (come nel caso di scelta intertemporale semplice) in due modi equivalenti.

Sia s_s = risparmio al tempo corrente investito in un'attività che frutti un tasso d'interesse r_s solo nello stato di natura s.

- **Attenzione! Variazione di notazione: da qui in poi la dotazione del consumatore in ogni periodo sarà** w_s, $\forall s$.

1. (PB1) Il primo caso ha un numero di vincoli pari agli stati di natura del periodo futuro (consideriamo un solo periodo futuro suddiviso in S stati di natura) + 1 (il tempo corrente), dove θ = tasso di preferenza intertemporale per il consumatore per $t = 1$.

$$\max_{c_0,c_1,c_2} u(c_0) + \tfrac{1}{1+\theta} \textstyle\sum_{s=1}^{S} \pi_s u(c_s)$$
$$s.t. \qquad p_0 c_0 + \textstyle\sum_{s=1}^{S} s_s = w_0, \qquad (VB0)$$
$$p_s c_s = p_s w_s + s_s (1 + r_s), \qquad \forall s = 1, ..., S, \qquad (VBs)$$

2. (PB2) Il secondo ha un solo vincolo intertemporale, perché considera tutti i possibili stati di natura futuri in termini di valore presente, il vincolo intertemporale (VBI)

$$\max u(c_0) + \tfrac{1}{1+\theta} \textstyle\sum_{s=1}^{S} \pi_s u(c_s)$$
$$s.t. \qquad p_0 c_0 + \textstyle\sum_{s=1}^{S} \frac{1}{1+r_s} p_s c_s = p_0 w_0 + \sum_{s=1}^{S} \frac{1}{1+r_s} p_s w_s, \qquad (VBI)$$

Proposizione 3 *Se i mercati sono completi, PB1 è equivalente a PB2.*

Dimostrazione.
Consideriamo 1 solo periodo futuro ($t = 1$), con due possibili stati di natura: $s = 1, s = 2$.

$$\begin{array}{cl} \max & u(c_0) + \frac{1}{(1+\theta)}\left[\pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)\right] \\ s.t. & p_0 c_0 + s_1 + s_2 = p_0 w_0 \qquad (VB \quad t = s = 0) \end{array}$$

$$\begin{cases} p_1 c_1 = p_1 w_1 + s_1 (1 + r_1), & \text{con probabilità } \pi_1 \qquad (VB \quad s = 1) \\ p_2 c_2 = p_2 w_2 + s_2 (1 + r_2), & \text{con probabilità } \pi_2 \qquad (VB \quad s = 2) \end{cases}$$

Esplicito $VBs = 1$ per s_1 e $VBs = 2$ secondo per s_2. Ottengo

$$s_1 = \tfrac{p_1}{1+r_1}(c_1 - y_1)$$
$$s_2 = \tfrac{p_2}{1+r_2}(c_2 - y_2)$$

e sostituisco nel (VB0), ottenendo il VBI.

$$p_0 c_0 + \frac{p_1}{1+r_1} c_1 + \frac{p_2}{1+r_2} c_2 = p_0 w_0 + \frac{p_1}{1+r_1} w_1 + \frac{p_2}{1+r_2} w_2$$

Osservazione 5 *Si noti che, tanto più basso il rendimento netto nello stato di natura r_s, tanto maggiore sarà il valore scontato a oggi del consumo (o dello stipendio) in quello stato. Ovvero c_s sarà tanto più costoso, in termini di valore attuale, quanto più quell'evento sarà svavorevole. E' chiaro infatti che sarà più costoso, per esempio, comprarsi un'automobile in uno stato di natura di recessione piuttosto che in uno stato di natura di boom economico.*

8.0.2 Calcolo della soluzione

- **Attenzione!!! Variazione di notazione: Da qui in poi il prezzo del bene di consumo sarà** $p_s = 1$, $\forall s$.

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{c_o, c_1, c_2} U(c_o, c_1, c_2) & = & u(c_0) + \dfrac{1}{(1+\theta)}\left[\pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)\right] \\ s.a. \qquad c_0 + \dfrac{1}{1+r_1} c_1 + \dfrac{1}{1+r_2} c_2 & = & w_0 + \dfrac{1}{1+r_1} w_1 + \dfrac{1}{1+r_2} w_2 \end{array}$$

$$L = u(c_0) + \frac{\pi_1}{(1+\theta)} u(c_1) + \frac{\pi_2}{(1+\theta)} u(c_2) - \lambda \left[c_0 + \frac{1}{1+r_1} c_1 + \frac{1}{1+r_2} c_2 - w_0 - \frac{1}{1+r_1} w_1 - \frac{1}{1+r_2} w_2\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_0} : u'(c_0) - \lambda = 0 \qquad \text{(eq(0))}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} : \frac{\pi_1}{(1+\theta)} u'(c_1) - \lambda \frac{1}{1+r_1} = 0 \qquad \text{(eq(1))}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} : \frac{\pi_2}{(1+\theta)} u'(c_2) - \lambda \frac{p_2}{1+r_2} = 0 \qquad \text{(eq(3))}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : c_0 + \frac{1}{1+r_1} c_1 + \frac{1}{1+r_2} c_2 - w_0 - \frac{1}{1+r_1} w_1 - \frac{1}{1+r_2} w_2 = 0 \qquad \text{(eq(4))}$$

Si ha un sistema di 4 equazioni nelle incognite c_0, c_1, c_2, λ. Se utile, possiamo risistemare le equazioni per ricalcolare le condizioni di tangenza.

$$\begin{cases} \frac{eq(0)}{eq(1)} : SMS_{0,1} = -(1+r_1) \\ \frac{eq(0)}{eq(2)} : SMS_{0,2} = -(1+r_2) \\ \frac{eq(1)}{eq(2)} : SMS_{1,2} = -\frac{(1+r_2)}{(1+r_1)} \\ VBI : \text{ Intertemporale} \end{cases}$$

Esercizio 3 *Considerando $u(c_s) = \sqrt{c_s}$, e chiamando il termine a sinistra del VBI $M = w_0 + \frac{1}{1+r_1}w_1 + \frac{1}{1+r_2}w_2$, calcolate la soluzione per le 4 incognite c_0, c_1, c_2, λ.*

Osservazione 6 *Quando invece la probabilità attribuita agli eventi da parte del consumatore è diversa da quella attribuita dal mercato, il consumo sarà diverso in ogni stato di natura.*

8.1 Traduzione dello stesso problema in termini di "Attività Pure"

Riscriviamo lo stesso problema del paragrafo precedente, ma con una notazione diversa.

- Siano $k = 1, ..., K$ le attività finanziarie acquistabili in data $t = 0$:
  - in quantità $n_{0,k}$;
  - ai prezzi rispettivi v_{0k};
  - e che offrano un pagamento *(yield)* y_{sk} nel periodo futuro, nello stato di natura s, $\forall k = 1, ..., K$; $\forall s = 1, ..S$.
  - In questo paragrafo $K = S = 2$.

Ipotesi 1 *Sono considerate solo attività finanziarie che diano un pagamento solo nello stato di natura $s = k$.*

Da notare che in questo caso $s = 0$ corrisponde a $t = 0$.

$$\max U(c_0, c_1, c_2) = u(c_0) + \frac{1}{(1+\theta)}[\pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)]$$
$$s.a : c_0 + v_{01}n_{01} + v_{02}n_{02} = w_0 \qquad (VB \quad t = s = 0)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= w_1 + y_{11}n_{01} \qquad (VB \quad s = 1) \\ c_2 &= w_2 + y_{22}n_{02} \qquad (VB \quad s = 2) \end{aligned}$$

Per l'ipotesi (1) è possibile ricavare ogni n_{0s} dal suo VBs, ma possiamo equivalentemente riscrivere il sistema in forma vettoriale

$$(\mathbf{c} - \mathbf{w}) = \mathbf{Yn}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} c_1 - w_1 \\ c_2 - w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

e risolvere il sistema di 2 equazioni (VB1 e VB2) nelle 2 incognite (n_1, n_2) ricavando

$$\mathbf{n} = \mathbf{Y}^{-1}(\mathbf{c} - \mathbf{w})$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = inv \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - y_1 \\ c_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n_1^* \\ n_2^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{y_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_{22}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - w_1 \\ c_2 - w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{y_{11}} (c_1 - w_1) \\ \frac{1}{y_{22}} (c_2 - w_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$n_1^* = \frac{1}{y_{11}} (c_1 - w_1) \qquad (8)$$

$$n_2^* = \frac{1}{y_{22}} (c_2 - w_2) \qquad (9)$$

Le soluzioni vanno sostituite, come sempre, nel VB0 per ottenere il VBI

$$(c_0 - w_0) + \frac{v_1}{y_{11}} (c_1 - w_1) + \frac{v_2}{y_{22}} (c_2 - w_2) = 0 \qquad (VBI)$$

o come preferite

$$c_0 + \frac{v_1}{y_{11}} c_1 + \frac{v_2}{y_{22}} c_2 = w_0 + \frac{v_1}{y_{11}} w_1 + \frac{v_2}{y_{22}} w_2$$

dove in sostanza

$$\begin{aligned} \frac{v_{01}}{y_{11}} &\approx \frac{1}{1 + r_1} \\ \frac{v_{02}}{y_{22}} &\approx \frac{1}{1 + r_2} \end{aligned} \qquad (10)$$

Osservazione 7 *I prezzi delle attività finanziarie sono $v_{01}, ..., v_{0K}$ al tempo zero (quando si comprano), nell'aspettativa di venderle nello stato "s" al prezzo y_{sk} che in condizioni normali dovrebbe essere maggiore si v_{0k}, per cui vale l'idea dell'approssimazione* (10) .

$$L = u(c_0) + \frac{1}{(1+\theta)} [\pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)] - \lambda \left[c_0 + \frac{v_1}{y_{11}} c_1 + \frac{v_2}{y_{22}} c_2 - w_0 - \frac{v_1}{y_{11}} w_1 - \frac{v_2}{y_{22}} w_2 \right]$$

Condizioni del I Ordine (CPO)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(...)}{\partial c_0} &: \; u'(c_0) - \lambda = 0 \\ \frac{\partial U(...)}{\partial c_1} &: \; \frac{\pi_1}{(1+\theta)} u'(c_1) - \lambda \frac{v_1}{y_{11}} = 0 \\ \frac{\partial U(...)}{\partial c_2} &: \; \frac{\pi_2}{(1+\theta)} u'(c_2) - \lambda \frac{v_2}{y_{22}} = 0 \\ \frac{\partial U(...)}{\partial \lambda} &: \; c_0 + \frac{v_1}{y_{11}} c_1 + \frac{v_2}{y_{22}} c_2 - \underbrace{\left(w_0 + \frac{v_1}{y_{11}} w_1 + \frac{v_2}{y_{22}} w_2 \right)}_{W} = 0 \end{aligned}$$

Le **soluzioni letterali** delle 4 incognite: $c_0^*, c_1^*, c_2^*, \lambda^*$ dipendono naturalmente dalle ipotesi sui parametri e dalla forma funzionale della funzione di utilità.

- Da notare la relazione fra il ruolo delle probabilità e il tasso di preferenza intertemporale del Compito 2.

Utilizzando i VB1 e VB2 correnti,si calcolano gli n_i^* letterali.

8.1.1 Esempio con $u(c_s) = \ln(c_s)$

Calcoliamo le soluzioni esplicite nell'ipotesi di

- $u(c_s) = \ln(c_s)$

$$L = \ln c_0 + \frac{\pi_1}{(1+\theta)} \ln c_1 + \frac{\pi_2}{(1+\theta)} \ln c_2 - \lambda \left[c_0 + \frac{v_1}{y_{11}} c_1 + \frac{v_2}{y_{22}} c_2 - \left(w_0 + \frac{v_1}{y_{11}} w_1 + \frac{v_2}{y_{22}} w_2 \right) \right]$$

dove la ricchezza intertemporale W è pari a

$$W \stackrel{def}{=} w_0 + \frac{v_1}{y_{11}} w_1 + \frac{v_2}{y_{22}} w_2$$

Calcoliamo le 4 CPO

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(...)}{\partial c_0} &: \quad \frac{1}{c_0} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial U(...)}{\partial c_1} &: \quad \frac{\pi_1}{(1+\theta)} \frac{1}{c_1} - \lambda \frac{v_1}{y_{11}} = 0 \\
\frac{\partial U(...)}{\partial c_2} &: \quad \frac{\pi_2}{(1+\theta)} \frac{1}{c_2} - \lambda \frac{v_2}{y_{22}} = 0 \\
\frac{\partial U(...)}{\partial \lambda} &: \quad (c_0 - w_0) + \frac{v_1}{y_{11}} (c_1 - w_1) + \frac{v_2}{y_{22}} (c_2 - w_2) = 0
\end{aligned}$$

- $SMS_{0,1}$: (CPO_0/CPO_1)

$$\frac{(1+\theta)}{\pi_1} \frac{c_1}{c_0} = \frac{y_{11}}{v_1} \tag{11}$$

- $SMS_{1,2}$: (CPO_1/CPO_2)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_1}{\pi_2} \frac{c_2}{c_1} &= \frac{\frac{v_1}{y_{11}}}{\frac{v_2}{y_{22}}} \\
&\approx \frac{1+r_2}{1+r_1}
\end{aligned}$$

Dalla (11) si ricava

$$c_1 = \frac{y_{11}}{v_1} \frac{\pi_1}{(1+\theta)} c_0$$

- etc. Procedendo per sostituzione si arriva a

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{\frac{v_1}{y_{11}}}{\frac{v_2}{y_{22}}}\frac{\pi_2}{\pi_1}c_1 \\
&= \frac{\frac{v_1}{y_{11}}}{\frac{v_2}{y_{22}}}\frac{\pi_2}{\pi_1}\left(\frac{y_{11}}{v_1}\frac{\pi_1}{(1+\theta)}c_0\right) \\
&= \frac{y_{22}}{v_2}\frac{\pi_2}{(1+\theta)}c_0
\end{aligned}
$$

e, sostituendo entrambe in VBI si ottengono le **soluzioni letterali** delle 4 incognite: $c_0^*, c_1^*, c_2^*, \lambda^*$.

$$
c_0 + \frac{v_1}{y_{11}}c_1 + \frac{v_2}{y_{22}}c_2 - W = 0
$$

$$
\begin{aligned}
c_0 + \frac{v_1}{y_{11}}\left(\frac{y_{11}}{v_1}\frac{\pi_1}{(1+\theta)}c_0\right) + \frac{v_2}{y_{22}}\left(\frac{y_{22}}{v_2}\frac{\pi_2}{(1+\theta)}c_0\right) - W &= 0 \\
c_0 + \left(\frac{\pi_1}{(1+\theta)}c_0\right) + \left(\frac{\pi_2}{(1+\theta)}c_0\right) - W &= 0
\end{aligned}
$$

$$
c_0^* = \left(\frac{1+\theta}{1+\theta+\pi_1+\pi_2}\right)W
$$

Sostituendo c_0^* nelle precedenti

$$
\begin{aligned}
c_1^* &= \frac{y_{11}}{v_1}\frac{\pi_1}{(1+\theta)}\left(\frac{1+\theta}{1+\theta+\pi_1+\pi_2}\right)W \\
c_2^* &= \frac{y_{22}}{v_2}\frac{\pi_2}{(1+\theta)}\left(\frac{1+\theta}{1+\theta+\pi_1+\pi_2}\right)W \\
\lambda^* &= \left(\frac{1+\pi_1+\pi_2}{W}\right)
\end{aligned}
$$

Osservazione 8 *La soluzione proveniente dalle funzioni logaritmiche o potenza, per c_s sono pari a una propensione percentuale del peso del c_s sul totale dei consumi intertemporali moltplicato per la ricchezza intertemporale e diviso il prezzo p_s che qui è 1.*

Utilizzando i VB1 e VB2 correnti, risultano gli n_i^* letterali dalle (8) e (9)

$$
\begin{aligned}
n_1^* &= \frac{1}{y_{11}}(c_1 - w_1) \\
&= \frac{1}{y_{11}} \cdot \left[\frac{y_{11}}{v_1}\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\pi_1}{1+\pi_1+\pi_2}\right)W - w_1\right] \\
&= \frac{1}{v_1}\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\pi_1}{1+\pi_1+\pi_2}\right)W - \frac{1}{y_{11}}w_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_2^* &= \frac{1}{y_{22}}(c_2^* - w_2) \\
&= \frac{1}{v_2}\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\pi_2}{1+\pi_1+\pi_2}\right)W - \frac{1}{y_{22}}w_2
\end{aligned}
$$

8.2 Caso con Y_{SxK} piena

Riconsideriamo lo stesso problema di cui sopra, ma con matrice dei pagamenti Y, piena, ovvero ciascuna attivià finanziaria dà un pagamento in oguno degli stati di natura. I pagamenti sono denominati $y_{sk}, \forall s = 1, 2, \quad \forall k = 1, 2$.

$$\max_{c_o, c_1, c_2} U(c_0, c_1, c_2) = u(c_0) + \frac{1}{1+\theta}[\pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2)]$$

$$\begin{aligned} s.a \quad p_0 c_0 + v_1 n_1 + v_2 n_2 = p_0 w_0 \qquad & (VB0) \\ p_1 c_1 + 0 = y_{11} n_1 + y_{12} n_2 + p_1 w_1 \qquad & (VBs1) \\ p_2 c_2 + 0 = y_{21} n_1 + y_{22} n_2 + p_2 w_2 \qquad & (VBs2) \end{aligned}$$

per ricavare n_1 e n_2, dobbiamo risolvere il sistema di 2 equazioni in 2 incognite

$$\mathbf{Yn} = \mathbf{p}(\mathbf{c} - \mathbf{w})$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(c_1 - w_1) \\ p_2(c_2 - w_2) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = inv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1(c_1 - w_1) \\ p_2(c_2 - w_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} & \frac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1(c_1 - w_1) \\ p_2(c_2 - w_2) \end{pmatrix}$$

per facilitare i calcoli letterali, chiamo i termini della matrice inversa con nuovi indici x_{sk}

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1(c_1 - w_1) \\ p_2(c_2 - w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 x_{11}(c_1 - w_1) + p_2 x_{12}(c_2 - w_2) \\ p_1 x_{21}(c_1 - w_1) + p_2 x_{22}(c_2 - w_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} n_1^* &= \frac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_1(c_1 - w_1) - \frac{y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_2(c_2 - w_2) \\ n_2^* &= -\frac{y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_1(c_1 - w_1) + \frac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_2(c_2 - w_2) \end{aligned}$$

da sostituire nel VB0 per ottenere il VBI

$$p_0 c_0 + v_1 n_1^* + v_2 n_2^* = W$$

$$\begin{aligned} & p_0(c_0 - w_0) + v_1 \left[\frac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_1(c_1 - w_1) - \frac{y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_2(c_2 - w_2) \right] + \\ & + v_2 \left[\frac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_2(c_2 - w_2) - \frac{y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} p_1(c_1 - w_1) \right] = 0, \qquad (VBI) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p_0 c_0 + v_1 \frac{y_{22}p_1c_1 - y_{12}p_2c_2}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} + v_2 \frac{y_{11}p_2c_2 - y_{21}p_1c_1}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} = \\ & p_0 w_0 + v_1 \frac{y_{22}p_1w_1 - y_{12}p_2w_2}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} + v_2 \frac{y_{11}p_2w_2 - y_{21}p_1w_1}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}, \qquad (VBI\_bis) \end{aligned}$$

Uso i termini $x_{s,k}$

$$\begin{aligned} & p_0c_0 + v_1\left(p_1x_{11}c_1 + p_2x_{12}c_2\right) + v_2\left(p_1x_{21}c_1 + p_2x_{22}c_2\right) \\ = \ & p_0w_0 + v_1\left(p_1x_{11}w_1 + p_2x_{12}w_2\right) + v_2\left(p_1x_{21}w_1 + p_2x_{22}w_2\right), \qquad (VBI\_ter) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p_0c_0 + \left(v_1x_{11} + v_2x_{21}\right)p_1c_1 + \left(v_1x_{12} + v_2x_{22}\right)p_2c_2 \\ = \ & p_0w_0 + \left(v_1x_{11} + v_2x_{21}\right)p_1w_1 + \left(v_1x_{12} + v_2x_{22}\right)p_2w_2, \qquad (VBI\_quater) \end{aligned}$$

Procediamo con la via semplificata

$$p_0c_0 + v_1n_1^* + v_2n_2^* = W$$

dove

$$W = p_0w_0 + \left(v_1x_{11} + v_2x_{21}\right)p_1w_1 + \left(v_1x_{12} + v_2x_{22}\right)p_2w_2$$

$$L = \ln c_0 + \frac{1}{1+\theta}\left[\pi_1 \ln c_1 + \pi_2 \ln c_2\right] - \lambda\left[VBI\_quater\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(.)}{\partial c_0} &: \frac{1}{c_0} - \lambda p_0 = 0 \\ \frac{\partial U(.)}{\partial c_1} &: \frac{\pi_1}{1+\theta}\frac{1}{c_1} - \lambda\left(v_1p_1x_{11} + v_2p_1x_{21}\right) = 0 \\ \frac{\partial U(.)}{\partial c_2} &: \frac{\pi_2}{1+\theta}\frac{1}{c_2} - \lambda\left(v_1p_2x_{12} + v_2p_2x_{22}\right) = 0 \\ \frac{\partial U(.)}{\partial \lambda} &: (VBI\_ter) \end{aligned}$$

Solito metodo.

Esercizio 4 *Calcolo della soluzione con parametri espliciti*

Parametri:

- $u(c_s) = \ln c_s$
- $w_0 = w_1 = w_2 = 100$
- $p_0 = p_1 = p_2 = 1$
- $\theta = 0.1$.
- $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$

Utilizzando i parametri precedenti, ma le attività danno rendimento in ogni stato

$$Y\{y_{s,k}\} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 90 \\ 80 & 105 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} &= inv \begin{pmatrix} 100 & 90 \\ 80 & 105 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (c_1 - w_1) \\ (c_2 - w_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{220} & -\frac{3}{110} \\ -\frac{4}{165} & \frac{1}{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (c_1 - w_1) \\ (c_2 - w_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
n_1^* &= \frac{7}{220}(c_1 - w_1) - \frac{3}{110}(c_2 - w_2) \\
n_2^* &= -\frac{4}{165}(c_1 - w_1) + \frac{1}{33}(c_2 - w_2)
\end{aligned}$$

Sostituite ciò nel VBI.

$$c_0 - w_0 + v_1 n_1^* + v_2 n_2^* = 0, \qquad (VBI)$$

Calcolate il VBI, dopodiché procedrte con le derivate, utilizzando i parametri laddove utili per semplificare i calcoli.

Calcolate quindi le **soluzioni numeriche** delle incognite: $c_0^*, c_1^*, c_2^*, \lambda^*, n_1^*, n_2^*, U^*(c_0^*, c_1^*, c_2^*)$.

Le soluzioni numeriche sono disponibili sul file Excel.

9 Utilità Risk Neutral

Rifacciamo gli esercizi precedenti considerando che l'agente sia "Neutrale al Rischio", ovvero che l'utilità sia lineare.

9.1 Caso Y diagonale

Ripartiamo dal problema di ottimo con Y **diagonale,** avendo già costruito il VBI e costruiamo il Lagrangiano

$$\max U(c_0, c_1, c_2) = c_0 + \frac{1}{1+\theta}[\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2]$$

$$p_0 c_0 + \frac{v_1}{y_{11}} p_1 c_1 + \frac{v_2}{y_{22}} p_2 c_2 = p_0 w_0 + \frac{v_1}{y_{11}} p_1 w_1 + \frac{v_2}{y_{22}} p_2 w_2, \qquad (VBI)$$

dove

$$W = p_0 w_0 + \frac{v_1}{y_{11}} p_1 w_1 + \frac{v_2}{y_{22}} p_2 w_2$$

$$L = c_0 + \frac{1}{1+\theta}[\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2] - \lambda [VBI]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(.)}{\partial c_0} &: \ 1 - \lambda p_0 = 0 \\
\frac{\partial U(.)}{\partial c_1} &: \ \frac{\pi_1}{1+\theta} - \lambda\left(\frac{v_1}{y_{11}} p_1\right) = 0 \\
\frac{\partial U(.)}{\partial c_2} &: \ \frac{\pi_2}{1+\theta} 1 - \lambda\left(\frac{v_2}{y_{22}} p_2\right) = 0 \\
\frac{\partial U(.)}{\partial \lambda} &: \ (VBI_ter)
\end{aligned}$$

Vediamo che le variabili quantitative sono sparite, come ovvio per le funzioni lineari, e le CPO non sono altro che le condizioni di non arbitraggio dei prezzi delle attività finanziarie.

Dalla CPO_1

$$\lambda^* = \frac{1}{p_0}$$

Dalla CPO_2, avendo incluso $\lambda^* = 1/p_0$

$$\frac{\pi_1}{1+\theta} = \frac{v_1}{y_{11}} \frac{p_1}{p_0} \tag{12}$$

Dalla CPO_3, avendo incluso $\lambda^* = 1/p_0$

$$\frac{\pi_2}{1+\theta} = \frac{v_2}{y_{22}} \frac{p_2}{p_0} \tag{13}$$

Osservazione 9 *Le CPO 2 e 3 , ovvero le* (12) *e* (12) *mostrano che nel punto di "ottimo" la pendenza della curva d'indifferenza dell'individuo neutrale al rischio, che è una retta (termini di sinistra delle equazioni) deve essere uguale alla pendenza del vincolo di bilancio per le variabili corrispondenti.*

Cosa vuol dire?

I termini di sinistra sono le valutazioni "soggettive" della preferenza dell'investitore verso gli stati di natura in considerazione. A destra troviamo i valori di mercato. SE la valutazione soggettiva è maggiore del prezzo relativo di mercato, l'investitore comprerà, al contrario venderà. Si ha "equilibrio" quando i due termini sono uguali. Se i due termini sono uguali, valgono le condizioni di Non-Arbitraggio, ovvero a quei prezzi non c'è né eccesso di domanda né eccesso di offerta. Ai prezzi che soddisfano la tangenza, quali quantità verranno acquistate dai consumatori? Quelle che gli permettono di soddisfare il proprio vincolo di bilancio. Ma qualunque combinazione che soddisfi il vincolo di bilancio, ovvero qualunque punto sul piano tri-dimensionale che rappresenta il vincolo di bilancio, è ammissibile).

Equivalentemente, le CPO_S divise per CPO_1 possono essere esplicitate per il prezzo dell'attività finanziaria v_k.

$$v_1 = \frac{\pi_1}{1+\theta} y_{11} \left(\frac{p_0}{p_1}\right)$$

dove, attenzione, intendiamo

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = \frac{1}{\left(1+\dot{p}\right)} = \frac{1}{(1+\ \text{tasso inflazione})}$$

mentre $\pi_s =$ *probabilità* dello stato di natura s, per questo d'ora in poi consideriamo $\left(\frac{p_0}{p_1}\right) = 1$. Quindi

$$v_1 \simeq \frac{\pi_1}{\left(1+\theta+\dot{p}\right)} y_{11}$$

$$v_2 \simeq \frac{\pi_2}{\left(1+\theta+\dot{p}\right)} y_{22}$$

Osservazione 10 *Attenzione se c'è inflazione il tasso di interesse monetario cresce, dunque il tasso a cui scontare diventa più alto e dunque il prezzo di valutazione dell'attività finanziaria, a partà delle altre condizioni, scende.*

9.2 Caso Risk Neutral con Y piena

Ripetiamo tutto con la Y piena.

Ricordate che chiamiamo i termini della matrice inversa $\{x_{s,k}\}$

$$inv\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_{22}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}} & \frac{y_{11}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & p_0c_0 + \left(v_1x_{11} + v_2x_{21}\right) p_1c_1 + \left(v_1x_{12} + v_2x_{22}\right) p_2c_2 \\ = \ & p_0w_0 + \left(v_1x_{11} + v_2x_{21}\right) p_1w_1 + \left(v_1x_{12} + v_2x_{22}\right) p_2w_2, \qquad (VBI\_quater) \end{aligned}$$

$$W = p_0w_0 + \left(v_1x_{11} + v_2x_{21}\right) p_1w_1 + \left(v_1x_{12} + v_2x_{22}\right) p_2w_2$$

Il Lagrangiano diventa

$$L = c_0 + \frac{1}{1+\theta}\left[\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2\right] - \lambda\left[VBI\_quater\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(.)}{\partial c_0} &: \quad 1 - \lambda p_0 = 0 \\
\frac{\partial U(.)}{\partial c_1} &: \quad \frac{\pi_1}{1+\theta} - \lambda\left(v_1 p_1 x_{11} + v_2 p_1 x_{21}\right) = 0 \\
\frac{\partial U(.)}{\partial c_2} &: \quad \frac{\pi_2}{1+\theta} - \lambda\left(v_1 p_2 x_{12} + v_2 p_2 x_{22}\right) = 0 \\
\frac{\partial U(.)}{\partial \lambda} &: \quad VBI_quater
\end{aligned}$$

Dalla CPO_1

$$\lambda^* = \frac{1}{p_0}$$

Le CPO_2, CPO_3 sono un sistema di due equazioni nelle 2 incognite v_1 e v_2.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_1}{1+\theta} &= v_1 p_1 x_{11} + v_2 p_1 x_{21} \\
\frac{\pi_2}{1+\theta} &= v_1 p_2 x_{12} + v_2 p_2 x_{22}
\end{aligned}$$

Le soluzioni si semplificano molto meglio con i termini orignali della matrice inversa. Li sostituisco $p_s = 1, \forall s$.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi_1}{1+\theta} &= v_1\left(\frac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}\right)p_1 - v_2\left(\frac{y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}\right)p_1 \\
\frac{\pi_2}{1+\theta} &= -v_1\left(\frac{y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}\right)p_2 + v_2\frac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}}p_2
\end{aligned}$$

Ottengo la formula dei prezzi che dimostra il "Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing"

$$\begin{aligned}
v_1^* &= \pi_1\frac{y_{11}}{\left(1+\theta+\dot{p}_1\right)} + \pi_2\frac{y_{12}}{\left(1+\theta+\dot{p}_2\right)} \\
v_2^* &= \pi_1\frac{y_{21}}{\left(1+\theta+\dot{p}_1\right)} + \pi_2\frac{y_{22}}{\left(1+\theta+\dot{p}_2\right)}
\end{aligned}$$

imponendo $p_0 = p_1 = p_2 = 1$

$$v_1 = \frac{\pi_1 y_{11} + \pi_2 y_{12}}{1+\theta} \tag{14}$$

$$v_2 = \frac{\pi_1 y_{21} + \pi_2 y_{22}}{1+\theta} \tag{15}$$

ovvero i prezzi di ogni attività finanziaria, in equilibrio, devono esprimere il valore atteso dei pagamenti futuri scontati ad un tasso di interesse, eventualmente aumentato del tasso d'inflazione atteso in quello stato di natura.

Osservazione 11 *Nelle* (14) *e* (15) *i dati sono solo i pagamenti* y_{sk}. *Le altre sono variabili e suscettibili di diverse interpretazioni.*

1. *Se* θ *e le probabilità* π_s *sono soggettive dell'investitore,* v_k *è la valutazione dell'investotore, da comparare con quella del mercato valutata ad altre probabilità ed al tasso d'interesse* r_f *del mercato.*

2. *Se invece, appunto,* $\theta = r_f$ *e , per es.* v_k *siano quotati sul mercato, possiamo stimare le probabilità degli stati di natura come incognite.*

10 Equilibrio (NO)

Per calcolare i prezzi di equilibrio "generale" dobbiamo eguagliare domanda ed offerta di beni ed attività finanziarie.

Immaginiamo un'economia con 2 consumatori che ottimizzino il problema considerato fin qui, semplificato quanto possibile.

Parametri:

- Consumatori (households) $h = 1, 2$.
- $u^h\left(c_s^h\right) = \ln\left(c_s^h\right)$;
- $t = 0, 2, 1$;
- $s = 2, \forall t$;
- $\mathbf{v} = (v_{01}, v_{02})$
- $$Y_{SxK} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 105 \end{pmatrix}$$

Riconsideriamo tutte le soluzioni del problema risolto al paragrafo 8.1.1 e consideriamo soltanto le soluzioni per la domanda di attività finanziarie.

$$W^h \stackrel{def}{=} w_0^h + \frac{v_1}{y_{11}} w_1^h + \frac{v_2}{y_{22}} w_2^h$$

$$n_1^* = \left(\frac{\pi_1}{1 + \pi_1 + \pi_2}\right) \frac{W}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} p_1 w_1$$
$$n_2^* = \left(\frac{\pi_2}{1 + \pi_1 + \pi_2}\right) \frac{W}{v_2} - \frac{1}{y_{11}} p_2 w_2$$

Osservazione 12 *In un mercato in cui vi siano soltanto due operatori la domanda e l'offerta avverrano soltanto fra questi due operatori. Chi ha più dotazioni in un periodo offrirà finanziamento a chi ne ha meno. Quindi per stabilire un "mercato" è necessario che i due operatri siano eterogenei.*

Per far questo ipotizziamo diverse dotazioni

Ipotesi 2

$$\mathbf{w}^{h=1} = \left(w_0^{h=1} = 100, w_1^{h=1} = 100, w_2^{h=1} = 0\right)$$
$$\mathbf{w}^{h=2} = \left(w_0^{h=2} = 100, w_1^{h=2} = 0, w_2^{h=2} = 100\right)$$

e dunque

$$\begin{aligned} W^A &= w_0^A + \frac{v_1}{y_{11}} w_1^A + \frac{v_2}{y_{22}} w_2^A \\ &= 100 + \frac{v_1}{100} 100 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W^B &= w_0^B + \frac{v_1}{y_{11}} w_1^B + \frac{v_2}{y_{22}} w_2^B \\
&= 100 + \frac{v_2}{100} 100
\end{aligned}
$$

Tutte le funzioni di domanda saranno adesso indicizzate per il consumatore (household $h = A, B$). Risulta

$$
n_1^{h*} = \left(\frac{\pi_1^h}{1 + \pi_1^h + \pi_2^h} \right) \frac{W^h}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} p_1 w_1^h
$$

$$
n_2^{h*} = \left(\frac{\pi_2^h}{1 + \pi_1^h + \pi_2^h} \right) \frac{W^h}{v_2} - \frac{1}{y_{11}} p_2 w_2^h
$$

Dobbiamo avere equilibrio su entrambi i mercati:

$$
n_1^A (...) + n_1^B (...) = 0
$$

$$
n_2^A (...) + n_2^B (...) = 0
$$

Osservazione 13 *Per la legge di Walras, se abbiamo solo due attiità finanzairie ed il mercato di una è in equilibrio, lo sarà automatcamente anche l'altro. Quindi possiamo , senza perdita di generalità , calcolare l'equilbrio solo sul primo mercato, lasciando il prezzo v_1 in funzione di v_2.*

Mercato Attività 1

Aggiungo via via i parametri numerici per semplificare i calcoli

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\frac{\pi_1^A}{1 + \pi_1^A + \pi_2^A} \right) \frac{W^A}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} w_1^A \right] + \left[\left(\frac{\pi_1^B}{1 + \pi_1^B + \pi_2^B} \right) \frac{W^B}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} w_1^B \right] &= 0 \\
P_A \frac{W^A}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} w_1^A + P_B \frac{W^B}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} w_1^B &= 0 \\
P_A \frac{100 + \frac{v_1}{100} 100}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} w_1^A + P_B \frac{100 + \frac{v_2}{100} 100}{v_1} - \frac{1}{y_{11}} w_1^B &= 0 \\
P_A \frac{1}{v_1} (v_1 + 100) - \frac{1}{y_{11}} w_1^A + P_B \frac{1}{v_1} (v_2 + 100) - \frac{1}{y_{11}} w_1^B &= 0 \\
P_A \frac{1}{v_1} (v_1 + 100) - \frac{1}{y_{11}} 100 + P_B \frac{1}{v_1} (v_2 + 100) &= 0
\end{aligned}
$$

consideriamo che il pagamento di un titolo a reddito fisso $y_{11} = 100$

$$
P_A \frac{1}{v_1} (v_1 + 100) - \frac{1}{100} 100 + P_B \frac{1}{v_1} (v_2 + 100) = 0
$$

$$
v_1 = \frac{(100 P_A + 100 P_B + v_2 P_B)}{1 - P_a}
$$

Ipotizziamo che sia $P_A = P_B = 0.5/2$

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\left(100 \frac{0.5}{2} + 100 \frac{0.5}{2} + v_2 \frac{0.5}{2}\right)}{1 - \frac{0.5}{2}} \\
&= 66.667 + 0.333\,33 v_2
\end{aligned}
$$

Per $v_1 = v_2$

$$
v_1 = 66.667 + 0.333\,33 \cdot v_1
$$

$$
v_1 = 100
$$

La soluzione è realistica perché non avevamo considerato il tasso di sconto $1/(1+r)$ o $1/(1+\theta)$.

11 Ottimizzazione in due stadi (dinamica)

Esempio di Asset Pricing con $t = 3, s = \{1,2\}, k = \{1,2\}$, ovvero due sole attività per 4 stati di natura.

La notazione cambia perché adesso, ogni data t, s da luogo nel periodo successivo a due stati di natura corrispondenti nella data $t+1$ (struttura ad albero).

Notazione:

- variabili di stato: $c_{t,s}, w_{t,s}, p_{t,s}$;
- supponiamo che la matrice $Y_t = \{y_{t,s.k}\}$ sia costante al variare di t, e quindi sparisce l'indice t.
- variabili di transizione: $n_{t,s,k}$, $\pi\left(s_{t+1,s}|s_{t,s}\right)$;
- i prezzi delle attività: $v_{t,s,k}$.
- $\pi\left(s_{t,s}|s_{t-1,s}\right)$ = probabilità di transizione da uno stato del tempo precedente a uno stato del tempo attuale;
- $c_{t,s}, w_{t,s}$ = variabili di stato;
- $n_{t,s,k}$ = numero di assets acquistato nel periodo corrente, che danno rednimenti nel periodo futiro in tutti i due stati accedibili;
- $v_{t,s,k}$ = prezzo delle attività finanziarie nello stato in cui vengono acquistate;
- $Y_{SxK} = \{y_{t,s.k}\}$ matrice degli yields, che supponiamo costante nel tempo (Ipotesi forte!), e quindi sparisce l'indice t.

Consideriamo la scelta di un consumatore

$$\max_{\{c_{t,s}\},\{n_{t,s}\}} U\left(c_0, c_1, c_2\right) = u(c_0) + \left[\underbrace{\pi\left(s_{11}|s_0\right) u(c_{11}) + \pi\left(s_{12}|s_0\right) u(c_{12})}_{c_1}\right] +$$

$$+ \left[\underbrace{\pi\left(s_{21}|s_{11}\right) u(c_{21}) + \pi\left(s_{22}|s_{11}\right) u(c_{22}) + \pi\left(s_{23}|s_{12}\right) u(c_{23}) + \pi\left(s_{24}|s_{12}\right) u(c_{24})}_{c_2}\right]$$

soggetta ad una serie di vincoli correnti

- $t = 0$

$$c_0 + v_{01}n_{01} + v_{02}n_{02} = w_0$$

- $t = 1, s = 1, 2$

$$\begin{cases} c_{11} + v_{111}n_{111} + v_{112}n_{112} = n_{01}y_{111} + n_{02}y_{112} + w_{11}, \text{ con prob. } \pi\left(s_{11}|s_0\right) \\ c_{12} + v_{121}n_{121} + v_{122}n_{122} = n_{01}y_{121} + n_{02}y_{122} + w_{12}, \text{ con prob. } \pi\left(s_{12}|s_0\right) \end{cases}$$

- $t = 2, s = 1, 2,$

$$\begin{cases} c_{21} + (v_{211}n_{211} + v_{212}n_{212}) = n_{111}y_{211} + n_{112}y_{212} + w_{21}, \text{ con prob. } \pi\left(s_{21}|s_{11}\right) \\ c_{22} + (v_{211}n_{211} + v_{222}n_{222}) = n_{111}y_{221} + n_{112}y_{222} + w_{22}, \text{ con prob. } \pi\left(s_{22}|s_{11}\right) \end{cases}$$

- $t = 2, s = 3, 4$

$$\begin{cases} c_{23} + (v_{231}n_{231} + v_{232}n_{232}) = n_{121}y_{231} + n_{121}y_{232} + w_{23}, & \text{con prob. } \pi(s_{23}|s_{12}) \\ c_{24} + (v_{241}n_{241} + v_{242}n_{242}) = n_{121}y_{241} + n_{122}y_{242} + w_{24}, & \text{con prob. } \pi(s_{24}|s_{12}) \end{cases}$$

NB. I termini entro parentesi quadra non esistono se $t = 2$ è la data finale.

11.1 Strategie di soluzione

11.1.1 Strategia 1

Risolvere ad ogni coppia di nodi finali il sistema di 2 *equazioni* nelle 2 incognite "quantità di asset acquistati nel nodo precedente" e sostituire nel nodo precedente. Continuando a ritroso si ricava il VBI. Si calcola il Lagrangiano, derivate etc. come nei casi precedenti.

11.1.2 Strategia 2

Sostituire tutti i vincoli correnti nella funzione di utilità sostituendoli al consumo corrente.

Poi derivare la funzion di utilità per le 7 variabili di consumo e calcolare poi gli acquisti di attività finanziari dai VBs correnti, dopo aver sostituito le soluzioni per il consumo c^*_{ts}.

Sostituiamo solo le prime tre incognite

$$\max_{\{c_{t,s}\},\{n_{t,s}\}} U(...) = u(-v_{01}n_{01} - v_{02}n_{02} + w_0) + \pi(s_{11}|s_0)\, u(-v_{111}n_{111} - v_{112}n_{112} + n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12} + w_{11}) +$$
$$+\pi(s_{12}|s_0)\, u(-v_{121}n_{121} - v_{12}n_{122} + n_{01}y_{12} + n_{02}y_{22} + w_{12})$$

$$\frac{\partial U(...)}{\partial n_{01}} : \frac{\partial u(c_0)}{\partial n_{01}}(-v_{01}) + \underbrace{\left[\pi(s_{11}|s_0)\frac{\partial u(c_{11})}{\partial n_{01}}y_{11} + \pi(s_{12}|s_0)\frac{\partial u(c_{12})}{\partial n_{01}}y_{12}\right]}_{\partial u(c_1)/\partial n_{01}} = 0$$

dove il termine entro parentesi quadra è la derivata del consumo del periodo futuro rispetto a ∂n_{01}. La condizione del primo ordine dice che l'equilibrio avviene per

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(...)}{\partial n_{01}} &: \frac{\partial u(c_0)}{\partial n_{01}}v_{01} = \pi(s_{11}|s_0)\frac{\partial u(c_{11})}{\partial n_{01}}y_{11} + \pi(s_{12}|s_0)\frac{\partial u(c_{12})}{\partial n_{01}}y_{12} \\ &: \frac{\partial u(c_0)}{\partial n_{01}}v_{01} = E_{t=0}\left[\frac{\partial u(c_{11})}{\partial n_{01}}y_{11} + \frac{\partial u(c_{12})}{\partial n_{01}}y_{12}\right] \end{aligned}$$

"Consumption smoothing" i.e. gli investimenti finanziari servono ad omogeneizzare la ricchezza nel tempo.

In generale l'**equazione di Bellman** permette di spezzare il lungo problema di ottimo in ottimizzazioni sulla transizione fra i periodi.

$$\frac{\partial U(...)}{\partial n_{ts}} : \frac{\partial u_t(...)}{\partial n_{ts}} = E_t\left(\frac{\partial u_{t+1}(...)}{\partial n_{ts}}\right)$$

11.1.3 Esempio con $u(c_s) = \ln(c_s)\,; t = 0, 2, 1; s = 2, \forall t$. (Facoltativo)

Consideriamo lo stesso problema risolto con la Strategia 1, ovvero ricavando prima il VBI e poi derivando per $c_{ts.}$Adesso inceve sostituiremo i vinolidi bilancio correnti nella funzione obiettivo.

Notazione:

- variabili di stato: $c_{t,s}, w_{t,s}, p_{t,s}$;
- supponiamo che la matrice $Y_t = \{y_{t,s.k}\}$ sia costante al variare di t, e quindi sparisce l'indice t.
- variabili di transizione: $n_{t,s,k}$, $\pi(s_{t+1,s}|s_{t,s})$;
- i prezzi delle attività: $v_{t,s,k}$.
- il saggio di preferenza intertemporale $\theta = 0$.

Il problema del Capitolo 3, domanda 3, con la nuova notazione diventa

$$\begin{array}{rl}
\max U(c_0, c_1, c_2) = u(c_0) + [\pi(s_{11}|s_0)\, u(c_{11}) + \pi(s_{12}|s_0)\, u(c_{12})] & \\
s.t. \qquad c_0 + n_{01}v_{01} + n_{02}v_{02} = w_0, & (VB_0) \\
p_{11}c_{11} = n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12} + p_{11}w_{11}, & (VB_{11}) \\
p_{12}c_{12} = n_{01}y_{21} + n_{02}y_{22} + p_{12}w_{12}, & (VB_{12})
\end{array}$$

Ipotesi:
(i). Siano $\pi(.|.)$ le probabilità soggettive dello stato s per il consumatore.
(ii). $p_{t,s} = 1$, $\forall t, s$.
(iii). Sia la forma funzionale dell'utilità $u(c_s) = \ln c_s$.
(iv).

$$Y_{SxK} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 90 \\ 80 & 105 \end{pmatrix}$$

1. Risolvere tutti i vincoli per $c_{t,s}$, ed inserirli della funzione di utilità.

$$\begin{aligned}
c_0 &= -n_{01}v_{01} - n_{02}v_{02} + w_0 \\
c_{11} &= n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12} + w_{11} \\
c_{12} &= n_{01}y_{21} + n_{02}y_{22} + w_{12}
\end{aligned} \tag{16}$$

Inserisco i VBs esplicitati per il consumo, nelle rispettive funzioni di utilità.

$$\begin{aligned}
\max U(c_0, c_1, c_2) &= u(c_0) + [\pi(s_{11}|s_0)\, u(c_{11}) + \pi(s_{12}|s_0)\, u(c_{12})] \\
&= u(w_0 - v_1 n_{01} - v_2 n_{02}) + \\
&\quad + \pi(s_{11}|s_0)\, u(w_{11} + n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12}) + \pi(s_{12}|s_0)\, u(w_{22} + n_{01}y_{21} + n_{02}y_{22})
\end{aligned}$$

Deriviamo la funzione di utilità per n_{01} e n_{02} per calcolare le soluzioni letterali n_{01}^* e n_{02}^*.

$$\frac{\partial U}{\partial n_{01}} : \frac{-v_{01}}{w_0 - n_{01}v_{01} - n_{02}v_{02}} + \frac{\pi(s_{11}|s_0)\, y_{11} +}{n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12} + w_{11}} + \frac{\pi(s_{12}|s_0)\, y_{21}}{n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12} + w_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial n_{01}} : \frac{-v_{02}}{w_0 - n_{01}v_{01} - n_{02}v_{02}} + \frac{\pi(s_{11}|s_0)\, y_{12}}{n_{01}y_{11} + n_{02}y_{12} + w_{11}} + \frac{\pi(s_{12}|s_0)\, y_{22}}{n_{01}y_{21} + n_{02}y_{22} + w_{11}} = 0$$

11.1.4 In termini matriciali

NB. Chiamo $\mathbf{Y}$ la matrice che ha come prima riga i prezzi.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{w} \\
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -v_{01} & -v_{02} \\ y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_0 \\ w_{11} \\ w_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_0 - v_1 n_{01} - v_2 n_{02} \\ w_{11} + n_{01} y_{11} + n_{02} y_{12} \\ w_{22} + n_{01} y_{21} + n_{02} y_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Uso la notazione π_1, π_2 altrimenti il software non capisce.

$$
\begin{aligned}
\max_{n_{01},n_{02}} U &= \begin{pmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} w_0 - v_1 n_{01} - v_2 n_{02} \\ w_{11} + n_{01} y_{11} + n_{02} y_{12} \\ w_{22} + n_{01} y_{21} + n_{02} y_{22} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}\cdot\ln(\mathbf{c}) \\
&= \ln(w_0 - v_1 n_{01} - v_2 n_{02}) + \pi_1 \ln(w_{11} + n_{01} y_{11} + n_{02} y_{12}) + \pi_2 \ln(w_{22} + n_{01} y_{21} + n_{02} y_{22})
\end{aligned}
$$

$$
\max_{n_{01},n_{02}} U(n_{01}, n_{02}) = \boldsymbol{\pi}' \cdot \ln(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{w})
$$

$$
\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dn}} = \boldsymbol{\pi}' \cdot inv\,(diag\,(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}))\,\mathbf{Y} = \mathbf{0}
$$

$$
= \left(\begin{pmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{v_1 n_{01} - w_0 + v_2 n_{02}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_{11}+n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w_{22}+n_{01}y_{21}+n_{02}y_{22}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -v_{01} & -v_{02} \\ y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{-v_{01}}{w_0 - v_1 n_{01} - v_2 n_{02}} + \frac{\pi(s_{11}|s_0)\cdot y_{11}}{w_{11}+n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12}} + \frac{\pi(s_{12}|s_0).y_{21}}{w_{22}+n_{01}y_{21}+n_{02}y_{22}} = 0 \\ \frac{-v_{02}}{+w_0 - n_{01}v_{01} - n_{02}v_{02}} + \frac{\pi(s_{11}|s_0)y_{12}}{n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12}+w_{11}} + \frac{\pi(s_{12}|s_0)y_{22}}{n_{01}y_{21}+n_{02}y_{22}+w_{11}} = 0 \end{pmatrix}'
$$

E' impossibile ricavare delle soluzioni letterali comprensibili in forma chiusa. Pertanto è necessario sostituire tali soluzioni nei vincoli di bilancio correnti per ottenere $c_0^*, c_{11}^*, c_{12}^*, \lambda^*$ letterali e numeriche.

Soluzioni numeriche per Y diagonale Utilizzando i seguenti parametri:

Parametri: $p_{t,s} = 1, \forall t, s.$, $w_0 = w_{11} = w_{12} = 10000, \pi(s_{11}|s_0) = 0.3, \pi(s_{12}|s_0) = 0.7.$

$$
v = \begin{pmatrix} 97 \\ 99 \end{pmatrix}, \qquad Y_{SxK} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 105 \end{pmatrix}
$$

Calcolare le **soluzioni numeriche** delle incognite: $c_0^*, c_1^*, c_2^*, \lambda^*, n_1^*, n_2^*, U^*(c_0^*, c_1^*, c_2^*)$.

Verificare se le soluzioni corrispondano al caso precedente.

1. Risolvere tutti i vincoli per $c_{t,s}$, ed inserirli della funzione di utilità.

NB. Chiamo $\mathbf{Y}$ la matrice che ha come prima riga i prezzi.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{w}\\
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -97 & -99 \\ 100 & 0 \\ 0 & 105 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 10000.0 - 99.0n_{02} - 97.0n_{01} \\ 100.0n_{01} + 10000.0 \\ 105.0n_{02} + 10000.0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Uso la notazione π_1, π_2 altrimenti il software non capisce.

$$
\begin{aligned}
\max_{n_{01},n_{02}} U &= \begin{pmatrix} 1 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \ln \begin{pmatrix} 10000.0 - 99.0n_{02} - 97.0n_{01} \\ 100.0n_{01} + 10000.0 \\ 105.0n_{02} + 10000.0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}\cdot\ln(\mathbf{c})\\
&= \ln(w_0 - v_1 n_{01} - v_2 n_{02}) + \pi_1 \ln(w_{11} + n_{01}y_{11}) + \pi_2 \ln(w_{22} + n_{02}y_{22})
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dn}} = \boldsymbol{\pi}'\cdot inv\left(diag\left(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}\right)\right)\mathbf{Y} = \mathbf{0}
$$

$$
\frac{\partial U}{\partial n_{01}} : \frac{-v_{01}}{(-n_{01}v_{01} - n_{02}v_{02} + w_0)} + \frac{\pi\left(s_{11}|s_0\right)y_{11}+}{n_{01}y_{11} + w_{11}} = 0
$$

$$
\frac{\partial U}{\partial n_{01}} : \frac{-v_{02}}{(-n_{01}v_{01} - n_{02}v_{02} + w_0)} + \frac{\pi\left(s_{12}|s_0\right)y_{22}}{n_{02}y_{22} + w_{11}} = 0
$$

$$
= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}\left(\begin{matrix} \frac{1}{10000.0-99.0n_{02}-97.0n_{01}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{100.0n_{01}+10000.0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{105.0n_{02}+10000.0} \end{matrix}\right)\right)\begin{pmatrix} -97 & -99 \\ 100 & 0 \\ 0 & 105 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{97.0}{97.0n_{01}+99.0n_{02}-10000.0} + \frac{30.0}{100.0n_{01}+10000.0} \\ \frac{99.0}{97.0n_{01}+99.0n_{02}-10000.0} + \frac{73.5}{105.0n_{02}+10000.0} \end{pmatrix}'
$$

$$
\begin{cases} n_{01}^* = -54.956, \\ n_{02}^* = 7.7417 \end{cases}
$$

Da cui, risostituendo gli $\mathbf{n}^*$ in $\mathbf{c}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^* &= \mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}^*+\mathbf{w}\\
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -97 & -99 \\ 100 & 0 \\ 0 & 105 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -54.956 \\ 7.7417 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{22} \end{pmatrix}^* &= \begin{pmatrix} 14564 \\ 4504.4 \\ 10813. \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Queste soluzioni coincidono con le soluzioni del compito 3 (ovvero seguendo la strategia precedente).

11.1.5 Soluzione per Y piena

$$\mathbf{c}\!=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{w}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{22}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -97 & -99 \\ 100 & 90 \\ 80 & 105\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{01} \\ n_{02}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10\,000-99n_{02}-97n_{01} \\ 100n_{01}+90n_{02}+10\,000 \\ 80n_{01}+105n_{02}+10\,000\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\max_{n_{01},n_{02}} U &= \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\ln\begin{pmatrix} 10\,000-99n_{02}-97n_{01} \\ 100n_{01}+90n_{02}+10\,000 \\ 80n_{01}+105n_{02}+10\,000\end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}\cdot\ln(\mathbf{c}) \\ &= \ln(w_0-v_1n_{01}-v_2n_{02})+\pi_1\ln(w_{11}+n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12})+\pi_2\ln(w_{22}+n_{01}y_{21}+n_{02}y_{22})\end{aligned}$$

2. Derivare la funzione di utilità per n_{01} e n_{02} e calcolare le soluzioni letterali n_{01}^* e n_{02}^*.

$$\max_{n_{01},n_{02}} U(n_{01},n_{02}) = \boldsymbol{\pi'}\cdot\ln(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{w})$$

$$\frac{\partial U}{\partial n_{01}}:\frac{-v_{01}}{(-n_{01}v_{01}-n_{02}v_{02}+w_0)}+\frac{\pi(s_{11}|s_0)\,y_{11}+}{n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12}+w_{11}}+\frac{\pi(s_{12}|s_0)\,y_{21}}{n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12}+w_{12}}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial n_{02}}:\frac{-v_{02}}{(-n_{01}v_{01}-n_{02}v_{02}+w_0)}+\frac{\pi(s_{11}|s_0)\,y_{12}}{n_{01}y_{11}+n_{02}y_{12}+w_{11}}+\frac{\pi(s_{12}|s_0)\,y_{22}}{n_{01}y_{21}+n_{02}y_{22}+w_{22}}=0$$

$$\frac{\mathbf{dU}}{\mathbf{dn}}:\boldsymbol{\pi'}\cdot inv\left(diag\left(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}\right)\right)\mathbf{Y}=\mathbf{0}$$

$$:\left(\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10000.0-99.0n_{02}-97.0n_{01}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{100n_{01}+90n_{02}+10\,000} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{80n_{01}+105n_{02}+10\,000}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -97 & -99 \\ 100 & 90 \\ 80 & 105\end{pmatrix}=0$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{97}{97.0n_{01}+99.0n_{02}-10000.0}+\frac{56.0}{80n_{01}+105n_{02}+10\,000}+\frac{30.0}{100n_{01}+90n_{02}+10\,000} \\ \frac{99}{97.0n_{01}+99.0n_{02}-10000.0}+\frac{73.5}{80n_{01}+105n_{02}+10\,000}+\frac{27.0}{100n_{01}+90n_{02}+10\,000}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}'$$

$$\mathbf{n}^*=\begin{pmatrix} n_{01}^* \\ n_{02}^*\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -453.01 \\ 441.79\end{pmatrix}'$$

3. Sostituire tali soluzioni nei vincoli di bilancio correnti per ottenere $c_0^*, c_{11}^*, c_{12}^*, \lambda^*$ letterali e numeriche.

$$\mathbf{c}\!=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{w}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^* &= \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{11} \\ c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -97 & -99 \\ 100 & 90 \\ 80 & 105\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -453.01 \\ 441.79\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10205. \\ 4460.1 \\ 20147.\end{pmatrix}\end{aligned}$$

λ^* in questa soluzione non c'è perché i vincoli vengono sostituiti direttamente nella funzione obiettivo.

4. Verificare se le soluzioni corrispondano al caso precedente.
Corrispondono!

12 Conclusioni

Questo capitolo è cominciato con alcuni elementi di "grammatica" per la scelta in condizioni di incertezza: la definizione dell'avversione al rischio e del premio al rischio in relazione alla forma della funzione di utilità, la dominanza stocastica delle distribuzioni di probabilità, anch'esse in relazione al loro peso sulle scelte, dettato dalle diverse forme delle funzioni di utilità.

In seguito, l'obiettivo è stato, al solito, ricondurre il metodo di scelta al metodo di ottimo vincolato usato anche in condizioni di certezza. E' stato esaminato il caso in cui ogni attività finanziaria desse rendimento in un solo stato di natura ed il caso in cui le attività finanziarie offrano rendimenti in più stati di natura.

Il problema generale con attività finanziarie pure e complesse viene trattato anche sotto l'ipotesi di agente neutrale al rischio, ovvero con funzione di utilità lineare. Ne risultano i famosi prezzi che rispettano il teorema fondamentale dell'Asset Pricing e del Risk-Neutral pricing, ai quali gli agenti possono comprare e vendere senza altre preferenze che il rispetto del vincolo di bilancio.

Viene brevemente accennato al concetto di prezzi delle attività finanziarie in equilbrio generale, come il risultato dell'uguaglianza fra domanda e offerta aggregata di ogni singola attivtà finanziaria, ovvero come somma dele domande nette di tale attività da parte di tutti gli agenti considerati.

Infine si arriva alla generalizzazione del problema, quando non esiste una sola data futura, ma abbiamo un albero di eventi che si dirama da ogni stato di natura futuro. Qui il calcolo può essere all'indietro (backward) tentando di raggiungere un complessissimo vincolo di bilancio intertemporale come nel caso precedente, oppure si procede sostituendo ciascun VBs esplicitato per c_s ed inserito nella sua funnzione di utilità e si ottimizza su n_{sk}. Derivando su ciascun n_{sk} si ottengono CPO diverse (equazioni di Bellman), ma la soluzione finale è la stessa.

References

[1] Brunnermeier, M. K. (2001). Asset pricing under asymmetric information: Bubbles, crashes, technical analysis, and herding. Oxford University Press.

[2] Barucci, E., Marsala, C., Nencini, M., & Sgarra, C. (2009). *Ingegneria finanziaria*, Egea.

[3] Campbell, J. Y. (2017). Financial Decisions and Markets: a Course in Asset Pricing. Princeton University Press.

[4] Copeland, T., Weston, J., & Shastri, K. (2005). Financial theory and corporate policy. 1000 p. Editorial Pearson Addison Wesley, New York, USA

[5] Danthine, J. P., & Donaldson, J. B. (2015). Intermediate Financial Theory. Academic Press. 3rd Ed.

[6] De Matos, J. A. (2001). Theoretical foundations of corporate finance. Princeton University Press.

[7] Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2013). Modern portfolio theory and investment analysis. John Wiley & Sons. 9th ed

[8] Grinold, R. C., & Kahn, R. N. (2000). Active Portfolio Management. McGraw-Hill.

[9] Ingersoll, J. E. (1987). Theory of financial decision making (Vol. 3). Rowman & Littlefield.

[10] Merton, R. C. (1971) Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, Journal of Economic Theory, Volume 3, Issue 4, 373-413.

[11] Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. Econometrica, 41(5), 867-887.

Scelte di Portafoglio: Approccio Media-Varianza
Stati di Natura Continui
(Mean-Variance Portfolio Choice)

Maria Augusta Miceli
Department of Economics and Law
University of Rome "Sapienza"
IFIR

April 7, 2019

Abstract

L'obiettivo di queste note è evidenziare il metodo di ottimizzazione del portafoglio unico per cui l'investitore massimizza la sua funzione di utilità in media e varianza del portafoglio rispetto al vincolo della frontiera efficiente dei possibili pesi in cui le attività finanziarie disponibili sono detenute nel portafoglio. Tale frontiera sarà una retta, la "capital market line", se esiste un'attività risk-free o una curva se vi sono solo attività rischiose. Il CAPM non è altro che il primo caso, ma dove la CML è tangente alla frontiera efficiente delle attività rischiose. Essendo tale punto il portafoglio dominante dovrà essere l'indice di mercato. Tale tangenza definisce i "beta" come i coefficienti di regressione del rendimento di un'attività finanziaria qualunque verso l'eccesso di rischio presento sul mercato. Di conseguenza tale regressione calcola il rendimento medio atteso per un'attività finanziaria che abbia correlazione "beta" verso il rischio di mercato.

Abstract

The aim of these notes is to highlight the method of portfolio optimization, when the investor maximizes his mean-variance utility function subject to the constraint represented by the efficient frontier of the possible weights in which the available financial assets available are held. This frontier will be a straight line, the "capital market line", when there is a risk-free asset or a curve when there are only risky assets. The CAPM is nothing else than the first case, but where the CML is tangent to the efficient frontier of risky activities. Since the tangency condition defines the dominant portfolio, this must be the market index. This tangency defines also the "betas" as the regression coefficients of the return of any financial asset towards the excess risk present on the market. Consequently, this regression calculates the expected average return for a financial asset that has a "beta" correlation with market risk.

KEYWORDS: portafoglio, portfolio, asset pricing, mean-variance, media-varianza, CAPM, efficient frontier,

JEL: A22, A23, D53, G11, G12.

1 Introduzione

L'Approccio media-varianza è utile perché permette di utilizzare

Ipotesi:

1. Stati di natura infiniti.
2. Distribuzione di probabilità definita dai soli primi due momenti: media μ e varianza σ^2.

L'obiettivo è ricondurre la scelta di portafoglio di un investitore al modello di scelta vincolata standard.

In questo contesto:

1. la funzione obiettivo è una funzione di utilità rispetto al rendimento del portafoglio;
2. gli oggetti di scelta sono i "pesi" che le diverse attività finanziarie disponibili, di cui sono note le distribuzioni dei rendimenti, vengono tenuti in portafoglio, in modo da massimizzare il rendimento del portafoglio, dato un rischio desiderato espresso dalla variazione standard, oppure in modo da minimizzare il rischio, per un rendimento desiderato, dato.

Allo scopo di rendere il problema matematicamente "trattabile" si considerano variabili tali per cui i primi due momenti della distribuzione (media e varianza) siano condizioni sufficienti per la descrizione delle distribuzioni delle variabili aleatorie.

I dati del problema sono:

- una funzione di utilità derivabile espressa nel rendimento del portafoglio, sintetizzata nei primi due momenti, media e varianza del portafoglio,
- la distribuzione dei rendimenti delle attività finanziarie

$$\widetilde{\mathbf{r}} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

esplicitando la forma matriciale per $K = 2$, attività finanziarie

$$\begin{pmatrix} \widetilde{r}_1 \\ \widetilde{r}_2 \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

La matrice delle varianze e covarianze, $\boldsymbol{\Sigma}$, può anche essere espressa mediante il coefficiente di correlazione

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

ovvero

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

dove i due termini diagonali sono identici.

Proposizione 1 *Conoscere i soli primi due momenti della distribuzione è sufficiente se vale una delle seguenti condizioni*

(i) la distribuzione dei rendimenti è arbitraria, ma la f. utilità è quadratica, ovvero la funzione di utilità consideri soltanto i primi due momenti (media e varianza),

(ii) la funzione di utilità sia arbitraria, ma i rendimenti siano distribuiti normalmente e pertanto i primi due momenti ne descrivano completamente la distribuzione.

Nell'approccio semplificato che seguiamo, entrambe le condizioni (i) e (ii) saranno utilizzate entrambe.

2 Metodo di scelta

Proprietà di diverse forme di funzioni di utilità:

1. f. utilità quadratica.

   Pro: media e varianza sufficienti.

   Contro: ∃ sazietà; coefficiente di avversione al rischio assoluto (ARA) crescente. Entrambi portano a risultati controntuitivi.

2. f. utilità normale.

   Pro: media e varianza sufficienti.

   Contro: il dominio va fino a $-\infty$ e più portare a consumo negativo.

3. f. lognormale.

   Contro: non è preservata con l'additività.

Nel seguito utilizzaremo la funzione di utilità quadratica nei confronti di una ricchezza data dal portafoglio $\widetilde{r_P}$, per sua natura aleatoria perché dipende dall'andamento di rendimenti aleatori. essendo una combinazione lineare, con pesi $w_k, k = 1, ..., K$ dei rendimenti aleatori delle attività finanziarie.

$$\widetilde{r}_P = \sum_{k=1}^{K} w_k \widetilde{r}_k$$

La funzione di utilità espressa nella ricchezza aleatoria è una espansione in serie di Taylor fino al secondo ordine intorno al punto definito dal valore atteso della ricchezza $E(\widetilde{r}_P)$.

$$u(\widetilde{r}_P) = aE(\widetilde{r}_P) + b[\widetilde{r}_P - E(\widetilde{r}_P)]^2$$

$$u(\widetilde{r}_P) = a\mu_p + b\sigma_p^2$$

Nel seguito diamo qualche dettaglio in più sugli ingredienti accennati. In questa versione linearizzata e semplificata, il segno davanti al coefficiente b definisce l'attitudine verso il rischio dell'investitore.

1. **Agente avverso al rischio (Risk averse)**

   Il rendimento medio è un "bene" mentre la volatilità, espressa dalla varianza, è un "male" ed ha segno negativo.

   $$u(\widetilde{r}_P) = a\mu_P - b\sigma_P^2$$

   Calcoliamo il differenziale totale, per poter calcolare il SMS

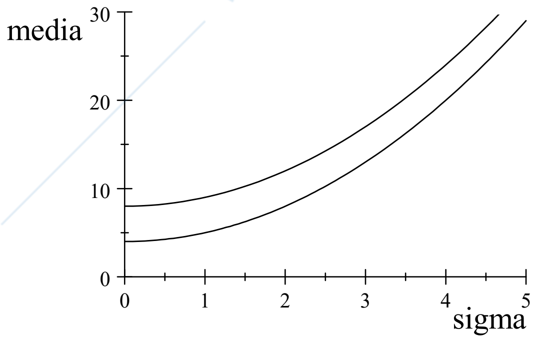
   $$dU = ad\mu_p - (2b\sigma_p)\, d\sigma_p = 0$$

   da cui

   $$SMS \equiv \frac{d\mu_p}{d\sigma_p} = \frac{2b\sigma_p}{a} > 0$$

   Disegnamo la curva d'indifferenza $a\mu_p - b\sigma_p^2 = \overline{u}$, fissando i parametri $a = 5, b = 5, \overline{u} = 4, 8$, e ricavando μ_p in funzione di σ_p^2.

   $$\begin{aligned} a\mu_p - b\sigma_p^2 &= \overline{u} \Longrightarrow \\ \mu_p &= 4 + \frac{5x^2}{5} \text{ e } \mu_p = 8 + \frac{5x^2}{5} \end{aligned}$$



l'utilità cresce nella direzione verso l'alto e a sinistra.

2. Agente propenso al rischio (Risk lover). Sia rendimento medio che la volatilità sono beni ed entrambi i coefficienti sono positivi

$$u\left(\widetilde{W}\right) = a\mu_p + b\sigma_p^2$$

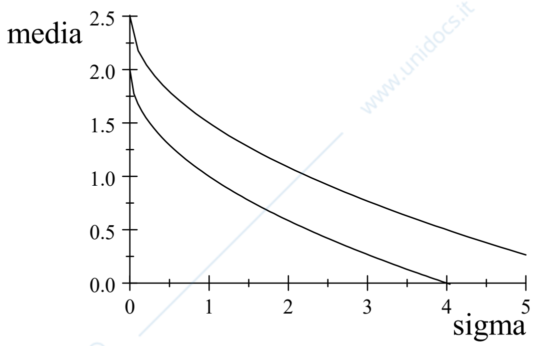
$$dU = ad\mu_p + (2b\sigma_p)\, d\sigma_p = 0$$

$$SMS \equiv \frac{d\mu_p}{d\sigma_p} = -\frac{2b\sigma_p}{a} < 0$$

Disegnamo la curva d'indifferenza $a\mu_p + b\sigma_p^2 = \overline{u}$, fissando i parametri $a = 4, b = 4, \overline{u} = 8, 16$

(Nota: Per disegnarle, sono costretta ad abbassare l'esponente per mantenere la proprietà di convessità - non preoccupatevene).

$$\begin{aligned} a\mu_p + b\sigma_p^2 &= \overline{u} \Longrightarrow \mu_p = \frac{\overline{u}}{a} - \frac{b\sigma_p^{1/2}}{a} \\ \mu_p &= \frac{8}{4} - \frac{4x^{1/2}}{4} \text{ e } \mu_p = \frac{16}{4} - \frac{4x^{1/2}}{4} \end{aligned}$$



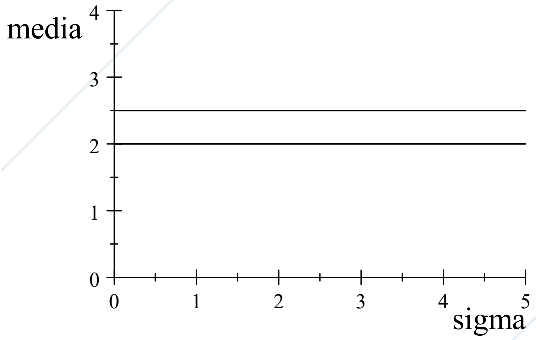
l'utilità cresce nella direzione verso l'alto e a destra (come per i beni normali).

3. Agente neutrale al rischio (Risk neutral). L'investitore ama il rendimento ed è indifferente alla volatilità.

$$u\left(\widetilde{W}\right) = a\mu_p + 0\sigma_p^2$$

Disegnamo la curva d'indifferenza $a\mu_p + b\sigma_p^2 = \overline{u}$, fissando i parametri $a = 4, b = 0, \overline{u} = 8, 10$.

$$u\left(\widetilde{W}\right) = a\mu_p \Longrightarrow \mu_p = \frac{\overline{u}}{a} = \frac{8}{4} \text{ e } \mu_p = \frac{\overline{u}}{a} = \frac{10}{4}$$



le curve d'indifferenza sono rette orizzontali e l'utilità cresce verso l'alto. Il SMS è costante e nullo.

$$SMS \equiv \frac{d\mu_p}{d\sigma_p} = 0$$

2.1 Oggetti di scelta

Cosa "sceglie" l'investitore? L'investitore ha a disposizione l'insieme delle attività finanziarie, di cui consideriamo i rendimenti (tassi di varazione dei prezzi di periodicità parametrica, giornalieri, mensili, annuali). Egli decide le quote w_k ,$k = 1, ..., K$ in cui detenerle in portafoglio affinché il rendimento medio del portafoglio sia massimo, per varianza data, o la varianza sia minima, per rendimento dato.

Considerando le ipotesi sui rendimenti citate nell'introduzione, ogni rendimento è quindi descrivibile da un punto sul piano (σ_i, μ_i) ed anche il portafoglio sarà un punto sul piano (σ_P, μ_P) che varia al variare dei pesi w_k in cui sono detenute le diverse attività.

Definizione 1 *Un **"portafoglio"** è una combinazione lineare di attività finanziarie $\widetilde{r}_k$ mediante un vettore di "pesi" percentuali che sommano ad uno.*

$$\{w\}_{k=1}^{K}, \ \textit{tali che} \ \sum_{k=1}^{K} w_k = 1$$

Essendo un portafoglio una combinazione di variabile aleatorie sarà anche esso una variabile aleatoria di cui defininiamo il rendimento aleatorio

$$\widetilde{r}_p = \sum_{k=1}^{K} w_k \widetilde{r}_k$$

In forma matriciale

$$\widetilde{r}_p \sim N(\mu_P, \sigma_P) = N\left(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\right)$$

Dove

$$\mu_P \overset{def}{=} E(\widetilde{r}_P) = \sum_{k=1}^{K} w_k E(\widetilde{r}_k) = \sum_{k=1}^{K} w_k \mu_k = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 \overset{def}{=} Var(\widetilde{r}_p) &= \sum_{k=1}^{K} w_k^2 E\left[r_k - E(\widetilde{r}_k)\right]^2 + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j\neq k}^{K} w_k w_j E\left[r_k - E(\widetilde{r}_k)\right] E\left[r_j - E(\widetilde{r}_j)\right] \\
&= \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}
\end{aligned}$$

Definizioni ed esempi per $K = 2$.

$$\begin{aligned} \mu_P \stackrel{def}{=} E(\widetilde{r}_p) &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= w_1\mu_1 + w_2\mu_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 \stackrel{def}{=} Var(\widetilde{r}_p) &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + \sigma_{12} w_1 w_2 + \sigma_{21} w_1 w_2 \end{aligned} \tag{2}$$

where $\sigma_{12} = \sigma_{21} \leq \rho\sigma_1\sigma_2$, poiché $\rho \in [-1, 1]$.

Possiamo calcolare il coefficiente ρ^* di correlazione tale per cui

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho^*\sigma_1\sigma_2$$

Definizione 2 *Coefficiente di correlazione*

$$\rho_{ij}^* = \frac{cov(\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)}{\sigma_i\sigma_j} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$$

Da cui

$$\sigma_P^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\rho^*\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2$$

Definizione 3 ***"Attività senza rischio"***. *Attività con rendimento costante e dunque varianza nulla*

$$r_f \sim (r_f, 0)$$

3 Insieme dei portafogli possibili

Il rendimento del portafoglio $\widetilde{r}_p$, è, come già detto, una variabile aleatoria. Per poterlo utilizzare nei calcoli viene "fotografato" nella media e nella varianza.

Cerchiamo la frontiera efficiente di tutti i portafogli possibili date le attività finanziarie disponibili. Ovvero cerchiamo come varia il punto (σ_P, μ_P) al variare del vettore dei pesi $\mathbf{w} = (w_1, ..., w_k, ...w_K)$.

Per fare ciò

1. risolviamo la varianza del portafoglio per i pesi w_k in funzione di σ_P : il vettore $\mathbf{w}(\sigma_P)$
2. sostituiamo poi tali $w_k(\sigma_P)$ nell'equazione del valore atteso μ_P.

In questo modo otteniamo appunto la "frontiera efficiente di tutti i portafogli possibili date le attività finanziarie disponibili".

Consideriamo nel seguito i casi in cui il portafoglio sia costituito da due sole attività finanziarie

Consideriamo il piano (σ_P, μ_P) nel quale ogni punto costituisce un portafoglio. Per poter avere calcoli trattabili consideriamo un portafoglio formato da sole due attività finanziarie e consideriamo la frontiera nei due casi:

- Caso 1 - Un'attività rischiosa e una senza rischio: $\Longrightarrow$ la frontiera efficiente è rappresentata da una retta, la "capital market line" (CML).
- Caso 2 - Due attività rischiose: $\Longrightarrow$ la frontiera efficiente è rappresentata dalla frontiera superiore della curva di isovarianza.
- Caso 3 - Due attività rischiose (l'indice di mercato e un'attività finanziaria che faccia parte dell'indice): $\Longrightarrow$ CAPM.

3.1 Caso 1 - Frontiera efficiente con un'attività rischiosa e una senza rischio: "capital market line"

Introduciamo un'attività senza rischio, ovvero che ha un rendimento dato.

osservazione 1 *L'attività senza rischio introduce la possibilità di prendere e dare a prestito. Ovvero introduce la possibilità di scambiare su un mercato. Determina un prezzo di mercato del rischio ed equivale, nel ruolo, al vincolo di bilancio.*

Consideramo il rendimento di un portafoglio contenente un'attività rischiosa $r_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, che abbia una distribuzione normale e quindi sia definibile dai soli primi due momentied una attività senza rischio, che definizione vale in media in tasso senza rischio ed ha una varianza nulla $r_f \sim (r_f, 0)$. Sia

Definizione 4 $w =$ *quota del portafoglio detenuta nell'attività a rendimento aleatorio (rischiosa)*

Definizione 5 *Il* ***rendimento di portafoglio,*** $\tilde{r_P}$ *è una variabile aleatoria*

$$\tilde{r_P} = w\tilde{r_i} + (1-w) \cdot r_f$$

Una variabile aleatoria non è quantificabile. Per poterla inserire nei calcoli dobbiamo trattare i suoi primi due momenti:

- il valor medio del rendimento del portafoglio

$$\mu_p = w\mu_k + (1-w)\, r_f \tag{3}$$

- la varianza del portafoglio

$$\sigma_P^2 = w^2\sigma_k^2 + (1-w)^2 \cdot 0 + 2w\,(1-w) \cdot 0$$

- lo scarto quadratico medio del portafoglio

$$\sigma_p = w\sigma_i \tag{4}$$

Dall'equazione (4) ricavare

In questo caso semplice, si può sostituire direttamente la (4) esplicitata per w nella (3) ed ottenere la

Definizione 6 ***Capital Market Line****. La retta che esprime il valore atteso (media) del portafoglio, al crescere del rischio (scarto quadratico medio) al variare della quota x di attività rischiosa*

$$\begin{aligned} \mu_p &= r_f + w\,(\mu_i - r_f) \\ &= r_f + \left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma_p \end{aligned} \tag{5}$$

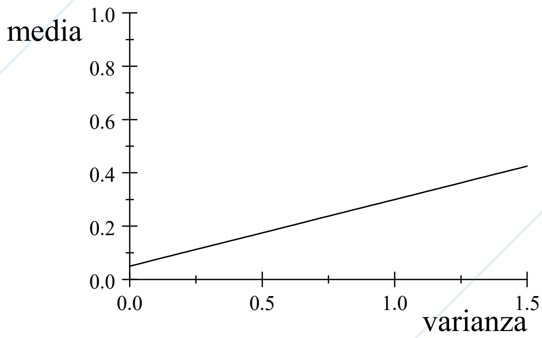
Mettiamo la (5) in grafico esplicitando per μ_p :

- r_f è l'intercetta e rappresenta per l'appunto l'attività finanziaria senza rischio che da un rendimento r_f e un rischio $\sigma_p = 0$. Lo stesso punto esprime un portafoglio investito nella sola attività senza rischio ovvero in cui $w = 0$.

Definizione 7 *Il coefficiente angolare della retta rappresenta il* ***"premio per il rischio"*** *su questo portafoglio. Ovvero quanto rendimento medio in eccesso sul rendimento senza rischio un'attività deve fornire se ha una volatilità pari a σ_i.*

- Esempio grafico per

$$\mu_p = 0.03 + \left(\frac{0.1 - 0.03}{0.2}\right)\sigma_p$$



osservazione 2 *La Capital Market Line è in sostanza il "vincolo di bilancio" per l'investitore.*

- Ogni portafoglio al di sotto di tale retta per un pari rendimento medio offre una rischio(o, sinonimo, volatilità) maggiore, oppure a pari richio offre un rendimento minore. Questa retta sarà l'analogo del vicolo di bilancio nel caso della scelta del consumatore.

4 Caso 2 - Frontiera efficiente con 2 attività rischiose

Metodo.

Stiamo cercando il luogo dei punti di isovarianza al variare del vettore dei pesi $\mathbf{w}$.

Esplicitiamo quindi $\sigma_P^2(w)$, avendo tutti i dati di $\mathbf{w}$ e $\mathbf{\Sigma}$.

Per semplificare, considerando soltanto due attività rischiose, abbiamo soltanto i pesi w e $(1-w)$ e quindi in sostanza la sola incognita w.

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= \begin{pmatrix} w & 1-w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.15 & 0.0725 \\ 0.0725 & 0.27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ 1-w \end{pmatrix} \\ &= 0.275\,w^2 - 0.395\,w + 0.27\end{aligned}$$

Risulta che σ_P^2 è una equazione di II grado in w.

Invertire la funzione risolvendo per $w\left(\sigma_P^2\right)$

$$w\left(\sigma_P^2\right) = \begin{cases} 0.718\,18 + 1.818\,2\sqrt{1.1\sigma_P^2 - 0.140\,98}, & \textit{Soluzione}1 \\ 0.718\,18 - 1.818\,2\sqrt{1.1\sigma_P^2 - 0.140\,98}, & \textit{Soluzione}2 \end{cases}$$

L'equazione è una parabola di II grado, quindi vi sono due soluzioni.

Inserire ognuna delle soluzioni nel vincolo del rendimento atteso.

$$\mu_P = \begin{pmatrix} w & 1-w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi due funzioni di rendimento medio $\mu_P = f\left(w\left(\sigma_P^2\right)\right)$ che sono esattamente quelle che voglio disegnare.

Soluzione 1 (nera sottile)

$$\mu_P\left(\sigma_P^2\right)_1 = \left(\begin{array}{cc} 1.818\,2\sqrt{1.\,1\sigma_P^2 - 0.140\,98} + 0.718\,18 & 1 - \left(1.818\,2\sqrt{1.\,1\sigma_P^2 - 0.140\,98} + 0.718\,18\right) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0.34 \\ 0.47 \end{array}\right)$$

$$\mu_P\left(\sigma_P^2\right) = 0.376\,64 - 0.236\,37\sqrt{1.1\sigma_P^2 - 0.140\,98}$$

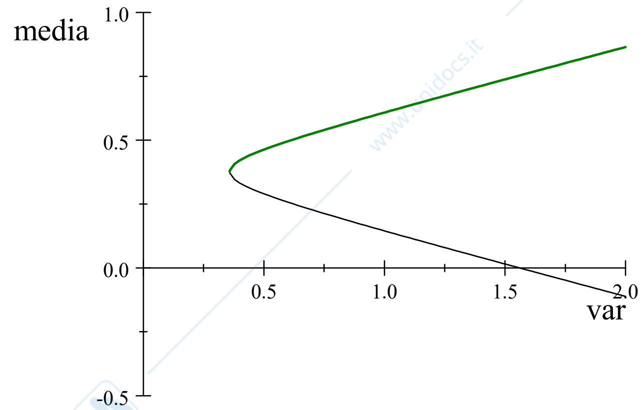
La inserisco nel grafico.

Soluzione 2 (ramo verde in grassetto) - Soluzione dominante

$$\mu_P\left(\sigma_P^2\right)_2 = \left(\begin{array}{cc} 0.718\,18 - 1.818\,2\sqrt{1.\,1\sigma_P^2 - 0.140\,98} & 1 - \left(0.718\,18 - 1.818\,2\sqrt{1.\,1\sigma_P^2 - 0.140\,98}\right) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0.34 \\ 0.47 \end{array}\right) =$$

da cui :

$$\mu_P\left(\sigma_P^2\right)_2 = 0.236\,37\sqrt{1.\,1\sigma_P^2 - 0.140\,98} + 0.376\,64 \tag{6}$$



E' chiaro che solo la soluzione più "alta" (in grassetto) è quella dominante, equazione (6), perché à parità di varianza offre il rendimento medio più alto.

Utilizzando quindi la sola soluzione dominante, per ogni μ_P fissato posso trovare la varianza σ_P^2 corrispondente, che è minima perché appartiene al ramo dominante, oppure, fissata la varianza trovo il rendimento atteso dominante $\mu_P\left(\sigma_P^2\right)$.

osservazione 3 *Nel caso a due dimensioni, è immediatamente visibile quale sia il portafoglio di minima varianza (misurato sell'asse delle ascisse), dato il valore del rendimento medio μ_P (misurato sull'asse delle ordinate) sull'asse delle ordinate. A più dimensioni è necessario risolvere il problema seguente, che svolgiamo per lo stesso caso K=2 e K generico.*

4.1 Derivazione portafoglio di minima varianza per rendimento medio dato

Risolviamo il problema

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w},\lambda,\gamma} Var(\widetilde{r}_P) &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ s.t. \quad \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} &\geq \mu_{dato} \\ \mathbf{w}'\mathbf{1} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Deriviamo il lagrangiano (19) rispetto alle incognite w e λ. Oppure, analogamente, sfruttiamo le derivate di cui sopra in forma matriciale.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w} \quad &: \left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0.15 & 0.0725 \\ 0.0725 & 0.27 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} w \\ 1-w \end{array}\right) - \lambda\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0.34 \\ 0.47 \end{array}\right) = 0 \\ &: 0.55w + 0.13\lambda - 0.395 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \quad : \quad \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 = \mu_{dato}$$
$$: \quad 0.47 - 0.13w = 0.2$$

Dal sistema delle due CPO nelle due incognite, troviamo

$$\begin{aligned} 0.55w + 0.13\lambda - 0.395 &= 0 \\ 0.47 - 0.13w - 1.5 &= 0 \end{aligned}$$

Soluzioni (in cui lascio μ_{dato})

$$\begin{bmatrix} w^* = 3.615\,4 - 7.692\,3 \cdot \mu_{dato} \\ \lambda^* = 15.302 - 35.503 \cdot \mu_{dato} \end{bmatrix}$$

Tabella. Risultati per diversi valori di μ_{dato}

μ_{dato}	20%	40%	70%	100%	150%
w^*	2.08	.54	-1.77	-4.077	-7.92
λ^*	-5.7	0.76	10.5	20.28	-36.6

4.2 Disegno Frontiera efficiente con $K > 2$ attività rischiose (Non per l'esame)

Espongo qui il vero calcolo, solo per gli interessati.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w},\lambda,\gamma} Var(r_P) &= \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ s.t. \quad E(r_P) &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \geq \quad \mu_{dato} \\ \mathbf{w}'\mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\min_{w,\lambda} L = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda\left(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - r_f\right) - \gamma\left(\mathbf{w}'\mathbf{1} - 1\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} &: \quad \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda\boldsymbol{\mu} - \gamma\mathbf{1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &: \quad \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \mu_{dato} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} &: \quad \mathbf{w}'\mathbf{1} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Reiarangiando i termini della CPO 1

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} &= \lambda\boldsymbol{\mu} + \gamma\mathbf{1} \\ \mathbf{w} &= \lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \gamma\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \end{aligned}$$

otteniamo le quote di portafoglio, ma ancora in funzione di λ, γ

$$\mathbf{w}^* = \lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \gamma\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}$$

Quindi per trovare λ, γ, pre-moltiplichiamo per $\boldsymbol{\mu}'$

$$\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} \quad = \boldsymbol{\lambda}\underbrace{\left(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}_{\mathbf{B}} + \boldsymbol{\gamma}\underbrace{\left(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right)}_{\mathbf{A}} \quad = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = r_{given}$$

Premoltiplicando la stessa per il vottore riga e $\mathbf{1}'$ invece di $\boldsymbol{\mu}'$, otteniamo:

$$\mathbf{1}'\mathbf{w} = \lambda\underbrace{\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}_{A} + \gamma\underbrace{\left(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right)}_{C} \quad = 1$$

Quindi per risolvere per λ e γ, abbiamo il seguente sistema di 2 equazioni in 2 incognite

$$\begin{cases} \lambda B + \gamma A = r_{given} \\ \lambda A + \gamma C = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^* = \frac{C \cdot r_{given} - A}{BC - A^2}$$

$$\gamma^* = \frac{B - A \cdot \mu_{dato}}{BC - A^2}$$

e infine

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^* &= \lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \gamma\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \\ &= \frac{Cr - A}{D}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \frac{B - Ar}{D}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} \\ &= \underbrace{\left[\frac{B\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right) - A\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)}{D}\right]}_{g} + \underbrace{\left[\frac{C\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right) - A\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\right)}{D}\right]}_{h} \cdot \mu_{dato} \\ &= \text{constant} + h \cdot \mu_{dato} \end{aligned}$$

Se $\mu_{dato} = 0 \Longrightarrow \mathbf{w}^* = g$
If $\mu_{dato} = 1 \Longrightarrow \mathbf{w}^* = g + h$
Quindi il valore calcolato di

$$\begin{aligned} \mu_P &= \mathbf{w}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{\mu} \\ \sigma_P^2 &= \mathbf{w}^{*\prime} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{w}^* \\ &= (g + h \cdot r_{given})' \cdot \boldsymbol{\Sigma} \cdot (g + h \cdot r_{given}) \\ &= .... \\ &= \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left[r_{given} - \frac{A}{C}\right]^2 \end{aligned}$$

Ma noi abbiamo bisogno della funzione

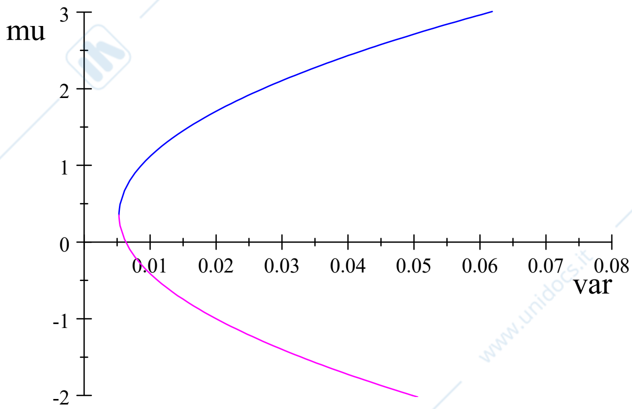
4.2.1 Disegno sul piano (σ, μ)

Risolvendo quest'ultima espressione per $E(r_P)$

$$\mu_P = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}\left(Var(r_P) - \frac{1}{C}\right)}$$

Grazie ai calcoli matriciali in Matlab

$$\mu_P = 0.353 \pm \sqrt{124.46\,(x - 0.0053)}$$



dove

- il portfolio di varianza minima (vertice della parabola) ha coordinate $\left(\frac{1}{C}, \frac{A}{C}\right) = (0.0053, 0.353)$;

4.2.2 Disegno sul piano (σ, μ)

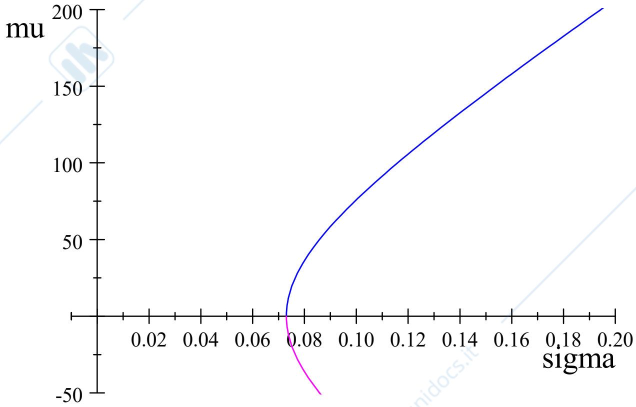
$$\sigma(\widetilde{r_P}) = \sqrt{\frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left[E(r_P) - \frac{A}{C}\right]^2}$$

Solving for $E(r_P)$

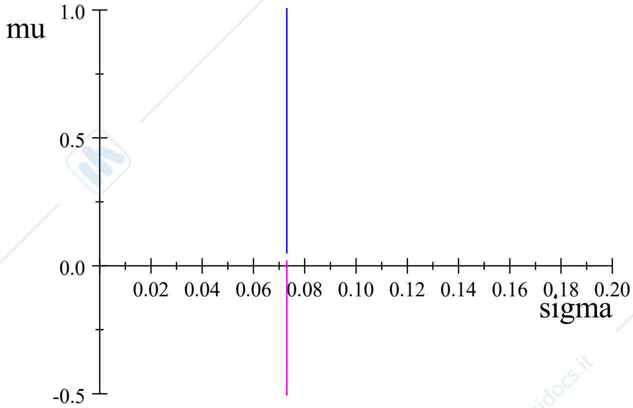
$$E(r_P) = \frac{1}{C}\left(A \pm D\sqrt{\frac{1}{D}(Cx^2 - 1)}\right)$$

Using matlab Computations

$$E\left(r_P\right) = 0.0053\left(6.623 \pm 233570000\sqrt{\frac{1}{233570000}\left(187.66 \cdot \sigma^2\left(\widetilde{r_P}\right) - 1\right)}\right)$$



Zooming in



Where

- the min sigma portfolio (vertex of parabola) has coordinates $\left(\sqrt{\frac{1}{C}}, \frac{A}{C}\right) = (0.0730, 0.353)$

5 Scelta ottima (SI)

Dopo aver definito la funzione di scelta e la frontiera efficiente dobbiamo mettere le due cose insieme e definire la scelta ottima.

Consideriamo i Casi 1 e 2 menzionati.

5.1 Scelta Ottima: portafoglio con un'attività risk-free e un'attività rischiosa

Dati

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_i \\ r_f \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$a > 0$ e $b > 0$, in una funzione di utilità che vede la varianza come un "male". Ottimizzazione di portafoglio con un'attività rischiosa ed una risk-free detenuti rispettivamente nelle quote w e $(1-w)$

$$\begin{aligned} \max_{\sigma_P,\mu_P} u\left(\sigma_P^2,\mu_P\right) &= a\mu_P - b\sigma_P^2 \\ t.c. \quad \tilde{r_p} &= w\tilde{r_i} + (1-w)\, r_f \end{aligned}$$

La variabile aleatoria del portafoglio va tradotta in termini di media e varianza del portafoglio

$$\mu_p = w\mu_i + (1-w)\, r_f \tag{7}$$
$$\sigma_p = w\sigma_i + (1-w)\cdot 0 \tag{8}$$

A questo punto si può sia trattare il problema come un problema di ottimo con due vincoli

$$\max u\left(\sigma_p^2,\mu_p\right)_{\sigma_p^2,\mu_p} = a\mu_p - b\sigma_p^2$$
$$t.c. \quad \begin{cases} \mu_p = w\cdot\mu_i + (1-w)\, r_f \\ \sigma_p = w\cdot\sigma_i \end{cases}$$

oppure si sostituisce il secondo vincolo nel primo per mezzo di w (possibile solo nel caso di un'attività rischiosa e una senza rischio) e si ottiene la CML, ovvero la frontiera efficiente.

$$\begin{aligned} \max u\left(\sigma_p^2,\mu_p\right)_{\sigma_p,\mu_p} &= a\mu_p - b\sigma_p^2 \\ t.c. \quad \mu_p &= r_f + \left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma_p \end{aligned}$$

$$L = a\mu_p - b\sigma_p^2 - \lambda\left[\mu_p - r_f - \left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma_p\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_P} : \quad -2b\sigma_p + \lambda\left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right) = 0 \tag{9}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu_P} : \quad a - \lambda = 0 \tag{10}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} : \quad \mu_p - r_f - \left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma_p = 0 \tag{11}$$

Dalla (10) $\lambda^* = a$. Dividendo la (1)/(2)

$$\begin{aligned} \frac{2b\sigma_p}{a} &= \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i} \\ SMS &= \text{prezzo del rischio} \end{aligned}$$

si ricava

$$\sigma_p^* = \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\frac{a}{2b}$$

sostituendo il valore trovato nella (3) si trova

$$\mu_p^* = r_f + \left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma_p^*$$

Per trovare w^* si usa la (8)

$$w^* = \sigma_p^*/\sigma_i$$

5.1.1 Esempio numerico

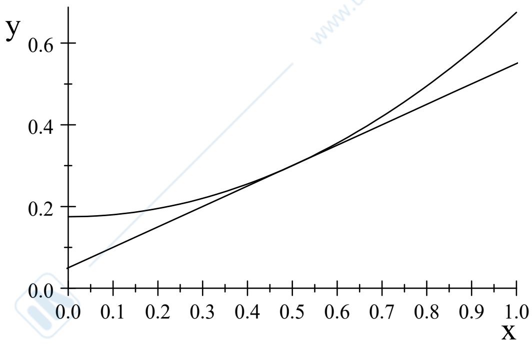
Dati $r_i \sim \left(\mu_i, \sigma_i^2\right) = \left(0.15, 0.2^2\right)$, $\quad r_f \sim (r_f, 0) = (0.05, 0)$, $\quad a = 10, b = 5.$

Soluzione. Applicare i parametri allo svolgimento dell'esercizio, qui sopra. Si ha

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= 10 \\
\sigma_p^* &= \frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\frac{a}{2b} = \frac{0.15-0.05}{0.2}\frac{10}{2\cdot 5} = 0.5 \\
\mu_p^* &= r_f + \left(\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}\right)\sigma_p^* = 0.05 + \left(\frac{0.15-0.05}{0.2}\right)0.5 = 0.3 \\
w^* &= \sigma_p^*/\sigma_i = 0.5/0.2 = 2.5 \\
u^*\left(\mu_p^*, \sigma_p^{*2}\right) &= a\mu_p^* - b\sigma_p^{*2} = 10\cdot 0.3 - 5\cdot 0.5^2 = 1.75
\end{aligned}$$

Per mettere in grafico la curva d'indifferenza tangente, si esprile l'utilità risolvendo per μ_P

$$\mu_p = \frac{u^*}{a} + \frac{b}{a}\sigma_p^{*2} = \frac{1.75}{10} + \frac{5}{10}\sigma_p^2$$



Il fatto che la quota di portafoglio $w^* = 2.5$ significa che la scelta ottima è acquistare l'attività senza rischio (= indebitarsi) per il $(1 - w^*) = 1 - 2.5 = -150\%$ ovvero indebitarsi per il 150% della ricchezza e investire il 250% nell'attività rischiosa.

Se localizzate l'attività $r_i \sim \left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ sul piano, e sapere che quel punto corrisponde ad una quota del 100%, vi accorgete che la scelta ottima è due volte e mezzo più in avanti sulla curva.

5.2 Scelta Ottima: portafoglio con due attività rischiose

Abbiamo il problema di cercare i pesi per un portafoglio che dia un rendimento massimo, dove le attività a disposizione sono due attività rischiose distribuite con il seguente vettore delle medie e matrice di covarianza

$$\begin{aligned}
\max_{\sigma_P,\mu_P} u\left(\sigma_P^2, \mu_P\right) &= a\mu_P - b\sigma_P^2 \\
t.c. \qquad \widetilde{r_p} &= w\widetilde{r_i} + (1-w)\, r_f
\end{aligned}$$

dove

$$\widetilde{r_P} \sim N\left(\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\right)$$

e dove

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

La variabile aleatoria del portafoglio va tradotta in termini di media e varianza del portafoglio

$$\begin{cases} \mu_P = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \\ \sigma_P = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mu_P &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} & (12) \\ &= \begin{pmatrix} w & 1-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ \mu_P &= w\mu_1 + (1-w)\,\mu_2 & (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \\ &= \begin{pmatrix} w & 1-w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ 1-w \end{pmatrix} \\ \sigma_P^2 &= w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w\,(1-w)\,\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & (14) \end{aligned}$$

Metodo:
(i) Risolviamo σ_P^2 per w. Si tratta di un'equazione di II grado, come già spiegato nel Par. 4.
(ii) Inseririamo ognuna delle due $w\left(\sigma_P^2\right)$ in (13) ottenendo un' equazione $\mu_P\left(w\left(\sigma_P^2\right)\right)$ per ogni soluzione. Sono i grafici dei due rami di parabola. Trascuriamo il ramo dominato (più basso) e quello più alto diventa il vincolo dell'ottimizzazione dell'utilità, che chiameremo $\mu_P^*\left(w\left(\sigma_P^2\right)\right)$.

Il problema di ottimo diventa

$$\begin{aligned} \max_{\sigma_P,\mu_P} u\left(\sigma_P^2,\mu_P\right) &= a\mu_P - b\sigma_P^2 \\ & \quad t.c. \qquad \mu_P^*\left(w\left(\sigma_P^2\right)\right) \end{aligned}$$

La soluzione può essere svolta soltanto numericamente.

6 CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Definizione 8 *Il modello CAPM definisce i rendimenti d'equilibrio delle attività rischiose in funzione della covarianza con il portafoglio di mercato*

$$E\left(\tilde{r}_k\right) = r_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}\left[E\left(\tilde{r}_M\right) - r_f\right]$$

dove

$$\beta_i \overset{def}{=} \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

Nel seguito dimostreremo come e sotto quali ipotesi viene derivata questa formula.

Obiettivi del CAPM:

1. determinare il prezzo di mercato del rischio;
2. determinare la misura appropriata del rischio per la singola attività.

Definizione 9 ***"Portafoglio di mercato"*** R_m. *Portafoglio contenente tutte le attività scambiabili sul mercato tenute in proporzione al loro valore relativo ai prezzi d'equilibrio*

$$w_i = \frac{\textit{valore di mercato dell'att. singola}}{\textit{valore di mercato di tutte le att.}}$$

Es. Indice MIB per la borsa di Milano.

Definizione 10 ***"Equilibrio di mercato".*** *I prezzi di tutte le attività sono tali per cui la domanda eguagli l'offerta per tutte le attività.*

Ipotesi 1 *Tutti gli agenti hanno aspettative omogenee sui rendimenti. In particolare, in questo modello, gli agenti condividono una funzione di densità congiunta Normale (o Gaussiana) sulla totalità dei rendimenti.*

Questa fortissima ipotesi implica la seguente identità

Ipotesi 2 *Il portafoglio di mercato* ***e'*** *definito come il portafoglio di tangenza fra l'insieme dei portafogli rischiosi efficienti e la "capital market line".*

$$M \overset{def}{\equiv} T$$

La dimostrazione si basa sul fatto che, dal momento che gli investitori hanno aspettative omogenee, essi percepiranno lo stesso insieme di opportunità di minima varianza.

Non appena le aspettative varierano, i rendimenti attesi e le varianze dei titoli saranno percepite come diverse. Pertanto $M \neq T^i$ dove quest'ultimo rappresenta il portafoglio di tangenza per l'investitore $i-esimo$.

6.1 Derivazione del CAPM

Consideriamo un portafoglio cha abbia una quota a investita nell'attività rischiosa $i-esima$ ed una quota $(1-a)$ nel portafoglio di mercato m. Il rendimento atteso del portafoglio sarà

$$E\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right) = \alpha \cdot E\left(\widetilde{r}_k\right) + (1-\alpha)\, E\left(\widetilde{r}_M\right)$$

$$\begin{aligned} Var\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right) &= \begin{pmatrix} a & (1-a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k^2 & \sigma_{kM} \\ \sigma_{kM} & \sigma_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} \\ &= a^2\sigma_M^2 + a^2\sigma_k^2 - 2\sigma_{Mk}a^2 - 2a\sigma_M^2 + 2\sigma_{Mk}a + \sigma_M^2 \end{aligned}$$

$$\sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right) = \sqrt{a^2\sigma_M^2 + a^2\sigma_k^2 - 2\sigma_{k,M}a^2 - 2a\sigma_M^2 + 2\sigma_{k,M}a + \sigma_M^2}$$

$$\sigma\left(\widetilde{r_P}\right) = \sqrt{a^2\sigma_k^2 + (1-a)^2\,\sigma_M^2 + 2a\,(1-a)\,\sigma_{k,M}} \tag{15}$$

dove $\sigma_{k,M}$ è un altro modo di scrivere $cov(k, M)$.

$$\left.\frac{\partial\sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial a}\right| = \frac{2\sigma_{k,M} - 4a\sigma_{k,M} - 2\sigma_M^2 + 2a\sigma_k^2 + 2a\sigma_M^2}{2\sqrt{a^2\sigma_k^2 + a^2\sigma_M^2 + 2a\sigma_{k,M} + \sigma_M^2 - 2a\sigma_M^2 - 2a^2\sigma_{k,M}}}$$

osservazione 4 *L'attività $i-esima$ appartiene al portafoglio di mercato in quota pari a $(w_i + a)$, dunque a rappresenta l'eccesso di domanda dell'attività $i-esima$. Pertanto* ***in equilibrio deve essere*** $a = 0$.

Dunque in equilibrio bisogna calcolare le due derivate nel punto $a = 0$.

$$\left.\frac{\partial E\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial a}\right|_{a=0} = E\left(\widetilde{r}_k\right) - \mu_M$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial a}\right|_{a=0} &= \frac{2\sigma_{k,M} - 2\sigma_M^2}{2\sqrt{\sigma_M^2}} \\ &= \frac{\sigma_{k,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M} \\ &= \frac{0.04 - 0.05}{\sqrt{0.05}} \end{aligned} \tag{16}$$

osservazione 5 *Affinché il CAPM "funzioni" è necessario che sia* $\sigma_{k,M} > \sigma_M^2$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial \sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}\right|_{a=0} &= \frac{\left.\frac{\partial E(\widetilde{r}_{CAPM})}{\partial a}\right|_{a=0}}{\left.\frac{\partial \sigma(\widetilde{r}_{CAPM})}{\partial a}\right|_{a=0}} \\ &= \frac{\mu_k - \mu_M}{\frac{\sigma_{k,M}-\sigma_M^2}{\sigma_M}}\end{aligned}$$

Cerchiamo il punto della frontiera efficiente dell'insieme dei portafogli con attività rischiose che sia tangente alla CML dell'investitore.

Dobbiamo quindi eguagliare la pendenza dell'insieme dei portafogli con attività rischiose nel punto del portafoglio di mercato e la pendenza della CML (che rappresenta "il prezzo relativo di mercato") (che si trova considerando un'attività rischiosa e una senza rischio).

Tale condizione di tangenza definisce il "beta" ovvero la correlazione fra la proporzione del rischio di mercato contenuta nell'attività $k-esima$ e ed il rendimento atteso che deve fornire per essere inclusa nell'indice di mercato (ovvero essere desiderabile) per l'investitore.

In equilibrio la pendenza in M deve essere pari alla pendenza della "capital market line" che rappresenta "il prezzo relativo di mercato", la quale era $[\mu_M - r_f]/\sigma_M$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial \sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}\right|_{a=0} &= \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \\ \frac{E\left(\widetilde{r}_k\right) - \mu_M}{\frac{\sigma_{k,M}-\sigma_M^2}{\sigma_M}} &= \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\end{aligned}$$

Risolvendo per μ_k

$$\begin{aligned}E\left(\widetilde{r}_k\right) &\overset{defCAPM}{=} r_f + \frac{\sigma_{k,M}}{\sigma_M^2}\left(\mu_M - r_f\right) \\ &= r_f + \beta_{kM}\left(\mu_M - r_f\right)\end{aligned}$$

Ponendo la pendenza dell'insieme nel punto di equilibrio di mercato (M) (**??**) pari alla pendenza della "capital market line" rispetto al portafoglio di tangenza (**??**)

Soluzioni numeriche

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_k = 0.20 \\ \mu_M = 0.10 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.06 \\ 0.06 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}Var\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right) &= \begin{pmatrix} a & (1-a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.1 & 0.06 \\ 0.06 & 0.05 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} \\ &= 0.03a^2 + 0.02a + 0.05\end{aligned}$$

$$\sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right) = \sqrt{0.03a^2 + 0.02a + 0.05}$$

$$\left.\frac{\partial \sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial a}\right| = \frac{1}{2}\frac{0.06a + 0.02}{\sqrt{0.03a^2 + 0.02a + 0.05}}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial a}\right|_{a=0} &= \frac{1}{2}\frac{0.02}{\sqrt{0.05}} \\ &= 0.0447\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial E\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}{\partial \sigma\left(\widetilde{r}_{CAPM}\right)}\right|_{a=0} = \frac{0.20 - 0.1}{0.0447} = 2.24$$

Definizione 11 *Equilibrio ("per gli oggetti di scelta").*

Ponendo la pendenza dell'insieme nel punto di equilibrio di mercato (M) (**??**) pari alla pendenza della "capital market line" rispetto al portafoglio di tangenza (**??**)

$$\frac{E\left(\widetilde{r_M}\right)-r_f}{\sigma_M}=\frac{E\left(\widetilde{r_k}\right)-E\left(\widetilde{r_M}\right)}{\left(\sigma_{k,M}-\sigma_M^2\right)/\sigma_M}$$

si trova il rendimento d'equilibrio commisurato al rischio dell'attività $i-esima$, affinché essa sia domandata nel portafoglio di mercato: questa è l'equazione del $CAPM$:

$$\begin{aligned}E\left(\widetilde{r_k}\right)&=r_f+\tfrac{\sigma_{kM}}{\sigma_M^2}\left[E\left(\widetilde{r_M}\right)-r_f\right]=\\&=r_f+\beta_{kM}\left[E\left(\widetilde{r_M}\right)-r_f\right]\end{aligned} \tag{17}$$

E' l'equazione di una retta che viene detta **"security market line"**se vista nel piano $\left[E\left(\widetilde{r_k}\right),\beta_{kM}\right]$,

La stessa equazione si può scrivere anche come

$$E\left(\widetilde{r_k}\right)=r_f+\frac{\left[E\left(\widetilde{r_M}\right)-r_f\right]}{\sigma_M}\frac{\sigma_{kM}}{\sigma_M}$$

dove

(i) $\left[E\left(\widetilde{r_M}\right)-r_f\right]/\sigma_M$ rappresenta il prezzo del rischio di mercato e

(ii) σ_{kM}/σ_M la quantità di rischio appartenente all'attività $i-esima$.

Tuttavia nell'uso comune si usa sempre la (17) e il prezzo del rischio viene misurato come correlazione all'eccesso di rendimento richiesto sull'attività rischiosa, misurato con $\beta_{im}=\sigma_{kM}/\sigma_M^2$.

Fin qui abbiamo derivato un equilibrio simile all'equilibrio del produttore del metodo generale, ovvero e' stato risposto alla domanda: qual'e' il rendimento (simil prezzo d'offerta) ottimo in equilibrio per un'attività che ha un certo rischio in proporzione al rischio del mercato. Questa e' una sorta di curva d'offerta per le attività. L'idea e' che le attività sono disponibili in quantità perfettamente elastica (curva d'offerta orizzontale) per cui la sola cosa rilevante e' la decisione sul rendimento da offrire per venderla sul mercato. Il CAPM mostra qual'è il rendimento sensato per un'attività rischiosa, dato il rischio di mercato.

6.2 Proprietà del CAPM

1. Il modello è di equilibrio parziale. Le quantità scambiate sono già percepite come di "equilibrio" e i prezzi sono d'equilibrio. L'unica domanda è sul portafoglio da detenere.

2. Il CAPM risponde alla domanda "quale deve essere il Er_i deve essere correlato al mercato affinché i prezzi di equilibrio siano quelli di mercato osservati. (Stima del "beta").

3. (Danthine Donaldson 2015) pp. 212) La Capital Market Line ci dà la frontiera efficiente di distribuzione del portafoglio fra l'indice e il risk-free. Ma allora cosa possiamo dire di un'altra attività qualunque che non appartiene alla frontiera efficiente?

   Partiamo dalla Security market line in cui β_{im} è la variabile dipendente

   $$E\widetilde{r}_i=r_f+\left[E\widetilde{r}_m-r_f\right]\beta_{im}$$

   dove

   $$\beta_{im}=\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

   e si moltiplica e divide il termine a destra per σ_m

   $$E\widetilde{r}_i=r_f+\left[\left(\frac{E\widetilde{r}_m-r_f}{\sigma_m}\right)\beta_{im}\right]\cdot\sigma_m$$

la SML si trasforma in una relazione in cui β_{im} va a "pesare" il rischio di mercato che l'attività i-esima deve considerare e la variabile indipendente diventa il rischio di mercato.

Inoltre

$$\begin{aligned} E\widetilde{r}_i &= r_f + \left[\left(\frac{E\widetilde{r}_m - r_f}{\sigma_m}\right)\beta_{im}\right]\cdot\sigma_m \\ &= r_f + \left[\frac{E\widetilde{r}_M - r_f}{\sigma_m}\right]\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}\cdot\sigma_m \end{aligned}$$

ma

$$\sigma_{im} = \rho_{im}\sigma_i\sigma_m$$

dunque

$$\begin{aligned} E\widetilde{r}_i &= r_f + \left(\frac{E\widetilde{r}_M - r_f}{\sigma_m}\right)\frac{(\rho_{im}\sigma_i\sigma_m)}{\sigma_m^2}\cdot\sigma_m \\ &= r_f + \left(\frac{E\widetilde{r}_M - r_f}{\sigma_m}\right)\frac{(\rho_{im}\sigma_i)}{\sigma_m^2}\cdot\sigma_m^2 \\ &= (\text{semplificando } \sigma_m^2) \\ &= r_f + \left[\left(\frac{E\widetilde{r}_M - r_f}{\sigma_m}\right)\rho_{im}\right]\cdot\sigma_i \qquad (18) \end{aligned}$$

Nella (18) la lezione del CAPM è che soltanto la frazione ρ_{im} del rischio di mercato è remunerata dal mercato. Il resto $(1-\rho_{im})$ è "diversified away" quando l'attività è inserita nel portafoglio di mercato. Infatti

$$\sigma_m = \sum_{i=1}^{N} w_i\left(\rho_{im}\sigma_m\right)$$

4. In equilibrio ogni attività deve avere un prezzo in modo che il suo rendimento aggiustato per il rischio sia sulla "security market line".

   Questo implica che attività interne all'insieme, ovvero inefficienti, siano sulla retta. Perche'? Perche' non tutta la varianza e' rilevante per gli investitori. La varianza che non dipende dalla variabilità di m e' diversificabile. Gli emittenti sono quindi disposti a pagare un premio al rischio per la sola covarianza con m.

$$\text{Rischio totale} = \text{rischio sistematico} + \text{rischio asistematico}$$

   Sia

$$\widetilde{R}_i - r_f = a_i + \beta_i\left(\widetilde{R}_m - r_f\right) + \varepsilon_i$$

   e la varianza si possa scomporre in

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \underbrace{(\rho_{im}\sigma_i)^2}_{sistematico} + \underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{\text{diversificabile}} \end{aligned}$$

   quello diversificabile sparisce diversificando il portafoglio.

5. La misura del rischio per singole attività è additiva. Si può derivare che (cfr. Copeland-Weston)

$$\beta_P = a\beta_x + (1-a)\beta_y$$

Si veda la Critica di Roll (1977).

References

[1] Brunnermeier, M. K. (2001). Asset pricing under asymmetric information: Bubbles, crashes, technical analysis, and herding. Oxford University Press.

[2] Campbell, J. Y. (2017). Financial Decisions and Markets: a Course in Asset Pricing. Princeton University Press.

[3] Copeland, T., Weston, J., & Shastri, K. (2005). Financial theory and corporate policy. 1000 p. Editorial Pearson Addison Wesley, New York, USA

[4] Danthine, J. P., & Donaldson, J. B. (2015). Intermediate Financial Theory. Academic Press. 3rd Ed.

[5] De Matos, J. A. (2001). Theoretical foundations of corporate finance. Princeton University Press.

[6] Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2013). Modern portfolio theory and investment analysis. John Wiley & Sons. 9th ed

[7] Grinold, R. C., & Kahn, R. N. (2000). Active Portfolio Management. McGraw-Hill.

[8] Ingersoll, J. E. (1987). Theory of financial decision making (Vol. 3). Rowman & Littlefield.

[9] Roll, R. (1977) A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests', Journal of Financial Economics, Vol. 4, No. 2.

Asset Pricing in Mercati Completi (Asset Pricing in Complete Markets)

Maria Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

March 24, 2021

Abstract

(EN) Asset pricing in complete markets is explained. The essential definitions and price relationsships leading to the "Fundmental Theorem of Asset Pricing" and the "Risk Neutral Pricing" are set, followed by the "no-arbitrage condiions of I and II type. Given these ingredients fixed income asset pricing in complete markets is a straightforward result.

Under Incomplete markets, some methods of market completion through the use of derivatives are explained.

Abstract

(ITA) L'obiettivo è spiegare in maniera succinta l'asset pricing nell'ipotesi di mercati completi. Dopo aver dato notazioni e definizioni, viene esposto il Terema fondamentale dell'Asset Pricing, il Risk-Neutral Pricing e le condizioni di non-arbitraggio. Date queste nozioni, il pricing delle attività finanziarie a reddito fisso diventa un facile risultato di calcolo matriciale.

KEYWORDS: portafoglio, portfolio, asset pricing, complete markets,, fixed income, no-arbitrage, market completion.

JEL: D15, D52, D53, E43, G11, G12.

1 Notazioni e Definizioni

Definizione 1 ***Mercati Completi.*** *Esiste un mercato per ogni merce distinta per: (i) caratteristica fisica , (ii) data, (iii) stato di natura. Sia L il numero delle merci fisiche e K il numero di attività finanziarie, S il numero degli eventi possibili in ogni data, T il numero (dato e finito!) di anni, avremmo mercati completi se avremo*

$$\textit{Num. mercati } = \#\left(L+K\right) \times \#S \times \#T$$

Nell'ipotesi di esistenza di mercati completi, in data corrente, ciascun operatore potrebbe prendere decisioni per qualunque transazione futura. Tutte le domande e le offerte per ogni mercato sarebbero definite in data corrente e, dunque, sostanzialmente, il passare del tempo non apporterebbe alcuna informazione in più. I prezzi e le quantità d'equilibrio per ogni merce e/o attività finanziaria distinta per caratteristica, data e stato di natura sarebbero definite già nell'istante corrente.

Questa definizione riporta le caratteristiche di "certezza" sul "futuro" rendendo il "futuro" trattabile con il metodo statico in condizioni di certezza.

L'ipotesi di esistenza di comdizioni di mercati completi è ovviamente irrealistica, ma è molto utile come "modello di riferimento" (benchmark).

Arrow (1962) afferma che, per avere "mercati completi" non è necessario avere un mercato per ogni bene in ogni stato di natura, ovvero $\#\left(L+K\right) \times \#S \times \#T$, ma è sufficiente poter trasferire la "ricchezza" in ogni stato di natura futuro e dunque avere $\#L$ mercati nel periodo corrente e un numero di attività finanziarie pari al numero degli stati di natura esistenti in ogni data futura, $\#S \times \#T$. (Nel seguito ipotizzeremo che $T = 1$ per semplicità).

Definizione 2 ***Mercati finanziari completi.*** *Sul mercato esiste un numero di attività finanziarie linearmente indipendenti maggiore o oguale al numero degli stati di natura: $K = S$. Pertanto la matrice Y ha rango pieno (le attività finanziarie sono linearmente indipendenti) ed è dunque invertibile.*

Teorema 1 *(Arrow (1962) L'equilibrio generale con "mercati completi" è equivalente all'equiibrio generale con "mercati finanziari completi".*

Proof. (Euristica) La dimostrazione è basata sulla possibilità di ridurre i vincoli di bilancio futuri al vincolo di bilancio intertemporale. ■

- Date: $t = 0$ è la data corrente e $t = 1, ..., T$ sono le date future.
- Per ogni data futura possono esistere 1 o più stati di natura: $s_t = 1, ..., S_t$. Quando, utilizzassimo una sola data futura, l'indice temporale viene omesso per semplificare la notazione.
- Attività finanziarie $k = 1, ..., K$.
- Tasso di interesse risk-free: r_f
- Nota: Si noti che nel seguito, le lettere minuscole in "grassetto" rappresentano "vettori", mentre le lettere maiuscole in grassetto rappresentano matrici. Il vettore riga ha l'apostrofo $\mathbf{x}'$.

Definizione 3 *Un'**attività finanziaria** è un contratto con un costo $v_{t,k}$ nella data di acquisto che dà origine ad una serie di pagamenti pattuiti per in ogni stato di natura (per una o più date future).*

1. I **"pagamenti di una singola attività finanziaria in termini assoluti"** (*yields*), per ogni data t, possono essere rappresentati da un vettore colonna

$$\mathbf{y}_{t.k} = \begin{pmatrix} y_{t,1k} \\ ... \\ y_{t,sk} \\ y_{t,S,k} \end{pmatrix}$$

2. Per ogni data t, la matrice $\mathbf{Y}_{t,SxK}$ esprime i **pagamenti di tutte le attività finanziarie in essere**, e ogni colonna esprime i pagamenti di una attività k, mentre ogni riga rappresenta i pagamenti dovuti in quello stato di natura da tutte le attività finanziarie in essere

$$\mathbf{Y}_{t,S,K} = \begin{bmatrix} y_{t,11} & ... & y_{t,1k} & ... & y_{t,1K} \\ ... & & ... & & ... \\ y_{t,s1} & ... & y_{t,s,k} & ... & y_{t,sK} \\ ... & & ... & & ... \\ y_{t,S1} & ... & y_{t,S,k} & ... & y_{t,SK} \end{bmatrix}, \quad \forall t = 1, ..., T$$

3. **Rendimenti di una singola attività finanziaria in termini relativi**, si ottengono dividendo lo *yield* a scadenza di ciascuna attività finanziaria per il prezzo dell'attività nel periodo iniziale (ovvero il prezzo d'acquisto). In sostanza si divide ogni vettore colonna della matrice $\mathbf{Y}_{t,S,K}$, per il prezzo v_k relativo alla data di acquisto. Si ottiene il rendimento R_{sk} dell'atività $k - esima$ in ogni stato di natura k :

$$R_{t,k} = \begin{pmatrix} y_{t,1k}/v_{t_0,k} \\ ... \\ y_{t,sk}/v_{t_0,k} \\ y_{t,Sk}/v_{t_0,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{t,1k} \\ ... \\ R_{t,sk} \\ R_{t,Sk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_{t,1k} \\ ... \\ 1 + r_{t,sk} \\ 1 + r_{t,S,k} \end{pmatrix}$$

4. I **prezzi di mercato delle attività finanziarie complesse alla data corrente**, t, sono i valori $v_{t,k} = v_{t,1}, ...v_{t,K}$. (NB. In genere i vettore sono espressi come vettori colonna. Quando lo si traspone sotto forma di vettore riga, si usa l'apostrofo che significa "trasposto").

$$\mathbf{v}'_{t-1,1xK} = (v_{t-1,1}, ..., v_{t-1,k}, ...v_{t-1,K})$$

5. Dividendo tutti i termini di una colonna $k - esima$ della matrice $Y_{t,s,k}$ per il prezzo $v_{t-1,k}$ si ottiene la **matrice dei rendimenti** $R_{t,SxK}$ la matrice che contiene i rendimenti di tutte le K attività finanziarie **per ogni data** t.

$$\mathbf{R}_{t,SxK} = \begin{bmatrix} R_{t,11} & ... & R_{t,1k} & ... & R_{t,1K} \\ ... & & ... & & ... \\ R_{t,s1} & ... & R_{t,s,k} & ... & R_{t,sK} \\ ... & & ... & & ... \\ R_{t,S1} & ... & R_{t,S,k} & ... & R_{t,SK} \end{bmatrix}, \quad \forall t = 1, ..., T$$

6. Quantità di attività finanziarie, acquistate in data $t-1$, in termini assoluti $n_{t-1,k} = n_{t-1}, 1, ..., n_{t.1,K}$.

Definizione 4 ***Attività pura*** *s. E' un contratto (assicurativo semplice) che, a fronte di un prezzo p_s pagato nella data precedente, garantisce un* ***pagamento certo nel "solo" stato di natura*** *s della data successiva. In generale, si preferisce normalizzare tali attività e pertanto per definizione l'attività pura dà un rendimento pari ad 1 nel solo stato di natura s appartenente ad una data t futura..*

$$\boldsymbol{\iota}_{s=3}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 5 *La* ***matrice dei pagamenti delle attività pure*** *è l'insieme dei pagamenti di ogni singola attività pura ed è la matrice unitaria con elementi*

$$y_{t,s,k} = \begin{cases} 1, & per\ s = k \\ 0, & per\ s \neq k \end{cases}$$

$$I_{t,S,K} = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & & ... & & ... \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & & ... & & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione 6 *Chiamiamo i* ***"prezzi non-normalizzati" delle attività pure in data t****, $\mathbf{q}'_{1xS}(t) = (q_1, ..., q_s, ...q_S)$.*

Attenzione, la ragione della non-normalizzazione è per quando gli stati di natura appartengano a date diverse.

Definizione 7 *Chiamiamo i* ***"prezzi normalizzati" delle attività pure in data t****, o* ***pseudo-probabilità***

$$\boldsymbol{\pi}'_{1xS}(t) = \left(\frac{q_1}{\sum_{s=1}^{S}}, ..., \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S}}, ... \frac{q_S}{\sum_{s=1}^{S}} \right).$$

Definizione 8 *L'****attività risk free*** *è un contratto che a fronte di un pagamento che chiamiamo $v_{t,s,k} = v_b$, darà lo stesso pagamento in ogni stato di natura, ovvero un pagamento $y_{t,k}$ indipendente dallo stato di natura r_f in ogni stato di natura*

$$\mathbf{y}_{t.k} = \begin{pmatrix} y_{t,k} \\ ... \\ y_{t,k} \\ y_{t,k} \end{pmatrix}$$

in modo tale che, dividendo il pagamento certo per il prezzo del contratto della data di acquisto

$$R_{t,k} = \begin{pmatrix} y_{tk}/v_{t_0,k} \\ ... \\ y_{t,k}/v_{t_0,k} \\ y_{t,k}/v_{t_0,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{t,k} \\ ... \\ R_{tk} \\ R_{tk} \end{pmatrix} = (\mathbf{1} + \mathbf{r}_f) = \begin{pmatrix} (1+r_f) \\ ... \\ (1+r_f) \end{pmatrix}$$

Possiamo normalizzare l'attività risk-free come un contratto che dia il pagamento unitario in ogni s ovvero come *replica* del portafoglio delle S attività pure

$$\mathbf{y}_{t.k} = \begin{pmatrix} y_{t,k} \\ \cdots \\ y_{t,k} \\ y_{t,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ma allora tale attività finanziaria, che paga 1 con certezza in data $(t+1)$, deve costare un prezzo pari ad $1/(1+r_f)$ in data t. Affinché la somma dei prezzi delle attività pure dia come risultato $1/(1+r_f)$, è necessario normalizzare e scontare al tasso r_f i prezzi delle attività pure. Avremo

$$\begin{aligned} v_b &= \frac{1}{1+r_f} = \frac{1}{1+r_f} \cdot \frac{q_1}{\sum_{s=1}^{S} q_s} + \ldots \frac{1}{1+r_f} \cdot \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S} q_s} + \ldots \frac{1}{1+r_f} \cdot \frac{q_S}{\sum_{s=1}^{S} q_s} \\ &= \frac{1}{1+r_f} \cdot \sum_{s=1}^{S} \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S} q_s} \\ &= p_1 + \ldots + p_s + \ldots. + p_S \end{aligned}$$

Osservazione 1 *Attenzione, quando bisogna normalizzare i prezzi q_s? I prezzi dei vari stati di natura **devono sommare ad 1, solo se appartengono alla stessa data!** Se trattiamo, ad esempio, titoli di stato o zero coupon su date diverse, il q_s è unico e pertanto non va normalizzato, ma soltanto attualizzato.*

Quindi

Definizione 9 *I "**prezzi delle attività pure**" p_s per $s = 1, \ldots, S$ (in termini vettoriali espressi in vettore riga)*

$$\mathbf{p}'_{1xS}(t+1) = (p_1, \ldots, p_s, \ldots p_S)$$

sono tali che

$$p_1 + \ldots + p_S = \sum_{s=1}^{S} p_s \equiv \mathbf{1}'\mathbf{p} = \frac{1}{1+r_f}$$

sono i prezzi in data (t) di un'attività che dia un pagamento unitario nello stato di natura s nella data $(t+1)$. Si tratta quindi dei tassi di sconto uniperiodali di attività che pagano 1 nello stato di natura s in $(t+1)$.

Adesso vediamo come estrapolare dai prezzi i mercato delle attività pure, le probabilità che il mercato attribuisce agli stati di natura. Considerando gli stessi prezzi, normalizzati, nel periodo corrente, ovvero non scontati al periodo precedente (o di acquisto, da precisare nei casi specifici), diventano

Definizione 10 *Le "**probabilità neutrali al rischio**" o "**pseudo-probabilità**" π_s per ogni stato di natura (all'interno di una sola data t) sono i prezzi delle attività pure normalizzati in modo che la loro somma sia pari ad uno all'interno della stessa data, **ma "non" sono scontati alla data precedente.** Nel caso in cui stessimo valutando date future più lontane*

$(t+n)$ per $n>1$, la sommatoria è pari ad uno per gli stati di natura che partono da uno stesso stato di natura $[nodo\{(t-1),s\}]$ nella data precedente. Si ha:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{q_1}{\sum_{s=1}^{S} q_s} + ... + \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S} q_s} + ... + \frac{q_S}{\sum_{s=1}^{S} q_s} \\ &= \sum_{s=1}^{S} \frac{q_s}{\sum_{s=1}^{S} q_s} = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \\ &= \pi_1 + ... + \pi_s + ... + \pi_S \end{aligned}$$

Specificando le date

$$\begin{aligned} \pi_{ts} &\geq 0 \\ \sum_{s=1}^{S} \pi(s_t|s_{t-1}) &= 1, \qquad \forall t = 1, ..., T \end{aligned} \tag{1}$$

Quindi

$$\boldsymbol{\pi} = (1+r_f)\,\mathbf{p}$$

e dunque i **prezzi delle attività pure** sono le probabilità degli stati di natura scontate ad oggi

$$\mathbf{p} = \frac{1}{(1+r_f)}\boldsymbol{\pi}$$

Osservazione 2 *I prezzi delle attività pure sono i prezzi delle attività pure "scontati" ad oggi.*

Le probabilità neutrali al rischio, sono le probabilità degli stati di natura che sommano ad 1 nella data corrente.

Possiamo ridefinire

Definizione 11 *Un'**attività finanziaria senza rischio (risk-free asset) numerario** è un portafoglio che contiene un'attività pura per ogni stato di natura, che deve rendere nel periodo futuro il valore 1 con certezza. Il suo valore nel periodo corrente è quindi dato dalla somma dei prezzi delle attività pure e deve essere pari al valore presente di 1€ nel periodo futuro. Quindi il prezzo del suo valore attuale deve essere $1/(1+r_f)$.*

$$p_1 + ... + p_S = \sum_{s=1}^{S} p_s \equiv \mathbf{1}'\mathbf{p} = \frac{1}{1+r_f} \equiv \textit{valore presente di 1\$ domani} \tag{2}$$

Definizione 12 *L'attività finanziaria risk-free uniperiodale, che garantisca un rendimento certo e costante e normalizato ad 1 in ogni stato di natura s. è un portafoglio contenente tutte le attività pure ciascuna con peso unitario.*

*Definiamo il **prezzo dell'attività risk-free uniperiodale** è quindi il prezzo di tale portafoglio*

$$v_b = p_1 + ... + p_S = \frac{1}{1+r_f}$$

Esprimendo lo stesso prezzo in termini delle probabilità Risk-neutral (RN), avremo

$$v_b = \frac{1}{1+r_f} \cdot (\pi_1 + ... + \pi_S)$$

2 Asset Pricing in Mercati Completi

Ci siamo occupati di definire una base dimensionale di attività pure perché in questo modo, se conoscessimo la probabilità degli stati di natura, sarebbe possibile prezzare qualunque attività finanziaria in termini di somma dei valori scontati dei pagamenti pertinenti a ciascuno stato di natura. La teoria dell'ottimizzazione intertemporale in condizioni di incertezza considera tali *probabilità come soggettive* per ogni investitore. In questo caso i prezzi da attribuire alle attività finanziarie saranno dei prezzi "soggettivi" e solo l'equilibrio simultaneo fra domanda ed offerta di ciascuna attività potrà determinare i "prezzi di equilibrio".

Tale metodo resta teorico ed impossibile da praticare nella complessità dell'industria finanziaria. Sembrerebbe dunque che tale metodo sia "inutile". Tuttavia, è invece possibile *trarre tali probabilità dai prezzi d'equilibrio esistenti sul mercato.* Questo metodo ha necessità della validità della definizione di mercati completi, a seguito della quale è appunto possibile determinare le probabilità degli stati di natura in modo oggettivo, e tali probabilità definiscono in modo univoco i prezzi delle attività finanziarie, confidando sul fatto che sul mercato non possano resistere opportunità di arbitraggio.

La scelta ottima del consumatore neutrale al rischio determina, come prezzi di equilibrio, i prezzi seguenti:

Esempio 1 *Consideriamo i seguenti panieri*

	Paniere $k = 1$	*Paniere $k = 2$*
Arance, $s = 1$	*20*	*10*
Banane, $s = 2$	*10*	*30*
Prezzo Paniere €$= p_k$	*8*	*9*

Abbiamo $K = 2$ panieri (Attività finanziarie complesse) e $S = 2$ frutti (attività pure nello stesso numero degli stati di natura).

Abbiamo il seguente sistema in 2 equazioni nelle due incognite q_1, q_2 prezzi dei singoli frutti.

$$\begin{aligned} 20q_1 + 10q_2 &= 8 \\ 10q_1 + 30q_2 &= 9 \end{aligned}$$

Vogliamo sapere il prezzo di ciascun frutto (ciascuna attività finanziaria pura) q_s. Posso risolvere per sostituzione, oppure in forma matriciale

$$\mathbf{q}'\mathbf{Y} = \mathbf{p}'$$

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}_{1xS} \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}_{SxK} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}_{Kx1}$$

Per isolare il vettore $\mathbf{q}$, si postmoltiplicano entrambi i termini per la matrce inversa degli Yields e si rivolve per il vettore riga $\mathbf{q}'$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^{-1} &= \mathbf{p}' \cdot \mathbf{Y}^{-1} \\ \mathbf{q}' &= \mathbf{p}' \cdot \mathbf{Y}^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot inv \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix} inv \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{50} & \frac{1}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{50} & -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{50} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}
$$

e dunque i prezzi dei frutti (attività pure non normalizzate) sono i q_s.

$$
\begin{aligned}
q_1(Arance) &= 0.3 \\
q_2(Banane) &= 0.2
\end{aligned}
$$

Per avere i prezzi che sommano ad 1, le **pseudo probabilità**, ovvero il prezzo % delle arance o dell banane nella data futura $t+1$

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{q_1}{q_1+q_2}; \\
\pi_2 &= \frac{q_2}{q_1+q_2}
\end{aligned}
$$

Se vogliamo i prezzi delle attività pure scontate alla data $(t-1)$ corrente

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{1+r_f}\frac{q_1}{q_1+q_2} = \frac{1}{1+r_f}\pi_1 \\
p_2 &= \frac{1}{1+r_f}\frac{q_2}{q_1+q_2} = \frac{1}{1+r_f}\pi_2
\end{aligned}
$$

Esempio 2 *Data la matrice dei rendimenti o payoffs con 3 attività finanziarie complesse e 3 stati di natura nella data stessa data futura*

$$
\mathbf{Y}_{SxK} = \begin{pmatrix} 103 & 110 & 98 \\ 102 & 100 & 105 \\ 100 & 101 & 102 \end{pmatrix}
$$

Osserviamo i prezzi di mercato di tali attività finanziarie, ma vogliamo estrarre i prezzi delle attività pure e le probabilità degli stati di natura. Procediamo come sopra e consideriamo il sistema

$$
\mathbf{q}'\mathbf{Y} = \mathbf{p}'
$$

$$
\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}_{1xS} \begin{pmatrix} 103 & 110 & 98 \\ 102 & 100 & 105 \\ 100 & 101 & 102 \end{pmatrix}_{SxK} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}_{Kx1}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}' \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^{-1} &= \mathbf{p}' \cdot \mathbf{Y}^{-1} \\
\mathbf{q}' &= \mathbf{p}' \cdot \mathbf{Y}^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}_{1xS} \cdot \begin{pmatrix} 103 & 110 & 98 \\ 102 & 100 & 105 \\ 100 & 101 & 102 \end{pmatrix}_{SxK} \cdot inv \begin{pmatrix} 103 & 110 & 98 \\ 102 & 100 & 105 \\ 100 & 101 & 102 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2.5 \end{pmatrix}_{Kx1} inv \begin{pmatrix} 103 & 110 & 98 \\ 102 & 100 & 105 \\ 100 & 101 & 102 \end{pmatrix}
$$

$$\left(\begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array}\right)_{1xS} \cdot \left(\begin{array}{ccc} 103 & 110 & 98 \\ 102 & 100 & 105 \\ 100 & 101 & 102 \end{array}\right)_{SxK} \cdot \left(\begin{array}{ccc} \frac{405}{1559} & \frac{1322}{1559} & -\frac{1750}{1559} \\ -\frac{96}{1559} & -\frac{706}{1559} & \frac{819}{1559} \\ -\frac{302}{1559} & -\frac{597}{1559} & \frac{920}{1559} \end{array}\right)_{KxS} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} 99 & 102 & 98 \end{array}\right)_{1xK} \left(\begin{array}{ccc} \frac{405}{1559} & \frac{1322}{1559} & -\frac{1750}{1559} \\ -\frac{96}{1559} & -\frac{706}{1559} & \frac{819}{1559} \\ -\frac{302}{1559} & -\frac{597}{1559} & \frac{920}{1559} \end{array}\right)_{KxS}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_3 \end{array}\right)_{1xS} \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{SxS} = \left(\begin{array}{ccc} 0.453\,50 & 0.230\,92 & 0.287\,36 \end{array}\right)_{1xS}$$

Esercizio 1 *Normalizzate i q_s, calcolando le pseudo probabilità.*

Esercizio 2 *Scontate le probabilità al tasso $r_f = 0.05$ e calcolate i p_s = prezzi delle attività pure.*

Osservazione 3 *I prezzi per beni o assets che danno yield in un solo stato di natura sono "bassi", perché si suppone chhe per garantirsi un payoff / yield con certezza in data futura io debba comprare "tutte" gli* ***assets complementari*** *che insieme mi coprano tutti gli eventi in data futura.*

Teorema 2 ***Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing****. Se $K = S$, allora il prezzo di un'attività finanziaria complessa è il risultato della combinazione lineare dei rendimenti, che offre in ogni stato di natura, moltiplicato per i prezzi di ogni stato di natura*

$$v_{(t-1)k} = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^{S} q_{ts} y_{sk}, \qquad \forall \text{ att. fin. } k$$

Ovvero i prezzi delle attività complesse

$$\mathbf{v}'_{1xK} = \mathbf{q}'_{1xS} \mathbf{Y}_{S,K} \tag{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} v_{(t-1)1} & v_{(t-1)k} & v_{(t-1)K} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} q_{t1} & q_{tk} & q_{tS} \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & y_{1k} & y_{1K} \\ y_{s1} & y_{s,k} & y_{sK} \\ y_{S1} & y_{S,k} & y_{SK} \end{array}\right)$$

(attenzione quei prezzi q_s non sono normalizzati) oppure, equivalentemente

$$\left(\begin{array}{ccc} v_{(t-1)1} & v_{(t-1)k} & v_{(t-1)K} \end{array}\right) = \left(\frac{1}{1+r_f} \begin{array}{ccc} \frac{q_{t1}}{\sum_s q_{ts}} & \frac{q_{ts}}{\sum_s q_{ts}} & \frac{q_{tS}}{\sum_s q_{ts}} \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & y_{1k} & y_{1K} \\ y_{s1} & y_{s,k} & y_{sK} \\ y_{S1} & y_{S,k} & y_{SK} \end{array}\right)$$

se e solo se le diverse attività danno yields nella stessa data

$$\left(\begin{array}{ccc} v_{(t-1)1} & v_{(t-1)k} & v_{(t-1)K} \end{array}\right) = \frac{1}{1+r_f} \left(\begin{array}{ccc} \pi_{t1} & \pi_{ts} & \pi_{tS} \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} y_{11} & y_{1k} & y_{1K} \\ y_{s1} & y_{s,k} & y_{sK} \\ y_{S1} & y_{S,k} & y_{SK} \end{array}\right)$$

Per ogni

$$v_{(t-1)k} = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^{S} \pi_{ts} y_{sk}, \qquad \forall k$$

Considerando il vettore riga che contiene tutti i $v_{(t-1)k}$, in forma vettoriale

$$\mathbf{v}'_{1xK} = \frac{1}{1+r_f}\boldsymbol{\pi}'_{1xS}\mathbf{Y}_{S,K} \tag{4}$$

Corollario 1 *Osservando sul mercato il vettore dei prezzi $\mathbf{v}_{Kx1}$ e dei pagamenti $\mathbf{Y}_{S,K}$ è possibile identificare i prezzi delle attività pure $\mathbf{p}_{Sx1}$ (o delle probabilità $\boldsymbol{\pi}_{Sx1}$).*

Attenzione: Stiamo supponendo che il prezzi sul mercato riguardino date diverse e pertanto non vadano normalizzati (è sempre cosi sul mercato ....).

$$\begin{pmatrix} q_{t1} & q_{tk} & q_{tS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{(t-1)1} & v_{(t-1)k} & v_{(t-1)K} \end{pmatrix} inv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{s,1} & y_{S,1} \\ y_{1,k} & y_{s,k} & y_{S,k} \\ y_{K} & y_{Ks} & y_{KS} \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, dopo aver normalizzato i $\{q_{ts}\}$ (se e solo se le attività appartengano alla stessa data e siano "complementari")

$$\boldsymbol{\pi}'_{1xS} = (1+r_f)\,\mathbf{v}'_{1xK}\mathbf{Y}^{-1}_{S,K}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_{t1} & \pi_{tk} & \pi_{tS} \end{pmatrix} = (1+r_f)\begin{pmatrix} v_{(t-1)1} & v_{(t-1)k} & v_{(t-1)K} \end{pmatrix} inv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{1k} & y_{1K} \\ y_{s1} & y_{s,k} & y_{sK} \\ y_{S1} & y_{S,k} & y_{SK} \end{pmatrix}$$

Corollario 2 *Se $K = S$, tale vettore $\boldsymbol{\pi}_{Sx1}$ è unico.*

Corollario 3 *Se $K = S$, conoscendo i prezzi delle attività pure e la matrice dei pagamenti, mediante il Teorema "Fondamentale", è possibile prezzare qualunque attività finanziaria, perché è possibile valutare in termini oggettivi tutti i pagamenti da essa forniti, utilizzando la* (4) .

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

2.1 Risk-Neutral Pricing

Definizione 13 ***"Risk-neutral Pricing"*** *Il valore di ogni attività finanziaria può essere calcolato come valore medio atteso scontato ad oggi dei rendimenti previsti in ogni stato di natura ponderati per le probabilità risk-neutral*

$$v_k = \frac{1}{1+r_f} \sum_{s=1}^{S} \pi_s y_{s,k}$$

In termini matriciali

$$\mathbf{v}_{(K\times 1)} = \frac{\mathbf{E}_s\left[\mathbf{y}_{(\mathbf{1}\times\mathbf{K})}\right]}{1+r_f}$$

dove ogni v_k è la media ponderata della k-esima colonna della matrice $\mathbf{Y}_{(\mathbf{S}\times\mathbf{K})}$ scontata alla data precedente dove v_k è la media ponderata del K-esimo vettore colonna della matrice dei rendimenti futuri $\mathbf{Y}_{(\mathbf{S}\times\mathbf{K})}$

$$\mathbf{v}_{(K\times 1)} = \boldsymbol{\pi}'_{(\mathbf{1}\times\mathbf{S})} \mathbf{Y}_{(\mathbf{S}\times\mathbf{K})} \left(\frac{1}{1+r_f}\right)$$

Per poter definire le opportunità di arbitraggio, torniamo alle nozioni di vincolo di bilancio. Consideriamo $K = 2$ e scriviamo il VB0 e il VBs generico per uno dei due stati di natura.

$$\begin{aligned} p_0 c_0 + (v_{01} n_{01} + v_{02} n_{02}) &= p_0 w_0, \qquad (VB0) \\ p_s c_s &= p_0 w_0 + \left[n_{01} y_{s1} + n_{02} y_{s2}\right], \qquad (VBs) \end{aligned}$$

Le quantità di attività finanziarie aquistate possono essere definite in forma di quote percentuali di portafoglio, dividendo ogni n_{0k} per il totale delle quantità detenute

$$w_{tk} = \frac{n_{tk}}{\sum_{k=0}^{K} n_{tk}}$$

Definizione 14 ***Costo del Portafoglio*** *P è il valore di carico del portafoglio in data $t = 0$, ovvero il termine entro parentesi nel $VB0$*

$$Costo\,(P) = \sum_{k=1}^{K} n_{tk} v_{tk} = \mathbf{n}'_t \mathbf{v}_t$$

oppure in termini percentuali

$$Costo\,(P) = \sum_{k=1}^{K} w_{tk} v_{tk} = \mathbf{w}'_t \mathbf{v}_t$$

Osservazione 4 ***Short Selling***. *Attenzione! Un costo "negativo" indica che l'investitore sta vendendo allo scoperto (va "short"), con l'idea di ricomprare nello stato di natura successivo. Ovvero*

$$\begin{aligned} p_0 c_0 - (v_{01} n_{01} + v_{02} n_{02}) = p_0 w_0, \qquad (VB0) \\ \Longrightarrow p_0 c_0 = (v_{01} n_{01} + v_{02} n_{02}) + p_0 w_0, \qquad (VB0) \end{aligned}$$

ovvero il valore di carico del portafoglio rappresenta un "reddito" in data $t = 0$!!!

Definizione 15 ***Rendimento del Portafoglio*** *P è il valore del portafoglio nello stato di natura s, che consideriamo la data di vendita o realizzo del portafoglio, ovvero il termine entro parentesi quadra nel VBs*

$$\begin{aligned} Rendimento\,(P) &= \sum_{k=1}^{K} n_{tk} y_{t,sk} = \mathbf{n}_t' \mathbf{y}_t \\ Rendimento\,(P) &= \sum_{k=1}^{K} n_{tk} y_{t,sk} = \mathbf{w}_t' \mathbf{y}_t \end{aligned}$$

Osservazione 5 ***Short Selling.*** *Attenzione! Un Rendimento con segno meno davanti indica che l'investitore sta ricomprando ciò che aveva venduto allo scoperto. Ovvero è una spesa aggiuntiva nello stato s.*

$$\begin{aligned} p_s c_s = p_0 w_0 - [n_{01} y_{s1} + n_{02} y_{s2}]\,, \qquad (VBs) \\ \Longrightarrow p_s c_s + [n_{01} y_{s1} + n_{02} y_{s2}] = p_0 w_0, \qquad (VBs) \end{aligned}$$

Definizione 16 ***Opportunità di Arbitraggio.*** *Sia dato un portafoglio P con pesi $\mathbf{w}_t \in R^K$ e prezzi delle attività finanziarie al tempo t : $\mathbf{v}_t \in R^K$. Tale portafoglio avrà costo di acquisto*

$$Costo\,(P) = \sum_{k=1}^{K} w_{tk} v_{tk} = \mathbf{w}_t' \mathbf{v}_t$$

ed un rendimento nel periodo successivo espresso da un vettore che quantifica il rendimento in ogni stato s

$$\mathbf{R}(P) = \mathbf{w}_t' \mathbf{Y}_{t,SxK}$$

dove

$$w_{tk} = \frac{n_{tk}}{\sum_{k=0}^{K} n_{tk}}$$

1. *Esiste* ***"Opportunità di arbitraggio del I tipo"*** *se $\exists$ un portafoglio P tale che*

$$Costo\,(P) = \sum_{k=1}^{K} w_{tk} v_{tk} = \mathbf{w}_t' \mathbf{v}_t = 0$$

(il costo del portafoglio è la spesa che si aggiungeva al consumo in data $t = 0$ (o in ogni data in cui si investe, ovvero nella data da cui si diramino stati di natura)

e abbia rendimento pari a zero e positivo in almeno uno stato di natura

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\,(P) &= \sum_{k=1}^{K} w_{tk} y_{t,sk} = \mathbf{w}_t' \mathbf{y}_t \geq 0 \\ \mathbf{R}\,(P) &= \mathbf{w}_t' \mathbf{Y}_{t,SxK} \geq 0, \text{ per tutti i } k, \\ &= \mathbf{w}_t' \mathbf{Y}_{t,SxK} > 0, \text{ per almeno un } k, \end{aligned}$$

(il rendimento è ciò che si aggiungeva alla dotazione nel termine di destra di ogni vincolo di bilancio nello stato s (VBs)).

2. *Esiste* ***"Opportunità di arbitraggio del II tipo"*** *se* $\exists$ *un portafoglio* P *tale che*

$$Costo\,(P) = \sum_{k=1}^{K} w_{tk} v_{tk} = \mathbf{w}_t' \mathbf{v}_t < 0 \tag{5}$$

e il rendimento nullo in almeno uno stato di natura

$$\mathbf{R}\,(P) = \mathbf{y}_{Sx1}(P) = \mathbf{w}_t' \mathbf{Y}_{t,SxK} \leq 0$$

E' chiaro che la dimensione di tali portafogli, se esistessero, sarebbe illimitata, perché non comportano costi. Quindi la

Ipotesi 1 ***No-Arbitrage Condition*** *(NAC). Le opportunità di arbitraggio I e II sono impossibili.*

Tale ipotesi deve essere soddisfatta affinché il Teorema Fondamentale (3) possa sussistere.

2.2 Generare matrice attività pure da una generica matrice di payoffs

- Avendo un insieme di $K = S$ di attività finanziarie che generano una matrice qualunque di payoffs $\mathbf{Y}_{SxK}$, come costruire portafogli capaci di pagare 1 in ogni stato di natura?

Banale: cerchiamo di costruire una matrice Identità $\mathbf{I}_{SxK}$.
E' sufficiente calcolare la matrice inversa di $\mathbf{Y}_{SxK}$ e chiamarla $\mathbf{X}_{SxK}$.

Esempio 3 *Data la matrice dei rendimenti o payoffs*

$$\mathbf{Y}_{SxK} = \begin{pmatrix} 1.03 & 1.10 & 0.98 \\ 1.02 & 1.00 & 1.05 \\ 1.00 & 1.01 & 1.02 \end{pmatrix}$$

cerchiamo la matrice dei pesi $\mathbf{X}_{SxK}$ tale che, moltiplicata per la matrice originale, ci dia la matrice delle attività pure.

Ebbene tali pesi sono rappresentati dalle colonne della matrice inversa della Y.

$$\mathbf{X}_{KxS} = inv\left(\mathbf{Y}_{SxK}\right) = \begin{pmatrix} 25.978 & 84.798 & -112.25 \\ -6.1578 & -45.285 & 52.534 \\ -19.371 & -38.294 & 59.012 \end{pmatrix}$$

La prima colonna della matrice inversa indica i coefficienti portafoglio in cui detenere i tre payoffs della prima riga della matrice Y espresse dalle colonne della matrice $\mathbf{Y}_{SxK}$ originale per ottenere il payoff 1 nel primo stato di natura.

$$\begin{aligned} 1_{s,s} &= \sum_{k=1}^{K} y_k(s) \cdot x_k(s'), \qquad k = s \\ 0_{s,'} &= \sum_{k=1}^{K} y_k(s) \cdot x_k(s' \neq s), \qquad k \neq s \end{aligned}$$

Es.

$$1.03 \cdot 25.978 + 1.10 \cdot (-6.1578) + 0.98 \cdot (-19.371) = 1$$

Per costruzione

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{SxK} \cdot inv\left(\mathbf{Y}\right)_{KxS} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1.03 & 1.10 & 0.98 \\ 1.02 & 1.00 & 1.05 \\ 1.00 & 1.01 & 1.02 \end{pmatrix}_{SxK} \cdot \begin{pmatrix} 25.978 & 84.798 & -112.25 \\ -6.1578 & -45.285 & 52.534 \\ -19.371 & -38.294 & 59.012 \end{pmatrix}_{KxS} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{SxS} \end{aligned}$$

2.3 Portafoglio di Arbitraggio

Esempio 1. Da Danthine & Donaldson (2015)

In un mondo con $S = 4$, sia dato il titolo con seguenti pagamenti

$$Y_{S,K} = \begin{array}{cccccc} \mathbf{s \backslash k} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} = \mathbf{Complex\_Asset} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

L'attività complessa può essere replicata da un portafoglio di attività pure.

Dati i prezzi delle attività pure non normalizzate $\mathbf{q}' = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (0.86, 0.94, 0.93, 0.90)$.

Il prezzo dell'attività complessa v risulta

$$v = \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}_{.,5}$$

$$v = \begin{pmatrix} .86 & .94 & .93 & .90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 11.58€$$

Supponiamo che il prezzo di mercato $q_5 = 9.80€$

E' profittevole effettuare arbitraggio, ovvero costruire un portafoglio in cui compro 1 attività a 9.80€ e vendo la replica a 11.58€. Ottengo un profitto di

$$\pi\,(t = 0) = -q_5 + v = -9.80 + 11.58 = 1.78$$

e non ho passività future perché i pagamenti futuri si annullano.

Questo "trade" continua fino a quando la differenza fra il prezzo e il prezzo della replica non coincidano.

2.4 Ricavare la Term Structure

2.4.1 Procedura 1

L'obiettivo è creare uno zero coupon per la scadenza data, prendendo due titoli qualunque per quella scadenza con cedole qualunque. Devo cioè creare una "replica" di uno zero-coupon a partire da due titoli con la scadenza di cui ho bisogno, ma con cedole. Per costruire la "replica" di uno zero coupon devo costruire un portafoglio che otenga i due tioli in modo che la somma ponderata delle cedole mi dia zero.

Consideriamo i seguenti due titoli e consideriamo la matrice dei payoffs

$t \quad \backslash \quad k$		2
0	-101.00	-97
1	7.5	5
2	7.5	5
3	7.5	5
4	7.5	5
5	107	105

(Nota. Qui gli stati di natura corrispondono a date future, diverse fra loro, nello specifico sono anni).

Si vuole costruire un portafoglio che crei uno zero coupon a 5 anni. Vogliamo quindi che i payoffs delle date $t = 1, 2, 3, 4$ siano pari a zero.

Chiamiamo:

- $\pi (t = 0)$ il costo per comprare il portafoglio
- $\pi (t = 1, ..., T)$ il payoff pagato dal possesso del portafoglio.

Cerchiamo la ponderazione lineare delle due attività mediante i coefficienti $a = -1$ e b incogniti tali che le cedole vengano annullate:

$$\pi (t = 1, 2, 3, 4) = a \cdot 7.5 + b \cdot 5 = 0$$

Abbiamo un'equazione e possiamo risolvere per una sola incognita. Imponiamo $a = -1$ e risolviamo per b, per una qualunque delle date intermedie, ovvero escludendo $t = 0$ e $t = T$.

$$b^* = 1.5$$

Il portafoglio diventerà quindi una nuova attività finanziaria $\pi (t)$. Chiamando le due attività finanziarie quotate con i numeri delle due colonne (1) e (2)

$$\begin{aligned} \pi (t) &= a \cdot (1) + b \cdot (2) \\ &= -(1) + 1.5\,(2) \end{aligned}$$

Il portafoglio avrà "costo" pari al payoff ponderato in $t = 0$, "payoffs nulli" per $t = 1, 2, 3, 4$ e "payoff ponderato positivo" in $t = T = 5$.

Nota: Qualora il segno di $\pi (t) > 0$ e $\pi (T) < 0$ fossero opposti, è sufficiente usare a e b con segni opposti).

Costruzione zero-coupon sintetico					
	pesi in portafoglio	-1	1,5		
	s\k	Bond 1	Bond2		Replica:
Prezzo in t =	0	101	97		44,5
Cedola in t =	1	7,5	5		0
Cedola in t =	2	7,5	5		0
Cedola in t =	3	7,5	5		0
Cedola in t =	4	7,5	5		0
Pagamento Finale	**5**	**107**	**105**		**50,5**

Normalizzazione a 100 dello zero-coupon sintetico						
	pesi in portafoglio	-1	1,5			
	s\k	Bond 1	Bond2		Replica:	Replica su 100
Prezzo in t =	0	101	97		0,88	88,12
Cedola in t =	1	7,5	5		0	0,00
Cedola in t =	2	7,5	5		0	0,00
Cedola in t =	3	7,5	5		0	0,00
Cedola in t =	4	7,5	5		0	0,00
Pagamento Finale	**5**	**107**	**105**		**1**	**100,00**

MA noi vogliamo uno zero coupon che ci dia 1 a scadenza (o 100, o 1000 come ci pare).

Se voglio che il payoff finae sia pari a 100 devo dividere il (pagamento (t=T) / esso stesso), ovvero $[\pi(T)/\pi(T)] = Y(T)$.

Ma allora devo dividere i pagamenti di ogni $t = 0, 1, 2, 3, 4$, per $\pi(T)$.

Nelle caselle $t = 1, 2, 3, 4$ il numeratore era zero e quindi resta zero.

Il "costo ponderato" $[\pi(t=0)/\pi(T)]$ sarà il prezzo dello zero coupon o attività pura, $v(t=0)$.

Dunque abbiamo l'attività pura ha un prezzo di 0.8812€ per un payoff di 1€ fra 5 anni.

$$0.8812 = \frac{1}{(1+r_5)^5}$$

Equivalentemente ,normalizzando al valore 100 la scadenza

$$88.12 = \frac{100}{(1+r_5)^5}$$

$$\begin{aligned} r_5 &= (100/v)\hat{}(1/t) - 1 = 0.0549 \\ &= (100/88.12)^{(1/5)} - 1 = 0.0256 \end{aligned}$$

Nello stesso modo si può procedere, costruendo un portafoglio che replichi lo zero-coupon a partire da due attività a 4 anni etc.

2.4.2 Procedura 2 - Bootstrap nel discreto

Un altro modo è utilizzare lo zero-coupon a 1 anno quotato sul mercato (BOT a 1 anno).

Per esempio:

$$94.34 = \frac{100}{(1+r_1)} \Longrightarrow r_1 = 0.06$$

Considerare un BTP a 2 anni con cedola pari a $0.065 \cdot 100$, di cui il prezzo è quotato. Si ha:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{6.5}{1+r_1} + \frac{106.5}{(1+r_2)^2} \\ 100 &= \frac{6.5}{1+0.06} + \frac{106.5}{(1+r_2)^2} \Longrightarrow r_2 = 0.065 \end{aligned}$$

Poi

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{7.2}{1+r_1} + \frac{7.2}{(1+r_2)^2} + \frac{107.2}{(1+r_3)^3} \\ 100 &= \frac{7.2}{1+0.06} + \frac{7.2}{(1+0.065)^2} + \frac{107.2}{(1+r_3)^3} \Longrightarrow r_3 = 0.072 \end{aligned}$$

2.4.3 Procedura 2bis - Bootstrap nel continuo

Consideriamo il problema di valutare il tasso implicito in :

1. titoli zero-coupon, ma con vita residua inferiore alla scadenza formale del titolo: $(T-t) < T$
2. titoli con coupon, ma con vita residua inferiore alla scadenza formale del titolo $(T-t) < T$ e dunque, anche, con pagamento delle cedole in date diverse dal semestre :$(T-t) < T$.

Vedere la prossima dispensa.

2.5 Implementazione del Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing

A questo punto avendo i tassi per ogni data/stato di natura si può procedere a prezzare qualunque attività con flussi di pagamenti.

Supponiamo dover valutare un BTP a 4 anni con cedole di 80 annuali

$$v_0 = 0.08q_1 + 0.08q_2 + 0.08q_3 + 1.08q_4$$

sappiamo che

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{1.06}1000 = 943.39 \\ q_2 &= \frac{1}{(1.065113)^2}1000 = 881.47 \\ q_3 &= \frac{1}{(1.072644)^3}1000 = 810.28 \\ q_4 &= \frac{1}{(1.09935)^4}1000 = 684.63 \end{aligned}$$

Dunque, commisurato a 1000 unità del titolo (= lotto minimo)

$$\begin{aligned} v_0 &= 0.08 \cdot 943.39 + 0.08 \cdot 881.47 + 0.08 \cdot 810.28 + 1.08 \cdot 684.63 \\ &= 950.21€ \end{aligned}$$

Osservazione 6 *Notare che i q_t sono i "prezzi delle attività pure", se e solo se consideriamo che gli stati di natura s, intesi uno per ogni data futura $t = 1, 2, 3, 4$.*

2.6 Vincolo Legge di Walras e convenzioni di calcolo

I prezzi delle attività finanziarie seguono le regole microeconomiche dell'equilibrio generale. Pertanto, se le attività finanziarie da prezzare sono K, soltanto $(K-1)$ prezzi v_k saranno indipendenti. Per questa ragione l'ingegneria finanziaria segue la convenzione seguente. Nella matrice Y_{SxK} vengono sempre aggiunti nella prima colonna (o nella prima riga nel caso di matrice trasposta) i pagamenti, costanti, dell'attività risk-free. Poi tutte le colonne della matrice inclusa quella risk-free vengono divise per il payoff riskfree, ovvero per $(1+r_f)$. In questo modo otteniamo la matrice dei rendimenti scontati rispetto all'attività riskfree. A questo punto abbiamo una matrice in cui ciascuna colonna è divisa per $(1+r_f)$ e la prima colonna ha tutti 1. Il sistema che ne deriva calcola quindi i π_s delle sole attività rischiose (che sono il numero che avevamo inzialmente, prima di aggiungere l'attività senza rischio) e una delle equazioni del sistema esprime il fatto che $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$.

Questo risultato è esattamente la legge di Walras

Definizione 17 ***Vincolo: Legge di Walras.*** *Solo $(K-1)$ prezzi relativi sono indipendenti. Quindi definisco un'attività "numerario" quella riskless ed ottengo $(K-1)$ probabilità, che sono in sostanza dei prezzi relativi, perché sommano a 1. Il sistema è quindi di $(S-1)$ (perché $K=S$) incognite π_s in $(S-1)$ equazioni di eccesso di pagamento.*

2.6.1 Normalizzazione della matrice Y invece che i prezzi

Siano i prezzi delle attività quotate

$$\begin{pmatrix} v^b(0), & v^k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Y_{S\times K}(t=1) = \begin{pmatrix} Periodi & AttRiskFree & AttRischiosa \\ s=1 & 1.1 & 3 \\ s=2 & 1.1 & 7 \end{pmatrix}$$

Controlliamo i prezzi delle attività pure

$$\mathbf{v}' = \mathbf{p}'\mathbf{Y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & 3 \\ 1.1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 & 3 \\ 1.1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.590\,91 & 0.318\,18 \end{pmatrix} \\ &= 0.590\,91 + 0.318\,18 \end{aligned}$$

la cui somma

$$0.590\,91 + 0.318\,18 = 0.91 = \frac{1}{1.1}$$

ovvero

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{1+r_f}$$

Normalizzazione della matrice invece che dei prezzi:

La matrice va trasformata dividendo tutte le colonne per la prima colonna

$$Y_{S\times K}\,(t=0)=\begin{pmatrix} Periodi & AttRiskFree & AttRischiosa \\ s=1 & 1 & 3/(1.1)=2.7273 \\ s=2 & 1 & 7/(1.1)=6.3636 \end{pmatrix}$$

Adesso possiamo impostare il sistema per trovare direttamente le probabilità risk-neutral

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}=\boldsymbol{\pi}'\mathbf{Y} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2.7273 \\ 1 & 6.3636 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}\mathbf{Y}\cdot\mathbf{Y}^{-1} &= \mathbf{q}\cdot\mathbf{Y}^{-1} \\ \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2.7273 \\ 1 & 6.3636 \end{pmatrix} inv\begin{pmatrix} 1 & 2.7273 \\ 1 & 6.3636 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} inv\begin{pmatrix} 1 & 2.7273 \\ 1 & 6.3636 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{v}'\cdot\mathbf{Y}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2.7273 \\ 1 & 6.3636 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se invece volessi i prezzi delle attività pure scontate alla data corrente

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{1}{1+r_f}\mathbf{v}\cdot\mathbf{Y}^{-1} \\ &= \frac{1}{1.1}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2.7273 \\ 1 & 6.3636 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0.590\,91 & 0.318\,18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cui somma

$$0.590\,91+0.318\,18=0.91=\frac{1}{1.1}$$

Ovvero la matrice normalizzata moltiplicata per il tasso di sconto porta agli stessi prezzi iniziali.

3 Mercati Incompleti

Normalmente è difficile anche solo ipotizzare che il numero di eventi futuri sia finito e descrivibile.

Corollario 4 ***Mercati Incompleti****. Se $K < S$, i K prezzi resteranno funzione degli $(S - K)$ stati di natura residui, restando quindi prezzi "incerti".*

Il teorema della valutazione che soddisfi il pincipio di non arbitraggio fallisce se i mercati sono incompleti a causa di due ragioni principali:

1. $K < S$: non ci sono un numero sufficiente di attività finanziarie.

Es. Esistano due attività finanziarie, una risk-free e una rischiosa, ma $S = 3$. E' possibile scrivere il sistema di equazioni di valutazione, ma non è possibile calcolare le probabilità π_s perché la matrice Y_{SxK} non è invertibile.

2. Il rango della matrice $Y_{S \times K} < S$: alcune delle attività finanziare sono linearmente dipendenti o stocasticamente "dominate" da altre.

3.1 Completamento del Mercato mediante Opzioni

Tuttavia a partire dalla data corrente è sensato pensare che gli eventi possibili per l'immediato futuro siano sintetizzabili in un numero prevedibile. Per esempio, si possono creare intervalli nella variable dell'indice di mercato o nel tasso d'interesse che rappresentino lo stato "normale", "boom", "recessione".

Dunque l'obiettivo è ottenere la matrice dei payoffs $Y_{S,K}$ invertibile e per ottenere questo è necessario che i payoffs delle attività finanziarie siano linearmente indipendenti.

Corollario 5 ***Completamento del mercato****. Per questo l'industria finanziaria cerca di creare attività finanziarie sintetiche linearmente indipendenti dalle attività esistenti, che riescano a "completare" il mercato.*

Per completare il mercato vi sono due modi:

1. Emettere attività finanziarie aggiuntive con i payoffs desiderati.

2. Scrivere opzioni su attività esistenti.

Se i due metodi in teoria sono equivalenti, l'emissione di nuove attività finanziarie richiede una compliance giuridica molto più gravosa in termini di tempi e costi. Per questa ragione l'industria finanziaria si è sviluppata creando appunto le opzioni derivate.

Affinché le opzioni riescano a creare attività finanziarie linearmente indipendenti è necessario che l'attività sottostante "discrimini" fra gli stati di natura esistenti.

3.1.1 Esempio 1

Esista sul mercato la sola attività finanziaria

Stato	**Payoff**
s = **1**	1
s = **2**	2
s = **3**	3

E' possibile utilizzare le seguenti call scritte sull'attività che ha i payoffs della colonna $\mathbf{Call}([1,2,3], K=2)$, dove K =prezzo d'esercizio.

Stato	**Att.Fin.**	$\mathbf{C}([1,2,3], K=1)$	$\mathbf{C}([1,2,3], K=2)$
$\mathbf{s=1}$	1	0	0
$\mathbf{s=2}$	2	1	0
$\mathbf{s=3}$	3	2	1

La matrice trovata ha rango pieno (Determinante > 0), è invertibile.

3.1.2 Esempio 2

Esista sul mercato la sola attività finanziaria

Stato	**Payoff**
$\mathbf{s=1}$	2
$\mathbf{s=2}$	2
$\mathbf{s=3}$	3

E' possibile utilizzare le seguenti call scritte sull'attività che ha i payoffs della colonna $\mathbf{Call}([1,2,3], K=2)$, dove K =prezzo d'esercizio.

Stato	**Att.Fin.**	$\mathbf{C}([1,2,3], K\leq 2)$	$\mathbf{C}([1,2,3], 2<K\leq 3)$
$\mathbf{s=1}$	2	$2-K$	0
$\mathbf{s=2}$	2	$2-K$	0
$\mathbf{s=3}$	3	$3-K$	$3-K$

In questo caso, siccome l'attività pre-esistente non discrimina fra gli gli stati di natura 1 e 2, non discriminano neppure le opzioni.

3.1.3 Esempio 3

Esista sul mercato la sola attività finanziaria

Stato	**Att.Fin.1**	**Att.Fin.2**	$\mathbf{C}([1,2,3], 2<K\leq 3)$
$\mathbf{s=1}$	1	1	0
$\mathbf{s=2}$	1	2	0
$\mathbf{s=3}$	2	1	$3-K$
$\mathbf{s=4}$	2	2	

In questo caso scegliendo l'attività 1 o l'attività 2 come sottostante per le opzioni non funziona perché entrambe non discriminano tutte le attività

Stato	**Att.Fin.1**	**Att.Fin.2**	**Portafoglio** : $\mathbf{2}(AttFin1)+1(AttFin2)$
$\mathbf{s=1}$	1	1	3
$\mathbf{s=2}$	1	2	4
$\mathbf{s=3}$	2	1	5
$\mathbf{s=4}$	2	2	6

Su questo è possibile scrivere opzioni e creare la matrice invertibile

Stato	**Portafoglio** : $\mathbf{2}(AttFin1) + 1(AttFin2)$	$\mathbf{C}\begin{pmatrix} [1,2,3,4], \\ K=3 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C}\begin{pmatrix} [1,2,3,4], \\ K=4 \end{pmatrix}$	$\mathbf{C}\begin{pmatrix} [1,2,3,4], \\ K=5 \end{pmatrix}$
$\mathbf{s=1}$	3	0	0	0
$\mathbf{s=2}$	4	1	0	0
$\mathbf{s=3}$	5	2	1	0
$\mathbf{s=4}$	6	3	2	1

Ed abbiamo la matrice invertibile.

3.1.4 Esempio 4: Butterfly Spread su Prezzo di un'azione

Vedere Foglio Excel.

Si possono considerare 3 intervalli di prezzo.

- $S_T = S_{t=0}$
- $S_T = S_{t=0} + \delta$
- $S_T = S_{t=0} - \delta$

Supponiamo $S_{t=0} = 100$€, e $\delta = 1$€ e che il costo delle call in $t_0 = c$.

Considerando come sottostante il prezzo di un'azione S è possibile creare il portafoglio seguente:

- Acquisto 1 Call $(S, K = 99)$
- Vendita di 2 Call $(S, K = 100)$
- Acquisto 1 Call $(S, K = 101)$

Il costo del portafoglio in $t = 0$ è

$$V(t=0) = -c + 2c - c = 0$$

Il valore del portafoglio a scadenza sarà

$$V(t=0) = C(S_T, K=99) - 2(S_T, K=100) + C(S_T, K=101)$$

il valore del portafoglio dipenderà dal valore realizzato si S_T. Si veda la simulazione sul file Excel.

References

[1] Brunnermeier, M. K. (2001). Asset pricing under asymmetric information: Bubbles, crashes, technical analysis, and herding. Oxford University Press.

[2] Campbell, J. Y. (2017). Financial Decisions and Markets: a Course in Asset Pricing. Princeton University Press.

[3] Copeland, T., Weston, J., & Shastri, K. (2005). Financial theory and corporate policy. 1000 p. Editorial Pearson Addison Wesley, New York, USA

[4] Danthine, J. P., & Donaldson, J. B. (2015). Intermediate Financial Theory. Academic Press. 3rd Ed.

[5] De Matos, J. A. (2001). Theoretical foundations of corporate finance. Princeton University Press.

[6] Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, S. J., & Goetzmann, W. N. (2013). Modern portfolio theory and investment analysis. John Wiley & Sons. 9th ed

[7] Grinold, R. C., & Kahn, R. N. (2000). Active Portfolio Management. McGraw-Hill.

[8] Ingersoll, J. E. (1987). Theory of financial decision making (Vol. 3). Rowman & Littlefield.

[9] Merton, R. C. (1971) Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, Journal of Economic Theory, Volume 3, Issue 4, 373-413.

[10] Merton, R. C. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, 41(5), 867-887.

4 Appendice

4.0.5 Determinanti economiche dei prezzi delle attività pure

Viene mostrato come i prezzi delle attività pure dipendano da:

1. Tasso di preferenza intertemporale del consumatore

$$\theta = \frac{1}{1+r_f}$$

2. Probabilità attesa soggettiva (subjective belief) che uno stato di natura avvenga (state probabilities) π_s. Ma se le probabilità soggettive sono diverse fra investitori si può scomporre la probabilità soggettiva in due parti.

$$\begin{aligned}
p_s &= \theta \cdot \pi_s \\
&= \frac{1€}{1+E(r)} \cdot \pi_s \\
&= \frac{1€}{1+r_f} \cdot \pi_s \cdot \left[\frac{1+r_f}{1+E(R_s)}\right] \\
&= \frac{1€}{1+r_f} \cdot \pi_s \cdot \left[\frac{1+r_f+E(R_s)-E(R_s)}{1+E(R_s)}\right] \\
&= \frac{1€}{1+r_f}\pi_s \left[\frac{1+E(R_s)}{1+E(R_s)} - \frac{E(R_s)-r_f}{1+E(R_s)}\right] \\
&= \frac{1€}{1+r_f}\pi_s \left[1 - \frac{E(R_s)-r_f}{1+E(R_s)}\right]
\end{aligned}$$

Quindi, le determinanti del prezzo dell'attività pura p_s sono:

1. il payoff di 1€ nello stato di natura s in data futura, scontato ad oggi,
2. la probabilità dello stato di natura s,
3. un fattore di aggiustamento al rischio, secondo il quale, quanto maggiore è il rendimento atteso soggettivo $E(R_s)$, tanto più basso è p_s

$$E(R_s) \gtreqless r, \qquad \text{for} \begin{cases} RA \\ RN. \\ RL \end{cases}$$

Tassi d'Interesse e Bond Pricing

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Lezioni di "Pricing"

April 16, 2021

La parte teorica è svolta in queste note, mentre i calcoli sono nel file Excel.

1 Capitalizzazione e Attualizzazione

- Capitalizzazione annuale

$$A_t = A_0 (1 + r_1)(1 + r_2) \ldots (1 + r_t)$$

ma se $r_t = r, \forall t$

$$A_t = A_0 (1 + r)^t$$

- Capitalizzazione semestrale $= t \cdot \frac{1}{2}$
- In generale, se l'anno viene diviso in m periodi

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m}$$

- Capitalizzazione nel continuo.

Proposizione 1

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m} = A_0 e^{rt}$$

Proof. (Facoltativa)

$$A_t = A_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m}$$

vogliamoil risultato per cui

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718$$

Consideriamo un cambio di variabili: $r/m \longrightarrow 1/x$. Si ha

$$A_t = A_0 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{rt}$$

Il limite in parentesi quadra è uguale al numero e e dunque otteniamo il risultato. ■

Corollario 1 *Dato m,* ***equivalenza fra il tasso d'interesse a capitalizzazione continua*** (r_c) ***e il tasso a capitalizzazione discreta*** (r_d) *in m periodi durante l'anno.*

$$A_0 e^{r_c t} = A_0 \left(1 + \frac{r_d}{m}\right)^{m \cdot t}$$

Linearizzando

$$\ln A_0 + r_c t \ln(e) = \ln A_0 + m \cdot t \ln\left(1 + \frac{r_d}{m}\right)$$

semplificando, r_c è pari a

$$r_c = m \cdot \ln\left(1 + \frac{r_d}{m}\right) \tag{1}$$

o viceversa

$$r_d = m\left(e^{\frac{r_c}{m}} - 1\right) \tag{2}$$

Osserviamo che, dato un tasso annuale, se esso viene diviso a metà e distribuito semestralmente dà luogo ad un rendimento annuale maggiore. In generale maggiore è il numero delle volte in cui il tasso viene distribuito nell'anno (m volte) dopo essere stato suddiviso per m, maggiore è il rendimento.

Ci chiediamo quindi quanto minore può essere il tasso d'interesse annuale, da suddividere ulteriormente per m, per fornire l'identica capitalizzazione offerta da un tasso annuale dato rA. Chiamiamo tale tasso

Corollario 2 *Il "**tasso a capitalizzazione discreta per** m **volte**" (rDm) nell'anno, equivalente al tasso discreto con capitalizzazione annuale $(rA, m = 1)$.*

$$r_{Dm} = m \cdot \left[(1 + r_{DA})^{1/m \cdot t} - 1\right] \tag{3}$$

Calcolo: Equiparo i proventi dalle due capitalizzazioni su un nozionale di un qualunque ammontare.

Es. $A_0 = 100, t = 1$:

$$\begin{aligned} 100\left(1 + \frac{r_{Dm}}{m}\right)^{m \cdot t} &= 100\left(1 + \frac{r_{DA}}{1}\right)^{1 \cdot t} \\ \left(1 + \frac{r_{Dm}}{m}\right)^{m} &= 1 + r_{DA} \end{aligned}$$

da cui la definizione (3).

2 Tassi d'interesse Spot e Forward

Definizione 1 ***Tasso spot.*** *Il tasso annuale, valido in data corrente, per un investimento dalla data corrente per T periodi.*

$$r(t_0, T)$$

Definizione 2 ***Tasso forward.*** *Il tasso annuale, in data corrente, valido fra due date entrambe future t_1, t_2.*

$$f(t_1, t_2)$$

Per $t_2 > t_1$

$$f(t_1, t_2) = \frac{r(t_0, t_2)t_2 - r(t_0, t_1)t_1}{t_2 - t_1}$$

rinominiamo

$$f(t_1, t_2) = \frac{r_2 t_2 - r_1 t_1}{t_2 - t_1}$$

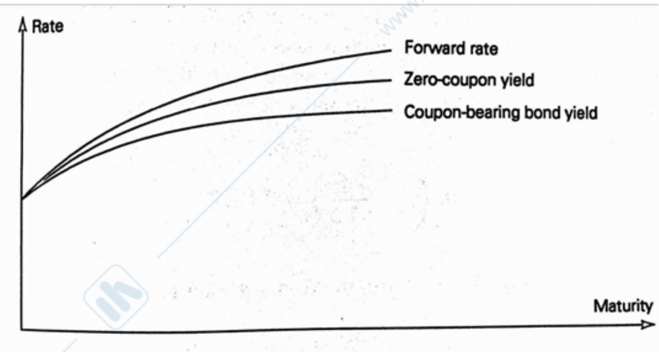


Figure 4.2 Situation When Yield Curve Is Upward Sloping

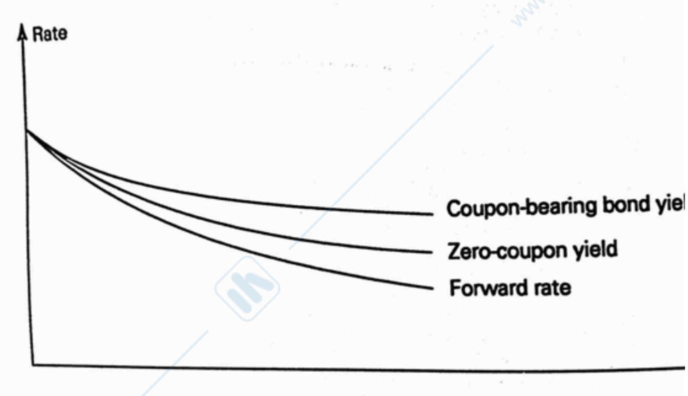


Figure 4.3 Situation When Yield Curve Is Downward Slopi

3 Pricing dei titoli a reddito fisso

Riassumiamo quanto esplorato finora.

La relazione fra il prezzo corrente di mercato di un titolo a reddto fisso, v_b e i pagamenti futuri è espressa dal *"Teorema Fondamentale dell'Asset Pricing"* in termini di tassi a capitalizzazione discreta (r_d)

$$v_b\,(t=0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{c \cdot 100}{\left(1+\frac{r_{d,t}}{m}\right)^{m \cdot t}} + \frac{100}{\left(1+\frac{r_T}{m}\right)^{m \cdot T}} \tag{4}$$

o continua (r_c)

$$v_b\,(t=0) = \sum_{t=1}^{T} \exp\left(-r_{c,t} \cdot t\right)(c \cdot 100) + \exp\left(-r_{c,t} \cdot T\right) \cdot 100$$

dove, nel caso di capitalizzazione continua, t è espresso in termini di "numero di mesi / 12" oppure "numero di giorni / 255". Il numero di giorni lavorativi dipende dalle convenzioni dei diversi mercati.

Entrambe le equazioni sono relazioni fra il prezzo corrente e il/i tassi di interesse utilizzati per scontare i pagamenti.

Ciascuna di tali equazioni può determinare una sola incognita, quindi esistono **tre metodi di pricing** per ciascuna delle due equazioni:

1. E'stata stimata la struttura dei tassi zero-coupon con le procedure di

   (a) inversione della matrice dei pagamenti, qualora essa sia "piena" e quadrata, oppure

   (b) la procedura di bootstrap.

   Entrambe necessitano gli aggiustamenti con il metodo "clumping" quando la vita residua del titolo e i pagamenti delle cedole non siano scadenzati sulla struttura dei tassi recuperabile dal mercato

   Supponendo di avere, alla fine, una struttura dei tassi, possiamo stimare v_b come incognita.

   $$Dati: \quad (r_1, r_2, ... r_T) \Longrightarrow Incognita: v_b$$

2. E' noto il prezzo quotato sul mercato per il titolo in considerazione v_b, sono noti i pagamenti (c e 100 o Y finali), posso determinare il "Bond Yield", ovvero il **tasso d'interesse, unico su tutte le scadenze,** come incognita di ciascuna delle due equazioni, con metodi numerici ("Risolutore" in Excel)

   $$v_b\,(t=0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{c \cdot 100}{\left(1+\frac{y_d}{m}\right)^{m \cdot t}} + \frac{100}{\left(1+y_d\right)^{T}}$$

   $$v_b\,(t=0) = \sum_{t=1}^{T} \exp\left(-y_c \cdot t\right)(c \cdot 100) + \exp\left(-y_c \cdot T\right) \cdot 100$$

   $$Dato: v_b \Longrightarrow y$$

3. Imponiamo $v_b\,(t=0)=100$, sono noti i pagamenti (c e 100 o Y finali), posso determinare il "Bond Par (alla pari)", ovvero il **tasso d'interesse, unico su tutte le scadenze,** che spiega il prezzo iniziale alla pari, ovvero pari a 100. Anche questo si determina come incognita di ciascuna delle due equazioni, con metodi numerici ("Risolutore" in Excel).

$$Dato: v_b = 100 \Longrightarrow y_{pari}$$

In teoria, dovrebbe essere y_{pari} = tasso cedolare annualizzato.

4 Stima della struttura dei tassi a partire dal prezzi di mercato dei titoli

Vediamo i due metodi per calcolare la struttura dei tassi zero coupon per le scadenze desiderate.

4.1 Uso del teorema fondamentale e inversione di Y

Se riusciamo ad avere un insieme di titoli a reddito fisso con scadenze regolari, ovvero annuali, semestrali, trmestrali possiamo costruire la matrice dei pagamenti Y e quindi, come già menzionato nel capitolo precedente, dati:

- v'_{Kx1} = vettore dei prezzi delle diverse attività in $t=0$,
- q'_{Sx1} = vettore dei prezzi di mercato degli zero coupon (attività pure),
- Y_{SxK} = matrice dei pagamenti di rando pieno, con $S=K$,

vale il teorema

$$v'_{Kx1} = q'_{Sx1} \cdot Y_{SxK}$$

ed è quindi possibile ricavare i **prezzi degli zero coupon**

$$q'_{Sx1} = v'_{Kx1} \cdot inv\,(Y)$$

Avendo i prezzi degli zero coupon è facile trovare i **tassi d'interesse spot** r_t per tutte le scadenze presenti in Y, lasciando anche la possibilità di avere scadenze inferiori a 1 anno (chi teme di confondersi usi $m=1$)

$$q_{k=t}\,(t=0) = \frac{100}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot t}}$$

da cui il tasso spot valido da $t=0$ a $T=m\cdot t$ sarà

$$r_{d,t} = m\left[\left(\frac{100}{q}\right)^{\frac{1}{m\cdot t}} - 1\right]$$

4.2 Bootstrap nel discreto

Se non ho una griglia regolari di titoli per scadenze omogenee, posso usare il metodo bootstrap. Dallo zero-coupon a 1 anno quotato sul mercato (BOT a 1 anno) (o un altra qualsiasi prima scadena, anche trimestrale o semestrale)

$$94.34 = \frac{100}{(1 + r_1)} \Longrightarrow r_1 = 0.06$$

Considerare un BTP a 2 anni con cedola pari a $0.065 \cdot 100$, di cui il prezzo è quotato. Si ha:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{6.5}{1 + r_1} + \frac{106.5}{(1 + r_2)^2} \\ 100 &= \frac{6.5}{1 + 0.06} + \frac{106.5}{(1 + r_2)^2} \Longrightarrow r_2 = 0.0651 \end{aligned}$$

$$100 - 6.\,132\,1 = \frac{106.5}{(1 + r_2)^2}$$

$$93.\,868 = \frac{106.5}{(1 + r_2)^2}$$

$$r_2 = \left(\frac{106.5}{93.\,868}\right)^{(1/2)} - 1$$

Poi

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{7.2}{1 + r_1} + \frac{7.2}{(1 + r_2)^2} + \frac{107.2}{(1 + r_3)^3} \\ 100 &= \frac{7.2}{1 + 0.06} + \frac{7.2}{(1 + 0.065)^2} + \frac{107.2}{(1 + r_3)^3} \Longrightarrow r_3 = 0.072 \end{aligned}$$

L'importante è avere equazioni in cui vi sia un'unica incognita.

4.3 Bootstrap nel continuo

Consideriamo il problema di valutare il tasso implicito in :

1. titoli zero-coupon, ma con vita residua inferiore alla scadenza formale del titolo: $(T - t) < T$
2. titoli con coupon, ma con vita residua inferiore alla scadenza formale del titolo $(T - t) < T$ e dunque, anche, con pagamento delle cedole in date diverse dal semestre :$(T - t) < T$.

Consideriamo la seguente tavola 4.2 da Hull (1993)

Tavola - Dati per il Metodo Boostrap

Cedola pagata semestralmente

Valore Nozionale	t-t0	Cedola annuale	Prezzo Titolo
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6
100	2.75	10	99.8

4.4 Caso 1.

Usiamo la capitalizzazione continua.

- **Titolo 1**. (Riga 1) Qual'è il tasso annuale corrispondente al tasso implicito pagato dallo zero coupon a 1 trimestre dalla scadenza?

  Possiamo calcolare prima il tasso trimestrale, discreto, annualizzato

$$v_1 = \frac{100}{(1 + \frac{rd_1}{4})}$$

$$97.5 = \frac{100}{(1 + \frac{r}{4})} \Longrightarrow r_{d,1} = 0.10256$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r}{4}\right) &= \frac{100}{97.5} \\ r &= 4\left(\frac{100}{97.5} - 1\right) \end{aligned}$$

$$97.5 = 100 \cdot \exp(-r_c \cdot 0.25)$$
$$\ln 97.5 = \ln 100 - \frac{r_c}{4}$$
$$r_c = 4(\ln(100) - \ln 97.5)$$

  , Solution is: 0.101 27,

- Sappiamo che possiamo trasformare il tasso trimestrale in tasso continuo mediante la

$$r_c = m \cdot \ln\left(1 + \frac{r_d}{m}\right)$$

  ovvero, in questo caso

$$r_{c,1} = 4 \cdot \ln\left(1 + \frac{0.10256}{4}\right) = 0.101\,27$$

  ma, ragionando, si può usare direttamente

$$\begin{aligned} r_{c,1} &= m \cdot \ln\left(1 + \frac{100 - v_1}{v_1}\right) \\ &= 4 \cdot \ln\left(1 + \frac{2.5}{97.5}\right) = 0.10127 \end{aligned}$$

- **Titolo 2.** Stesso metodo

$$\begin{aligned} r_{c,2} &= m \cdot \ln\left(1 + \frac{100 - v_2}{v_2}\right) \\ &= 2 \cdot \ln\left(1 + \frac{100 - 94.9}{94.9}\right) = 0.10469 \end{aligned}$$

- **Titolo 3**. Stesso modo

$$
\begin{aligned}
r_{c,3} &= m \cdot \ln\left(1 + \frac{100 - v_3}{v_3}\right) \\
&= 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{100 - 90}{90}\right) = 0.10536
\end{aligned}
$$

- **Titolo 4**. Abbiamo le cedole semestrali

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \exp\left(-r_{c,2} \cdot 0.5\right) + 4 \cdot \exp\left(-r_{c,3}\right) + 104 \cdot \exp\left(-r_{c,4} \cdot 1.5\right) &= 96 \\
4 \cdot \exp\left(0.10469 \cdot 0.5\right) + 4 \cdot \exp\left(-0.10536\right) + 104 \cdot \exp\left(-r_{c,4} \cdot 1.5\right) &= 96 \\
7.815\,0 + 104 \cdot \exp\left(-r_{c,4} \cdot 1.5\right) &= 96 \\
\exp\left(-r_{c,4} \cdot 1.5\right) &= \frac{96 - 7.815\,0}{104} \\
&= 0.847\,93
\end{aligned}
$$

Abbiamo un'equazione in 1 incognita

$$
r_{c,4}\left(t = 1.5\right) = -\frac{\ln\left(0.847\,93\right)}{1.5} = 0.109\,97
$$

- **Titolo 5**. Stesso procedimento

$$
r_{c,5}\left(t = 2\right) = 0.1081
$$

4.4.1 Caso 2 - Interpolazione - Clumping

- **Titolo 6.**

Per il titolo 6 abbiamo scadenze diverse dagli zero coupon trovati.

Attenzione! I tassi da usare, a parte il primo, devono essere una iterpolazione lineare fra i tassi trovati.

Diventano

$$
\begin{aligned}
&5 \cdot \exp\left(-r_{c,0.25} \cdot 0.25\right) + 5 \cdot \exp\left(-r_{c,0.75} \cdot 0.75\right) + 5 \cdot \exp\left(-r_{c,1.25} \cdot 1.25\right) + \\
&\quad + 5 \cdot \exp\left(-r_{c,1.75} \cdot 1.75\right) + 5 \exp\left(-r_{c,2.25} \cdot 2.25\right) + 105 \exp\left(-r_{c,2.75} \cdot 2.75\right) = 99.8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&5 \cdot \exp\left(-0.10127 \cdot 0.25\right) + 5 \cdot \exp\left(-0.10503 \cdot 0.75\right) + 5 \cdot \exp\left(-0.10608 \cdot 1.25\right) + \\
&\quad + 5 \cdot \exp\left(-0.10745 \cdot 1.75\right) + 5 \exp\left(-r_{c,2.25} \cdot 2.25\right) + 105 \exp\left(-r_{c,2.75} \cdot 2.75\right) = 99.9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
18.\,018 + \left[5 \exp\left(-r_{c,2.25} \cdot 2.25\right) + 105 \exp\left(-r_{c,2.75} \cdot 2.75\right)\right] &= 99.8 \\
5 \exp\left(-r_{c,2.25} \cdot 2.25\right) + 105 \exp\left(-r_{c,2.75} \cdot 2.75\right) &= 99.8 - 18.018
\end{aligned}
$$

$$
5 \exp\left(-r_{c,2.25} \cdot 2.25\right) + 105 \exp\left(-r_{c,2.75} \cdot 2.75\right) = 81.\,782 \tag{5}
$$

Supponiamo che $r_{c,6}\left(t = 2.75\right) = r$ incognito.

- Procedura di **Clumping** [1]

  Dobbiamo interpolare $r_{c,5}$ alla distanza 1/3 da $r(t=2) = 0.1081$, trovato sopra e l'incognito $r(t=2.75)$. Usiamo la formula del clumping, dove

  - $r_t = tasso$ incognito,
  - r_{t_1} = il tasso che delimita il punto inferiore dell'intervallo $= 0.1081$
  - r_{t_2} = il tasso che delimita il punto superiore dell'intervallo

$$r_t = r_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}(r_2 - r_1) \tag{6}$$

  - utilizzando la (6), si ha
  - $r_t = tasso$ incognito,
  - r_{t_1} = il tasso che delimita il punto inferiore dell'intervallo $= 0.1081$
  - r_{t_2} = il tasso che delimita il punto superiore dell'intervallo $=r$

$$\begin{aligned} r_{2.25} &= 0.1081 + \frac{2.25 - 2}{2.75 - 2}(r - 0.1081) \\ &= \left(0.0721 + \frac{r}{3}\right) \end{aligned}$$

  Sostituisco nella (5)

$$5\exp\left(-\left(0.0721 + \frac{r}{3}\right) \cdot 2.25\right) + 105\exp(-r \cdot 2.75) = 81.782$$

$$r_{2.75} = 0.108\,73$$

[1] Resti-Sironi (2007) Cap 3.5.2.

5 Duration degli strumenti o portafogli finanziari

5.1 Duration come media ponderata delle scadenze

Definizione 3 *(Maculay (author)) Duration*

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{T} t \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

valuta la "media ponderata delle scadenze dei pagamenti del titolo".

dove
$D = duration$,
$t =$ data del pagamento CF_t,
$r =$ effettivo tasso per lo zero coupon per la scadenza T,
$P =$ prezzo o valore di mercato per lo strumento consierato,
$T =$ *scadenza* dello strumento o data dell'ultimo pagamento.

Definizione 4 *Prezzo di un titolo*

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

Calcoliamo l'effetto di una variazione del tasso d'interesse sul prezzo del titolo

$$P = \sum_{t=1}^{T} CF_t \, (1+r)^{-t}$$

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^{T} (-t) \, CF_t \, (1+r)^{-t-1}$$

per esteso

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{-1 \cdot CF_t}{(1+r)^2} + \frac{-2 \cdot CF_2}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{-T \cdot CF_T}{(1+r)^{T+1}} \\ &= -\frac{1}{1+r} \left[\frac{1 \cdot CF_t}{(1+r)^1} + \frac{2 \cdot CF_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{T \cdot CF_T}{(1+r)^T} \right] \\ &= -\frac{1}{1+r} \left[\sum_{t=1}^{T} t \frac{CF_t}{(1+r)^t} \right] \end{aligned} \tag{7}$$

che per chiarezza è

$$\frac{dP}{dr} = -\sum_{t=1}^{T} t \frac{CF_t}{(1+r)^{t+1}}$$

Per ottenere una misura standardizzata, dividiamo entrambi i membri per P

$$\begin{aligned} \left[\frac{dP/P}{dr} \right] &= \frac{dP}{dr} \frac{1}{P} = -\frac{1}{1+r} \frac{1}{P} \left[\sum_{t=1}^{T} t \frac{CF_t}{(1+r)^t} \right] \\ &= -\frac{D}{1+r} \end{aligned}$$

NB.

Definizione 5 *Elasticità = variazione prcentuale di una variabile dipendente $y(x)$ al variare di un punto percentuale della variabile indipendente x*

$$\varepsilon_{y(x)/x} = \frac{\Delta\% y(x)}{\Delta\% x} = \frac{\Delta y(x)/y}{\Delta x/x}$$

Definizione 6 *Duration Modificata (MD)*

$$MD \overset{def}{=} \frac{D}{1+r} \tag{8}$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\frac{\Delta\% P(r)}{\Delta\% r} = \frac{\Delta P(r)/P(r)}{\Delta r} = MD$$

perché Δr è già una variazione percentuale. Da cui, si ha una "elasticità del prezzo del titolo alla variazione del tasso d'interesse". E quindi conoscendo i termini a destra si può stimare la variazione attesa del Prezzo del titolo che dipende da r

$$\frac{dP(r)}{P(r)} = -\frac{D}{1+r} \cdot dr$$

osservazione 1 *Attenzione, quale r? La duration stima l'effetto di una variazione percentuale del tasso con effetto su tutta la struttura dei tassi. La duration modificata porta fuori un tasso d'interesse. Dovrebbe essere un tasso "medio", o il tasso dello "yield". Per convenzione usiamo qualunque tasso sia stato usato per scontare il primo periodo, annualizzato.*

Esempio 1

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= -\frac{D}{1+r} \cdot dr \\ \frac{dP}{100} &= -\frac{3.67}{1+0.06} \cdot 0.01 = -0.0346 \end{aligned}$$

$$dP = \left(-\frac{3.67}{1+0.06} \cdot 0.01\right) 100 = -3.46$$

Quindi

$$P' = P + dP = 100 - 3.46 = 96.54$$

Gli stessi concetti possono essere applicati a un portafoglio contenente vari titoli e quindi avente un paniere di pagamenti per ogni data.

5.2 Stima del Duration Gap (ALM[2])

- MV_A =valore di mercato dell'attivo (Market Value Assets),
- MV_L =valore di mercato del passivo (Market Value Liabilities),
- MV_B =valore di mercato netto della banca,

[2] Asset e Liability Management da Resti e Sironi (2007)

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta MV_A}{MV_A} &\simeq -\frac{D_A}{1+r_A}\cdot \Delta r_A = -MD_A \cdot \Delta r_A \\
&\Longrightarrow \Delta MV_A \simeq -MV_A \cdot MD_A \cdot \Delta r_A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta MV_L}{MV_L} &\simeq -\frac{D_L}{1+r_L}\cdot \Delta r_L = -MD_L \cdot \Delta r_L \\
&\Longrightarrow \Delta MV_L \simeq -MV_L \cdot MD_L \cdot \Delta r_L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta MV_B &= \Delta MV_A - \Delta MV_L \simeq (-MV_A \cdot MD_A \cdot \Delta r_A) - (-MV_L \cdot MD_L \cdot \Delta r_L) \\
&= -(MV_A \cdot MD_A - MV_L \cdot MD_L)\,\Delta r
\end{aligned}
$$

Dividendo tutto per MD_A

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta MV_B}{MV_A} &\simeq -\left(MD_A - \left(\frac{MV_L}{MV_A}\right)\cdot MD_L\right)\Delta r \\
&= -\underbrace{(MD_A - L\cdot MD_L)}_{DG}\Delta r
\end{aligned}
$$

dove

Definizione 7 *Bank Financial Leverage L*

$$
L \overset{def}{=} \frac{MV_L}{MV_A}
$$

Ipotesi 1 $r_A = r_L = r$

Da cui

$$
\begin{aligned}
\Delta MV_B &\simeq -(MD_A - L \cdot MD_L)\cdot MD_A \cdot \Delta r \\
&= -DG \cdot MD_A \cdot \Delta r
\end{aligned} \tag{9}
$$

dove

Definizione 8 *Duration Gap*

$$
DG \overset{def}{=} (MD_A - L \cdot MD_L)
$$

La (9) mostra come la variazione del valore di mercato dell'equity che segue una variazione dei tassi d'interesse è una funzione diretta dei tre fattori:

(i) l'attività di intermediazione intrapresa dalla banca, misurata dal valore di mrcato dell'attivo;

(ii) la grandezza della variazione del tasso di interesse di mercato;

(iii) la differenza fra la duration modificata delle attività e passività, aggiustata dalla leva della banca, d'ora in poi chiamata solo DG.

La (9) mostra anche le **condizioni per immunizzare il valore di mercato dell'equity dalle variazioni dei tassi d'interesse**:

1. $\Delta MV_B = 0$, se $\Delta MV_A - \Delta MV_L = 0$, or
2. $DG = 0$.

5.3 Limiti alla Duration: Shifts paralleli sulle diverse scadenze.

Limiti:

1. tutti i CF_t possono essere scontati allo stesso tasso r (i.e. $r_t = t, \forall t$).
2. Δr dovrebbero essere gli stessi su tutte le scadenze.

$$P = \sum_{t=1}^{T} CF_t \exp(-r_t t)$$

e la sua Duration

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{T} t \cdot CF_t \exp(-r_t t)$$

$$\frac{dP/P}{dr} = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{T} (-t) \cdot CF_t \exp(-r_t t) = -D \tag{10}$$

NB. (i) vengono usati r_t, diversi $\forall t$;
(ii) $dr =$ è la variazione assoluta di un numero percentuale e dunque è una variazione percentuale, pertanto la (10) è un'elasticità.
Dunque

$$\frac{\Delta P}{P} \simeq -D \cdot \Delta r$$

osservazione 2 *La duration considera sempre la stessa Δr, ovvero uno slittamento parallelo su tutte le scadenze. Tuttavia, se la banca ha stimato sensibilità diverse, può sempre usare i* "beta duration gap"[3] .

- Esempio. Calcoliamo la DM per $r = 6\%$. e poi per un tasso inferiore dell'1% e poi di un tasso superiore del 1%. La variazione del P del titolo non è la stessa.

$$\begin{aligned} P(c &= 0.06; r = 0.06; T = 4) = \sum_{t=1}^{3} \frac{c \cdot 100}{(1+r)^t} + \frac{c \cdot 100 + 100}{(1+r)^4} \\ &= \sum_{t=1}^{3} \frac{6}{(1+0.06)^t} + \frac{106}{(1+0.06)^4} = 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(c &= 0.06; r = 0.07; T = 4) = \sum_{t=1}^{3} \frac{c \cdot 100}{(1+r)^t} + \frac{c \cdot 100 + 100}{(1+r)^4} \\ &= \sum_{t=1}^{3} \frac{6}{(1+0.07)^t} + \frac{106}{(1+0.07)^4} = 96.613 \end{aligned}$$

[3] Cfr. Resti e Sironi (2008) capp. 1-2. (Non in programma)

$$
\begin{aligned}
P(c &= 0.05; r = 0.05; T = 4) = \sum_{t=1}^{3} \frac{c \cdot 100}{(1+r)^t} + \frac{c \cdot 100 + 100}{(1+r)^4} \\
&= \sum_{t=1}^{3} \frac{6}{(1+0.05)^t} + \frac{106}{(1+0.05)^4} = 103.55
\end{aligned}
$$

$$100 - 96.613 = 3.387$$

$$103.55 - 100 = 3.55$$

Oppure, calcolando la variazione percentuale

$$100/96.613 - 1 = 3.50\%$$

$$103.55/100 - 1 = 3.55\%$$

osservazione 3 *La linearità non c'è!*

5.4 Problemi del Duration Gap Model

Critiche:

1. La natura dinamica delle politiche di immunizzazione del rischio di tasso d'interesse basate sul Duration Gap.

   La banca cerca di eliminare il DG mediante politiche di ristrutturazione o mediante i derivati, ma l'efficacia di questa strategia dura poco. Perché?

   (a) Perché la duration di un coupon bond reagisce più lentamente della duration di uno zero coupon bond, dunque il duration gap cresce. Quindi nche se era stato immunizzato in partenza, l'immunizzazione non vale nel tempo.

   (b) Per questo le politiche di immunizzazione basate sul DG non sono maneggevoli e devono essere aggiustate ad ogni variazione del tasso d'interesse.

2. Costo delle politiche di immunizzazione. Richiedono di modificare la D e quindi la maturità delle Attività o Passività e costano: FRA, IRS. interest rate options come Floor e Collar.

3. Misura l'impatto del tasso ma con approssimazione. E' un'approssimazione lineare, ma la funzione vera è convessa, quindi l'errore cresce nella grandezza della variazione del tasso. (Uso d invece di Δ)

$$
\begin{aligned}
\Delta MV_B &\simeq -(MV_A MD_A - MV_L MD_L)\,\Delta r + \\
&\quad + (MV_A MC_A - MV_L MC_L)\,\frac{(\Delta r)^2}{2}
\end{aligned}
$$

   dove MC$_i$ = modified convexity (prossimo paragrafo)

$$\Delta MV_B \simeq -DG \cdot MV_A \cdot \Delta r + CG \cdot MV_A \cdot \frac{(\Delta r)^2}{2}$$

   dove

$$CG = MC_A - LMC_L$$

4. DG si basa su ipotesi che Δr influenzi nello stesso modo tutti i tassi, che è falso. La definizione può essere ridefinita come
$$\Delta MV_B \simeq -BDG \cdot MV_A \cdot \Delta r$$
dove
$$BDG = MD_A \cdot \beta_A - MD_L \cdot \beta_L \cdot L$$
In questo modo abbiamo l'asimmetria dell'impatto su Attività e Passività e possiamo misurare l'importanza dei tre fattori:
   (a) MD_A e MD_B,
   (b) β_A e β_L (cfr. Resti e Sironi (2008) cap. 1-2).
   (c) L.

6 Convexity

In matematica finanziaria, la convexity definisce il grado di curvatura della funzione prezzo

Per calcolare un'approssimazione più precisa della vera funzione c,)r(Ponsideriamo l'espansione di Taylor intorno al tasso base r_0
$$P(r_0 + \Delta r) = P(r_0) + \sum_{j=1}^{\infty} P^{(j)}(r_0) \frac{(\Delta r)^j}{j!}$$

fermandoci alla prima derivata
$$P(r_0 + \Delta r) \simeq P(r_0) + P'(r_0)\,\Delta r = P(r_0) - P(r_0) \cdot MD \cdot \Delta r$$
Dalla definizione di Duration Modificata (8)
$$\frac{dP}{P} = -\frac{D}{1+r} \cdot dr$$
$$dP = -P\frac{D}{1+r} \cdot dr \qquad (11)$$
e dunque, usando la (11)
$$P(r_0) + \Delta P = P(r_0) - P(r_0)\frac{D}{1+r} \cdot \Delta r$$

Aggiungendo anche la seconda derivata
$$\begin{aligned} P(r_0 + \Delta r) &\simeq P(r_0) + P'(r_0)\,\Delta r + P''(r_0)\frac{(\Delta r)^2}{2 \cdot 1} \\ &= P(r_0) - P(r_0) \cdot MD \cdot \Delta r + P''(r_0)\frac{(\Delta r)^2}{2} \end{aligned}$$
Iteriando la derivata della (7) calcoliamo la derivata seconda:

- Derivata prima

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{1+r}\left[\sum_{t=1}^{T} t\frac{CF_t}{(1+r)^t}\right]$$

che per chiarezza è

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr} &= -\sum_{t=1}^{T} t\frac{CF_t}{(1+r)^{t+1}} \\ &= \sum_{t=1}^{T} (-t)\, CF_t \cdot (1+r)^{-t-1}\end{aligned}$$

- Derivata seconda

$$\begin{aligned}P''(r_0) &= \frac{d}{dr}\left[\frac{dP}{dr}\right] \\ &= \frac{d}{dr}\left[\sum_{t=1}^{T} (-t)\, CF_t \cdot (1+r)^{-t-1}\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T} (-t)(-t-1)\, CF_t \cdot (1+r)^{-t-2} \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}\left[\sum_{t=1}^{T} \left(t+t^2\right)\frac{CF_t}{(1+r)^t}\right]\end{aligned}$$

Dunque dividendo entrambi i termini per P, otteniamo la definizione di "Convexity Modificata".

$$\frac{P''(r_0)}{P} = \frac{1}{(1+r)^2}\left[\sum_{t=1}^{T} \left(t+t^2\right)\frac{CF_t}{(1+r)^t}\right]\frac{1}{P} = MC$$

Definizione 9 *Modified Convexity*

$$MC \stackrel{def}{=} \frac{1}{(1+r)^2}\left[\sum_{t=1}^{T} \left(t+t^2\right)\frac{CF_t}{(1+r)^t}\right]\frac{1}{P}$$

e quindi

$$\frac{\Delta P}{P(r_0)} \simeq -MD\cdot\Delta r + MC\cdot\frac{(\Delta r)^2}{2} \qquad (2A.7)$$

7 Convexity Gap

Grazie alla convexity possiamo stimare la sennsibilità della banca ai tassi d'interesse.

In questo capitolo abbiamo visto che la variazione del valore di mercato dell'Equity di una banca può essere calcolato

$$\Delta MV_B \simeq -DG\cdot MV_A\cdot\Delta r$$

e per migliorare la stima si può includere la convexity

$$\Delta MV_B \simeq -DG \cdot MV_A \cdot \Delta r + \frac{CG}{2} \cdot MV_A \cdot (\Delta r)^2 \qquad (2A.8) \qquad (12)$$

dove

Definizione 10 ***"Convexity Gap"***

$$CG = MC_A - L \cdot MC_L$$

Imponendo $\Delta MV_B = 0$, si possono calibrare duration e convexity gap per immunizzare MV$_B$ dalle variazioni di tasso. Tuttavia tutto questo non funziona quando i tassi sono diversi sulle diverse scadenze.

Esercizio 1 *Al crescere della frequenza della distribuzione dei flussi di cassa* (m), *come variano la Duration e la Convexity?*

Esercizio 2 *(i) Quando la data corrente non coincide con la data di emissione del titolo, quale tasso d'interesse si deve usare per calcolarne la Duration Modificata (DM o MD) o la Convexity Modificata (CM o MC)? (ii) E, come comportarsi quando stiamo calcolando la DM e CM di un portafoglio?*

References

[1] Cuthbertson, K., Nitzsche, D., & O'Sullivan, N. (2019) "Derivatives", Wiley.

[2] Hull, J. (2018) "Opzioni, futures e altri derivati". Ed. italiana a cura di E. Barone, Pearson.

[3] Kosowski, R.L. & S.N. Neftci (2015). Principles of Financial Engineering. Academic Press. (*** Raccomandato a chi sa l'inglese).

[4] Resti, A. e A. Sironi (2008) Rischio e Valore nelle Banche, Egea.

ABC Futures

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Lezioni di "Pricing"

April 20, 2021

1 Premesse

Definizione 1 ***Derivato*** *= strumento finanziario il cui valore "deriva" dal valore dell'attività sottostante, dove il sottostante è uno strumentogeneralmete quotato (azione, obbligazione, future), ma può anche non essere finanziario (Materie Prime, scommesse).*

Oltre alle Borse, in cui gli strumenti quotati sono standardizzati, i derivati possono essere scambiati

Definizione 2 *"OTC = Over the counter" = Mercato degli scambi one-to-one dove il contratto va definito volta per volta ed è quindi più dettagliato, ma meno liquido, ed implica rischio di credito.*

Definizione 3 *Categorie di Operatori.*

- **Hedgers.** Per trasformare uno scambio a prezzo incerto, in uno con maggiore certezza. Ridurre il rischio.
- **Speculatori.** Voglio assumere il rischio che gli hedgers vogliono evitare.
- **Arbitraggisti.** Assumono posizioni di arbitraggio su più mercati per assicurarsi profitti senza rischio.

2 Forward e Futures

2.1 Motivazione

Comprare un'attività detta sottostante (underlying) al contratto future / forward in data corrente F_0 per ottenernee un'unità (in pratica, il numero di unità definite dal contratto) in data T, che avrà il valore spot in data T del sottostante: S_T. Il sottostante può poi essere utilizzato nella produzione (materie prime) o rivenduto al valore S_T, se l'acquisto del Future / Forward era stato attuato a soli fini speculativi o di hedging (copertura).

La costruzione dello strumento è identica ad uno zero coupon, che ha un prezzo in data corrente, v_0, (corrispondente a F_0) ed un valore fisso di 100 a scadenza (corrispondente a S_T).

Nell'intervallo di tempo fra l'emissione e la data di scadenza, il future (e non il forward, perché solo il future è quotato) o lo zero coupon, cambiano continuamente valore secondo le variabili di mercato (tasso d'interesse, e per le merci fisiche, i costi di magazzino, trasporto o altro) e il compratore può decidere in caso di rivenderlo ad un prezzo $F(t)$.

Grazie alle possibilità di arbitraggio, in data T, il future F_T che rappresenta un sottostante di valore S_T non potrà avere valori diversi da esso, a meno di discrepanze sulle effettive date di consegna.

I contratti futures sono nati per assicurare i produttori contro la variazione futura dei prezzi delle materie prime o delle valute, in modo da poter prevedere con maggiore certezza i costi di produzione e/o calcolare i prezzi i vendita.

Oggi l'utilizzo di questi strumenti non supera il 30% del mercato.

2.2 Notazioni e definizioni

- T = data di scadenza, maturity, misurata in anni;
- t = data corrente;
- $S_t = prezzo$ attività sottostante in data corrente;
- $S_T = prezzo$ del sottostante alla data di consegna T;
- $f_t = valore$ del contratto forward in data corrente;
- $F_t = prezzo$ del contratto forward/future in data t;
- r = tasso d'interesse $riskfree$;

Futures e Forward sono sinonimi nella sostanza, ma non nella forma del contratto. Se il future è tenuto fino a scadenza diventa simile nella struttura a un forward.

Definizione 4 ***Future / Forward*** = *contratto in data corrente sulla promessa di comprare il sottostante al prezzo K in data di scadenza T ed ottenerne la consegna. Il prezzo del future F è la previsione del valore del sottostante K scontato al risk-free, o a qualunque altro "cost of carry" (dettagli relativi al valore del possesso e dell'uso del sottostante durante la durata del contratto meno i costi di trasporto ("cost of carry fisico") per la consegna a scadenza, oltre alla variazione nel tempo del tasso risk free ("cost of carry" monetario).*

Definizione 5 ***Prezzo del Future*** *è la previsione del prezzo spot a scadenza T, $E_t(S_T)$, capitalizzando il prezzo spot attuale del sottostante, S_t dalla data corrente t alla data di scodenza T al tasso risk-free più eventualmente ulteriori costi o benefici.*

$$\begin{aligned} F_t &= E_t(S_T) \\ &= S_t e^{(r)(T-t)} \end{aligned}$$

La differenza principale fra Futures e Forward è che il future è un contratto quotato in Borsa, per scadenze mensili e consegne nel mese (che dipendono dalle singole Borse). Essendo quotato può essere comprato e venduto in ogni momento entro la scadenza. Il forward è un contratto fra due parti che si negozia "over the counter" (OTC), può quindi essere più dettagliato secondo i bisogni dei contraenti, ma quindi meno liquido ed ha soltanto un prezzo iniziale, uguale al future e il valore a scadenza, S_T.

Definizione 6 ***Prezzo del Forward***

1. *In $t = 0$, all'emissione, è identico al future:*

$$\begin{aligned} F_0 &= E_0\left(S_T\right) \\ &= S_0 e^{r(T-t)} \end{aligned}$$

2. *in $t = T$, è identico allo spot*

$$F_T = S_T$$

3. *per $t \in (0, T)$ compreso fra la data di emissione e la data di scadenza, non ha un prezzo quotato, ma possiamo soltanto valutare il "Valore del Forward". Vedere prossimo paragrafo.*

Differenze (Hull):
Forward

- Negoziato su OTC.
- Non standardizzato.
- Una sola data di consegna specificata.
- Settled alla fine del contratto.
- Consegna e pagamento finale hanno luogo.

Future

- Quotato in Borsa.
- Standardizzato per numero unità, prezzo per unità, T, margine.
- Più date di consegna nel mese.
- Prezzato quotidianamente.
- Contratto è in genere chiuso prima di T , ovvero non c'è un interesse sul sottostante, ma c'è solo un uso finanziario (speculazione / hedging).

Esempio dei Futures sull'oro. Dal sito del Chicago Board of Trade 1/1/2020 "Gold Futures Quotes"

https://www.cmegroup.com/trading/metals/precious/gold.html

Month	Open	High	Low	Last	Change	Settle	Estimated Volume	Prior Day Open Interest
MAY 20	1686.6	1701.5	1670.5	1698.8	+10.3	1694.5	337	6,301
JUN 20	1693.5	1714.4	1676.0	1710.2	+6.7	1700.9	168,438	326,212
JLY 20	1697.1	1713.5	1682.7	1710.9	+7.3	1704.4	98	7
AUG 20	1699.7	1720.2	1683.3	1716.5	+6.2	1707.2	12,517	76,640
OCT 20	1698.0	1721.7B	1685.8	1718.9	+6.8	1710.1	1,015	13,518
DEC 20	1705.7	1723.8B	1687.8A	1719.9B	+7.1	1712.0	2,496	51,064
FEB 21	1705.6	1722.4	1689.2	1722.4	+7.5	1713.8	454	9,751
APR 21	-	-	-	-	+7.9	1715.6	121	2,551
JUN 21	1709.7	1709.7	1708.9	1709.5	+7.9	1716.5	13	2,588
AUG 21	1720.1	1720.1	1720.1	1720.1	+7.9	1717.8	7	99
OCT 21	-	-	-	-	+7.9	1719.2	0	12
DEC 21	1700.5	1712.2B	1700.5	1700.5	+7.9	1719.7	5	1,729

2.3 Dettagli operativi del Future quotato

Il contratto standardizzato Future fissa:

- il tipo di bene;
- il prezzo per unità del bene;
- il numero di unità del bene contenute nel contratto;
- il margine iniziale (deposito),
- il margine di mantenimento,
- il margin call inferiore (a cui il possessore del future deve depositare altro denaro) o superiore (soglia a cui la Borsa versa un rimborso al possessore del future).

L'acquisto (vendita) di un future è l'acquisto (vendita) di un "dovere" di comprare (vendere) a scadenza il sottostante al prezzo d'acquisto (vendita) F_t. Nel momento dell'acquisto, è necessario pagare solo una percentuale (margine iniziale di circa 5-10%) del prezzo F_t al quale si è deciso l'acquisto.

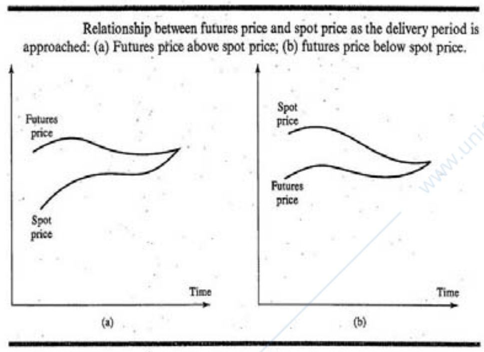
Con il passare del tempo, il prezzo quotato del contratto, varia secondo le variabili sopra elencate e il margine deve essere aggiustato quando passa una soglia inferiore (richiesta di pagamento) o superiore (rimborso)

Osservare in tabella come, alla variazione del valore quotato $F(t)$, sia necessario bilanciare il margine depositato inizialmente. Ma a scadenza i paga il prezzo pattuito all'acquisto / vendita.

From Hull (1993-2015) Ch.2. Tab 2.1.				Future Margins			
Future Contract: Gold Future T=16 (June 16), F = F(0) $, size #100 oz, => F = 400x100 =							$ 40.000,00
Initial Margin = 5% per contract =				5,00%			$ 2.000,00
Mantainance Margin = 3.75% per Contratto				3,75%			$ 1.500,00
Mantainance Margin per 2 Futures = 3.75%*F*2					3,75%		$ 3.000,00
Initial Margin = 5% per 2 contract =					3,75%		$ 4.000,00
Day t	**F prezzo per unità**	**# unità**	**Valore 2 Contratti**	**Daily Gain / Loss**	**Cumulative Gain**	**Margin Account Balance €**	**Margin Call if Margin < 3000 $**
	(i)	(ii)	(i)*(ii)=(iii)				
0	400	200,00	$ 80.000,00			$ 4.000,00	
1	397	200,00	$ 79.400,00	$ -600,00	$ -600,00	$ 3.400,00	$ -
2	396,1	200,00	$ 79.220,00	$ -180,00	$ -780,00	$ 3.220,00	$ -
3	398,2	200,00	$ 79.640,00	$ 420,00	$ -360,00	$ 3.640,00	$ -
4	397,1	200,00	$ 79.420,00	$ -220,00	$ -580,00	$ 3.420,00	$ -
5	396,7	200,00	$ 79.340,00	$ -80,00	$ -660,00	$ 3.340,00	$ -
6	395,4	200,00	$ 79.080,00	$ -260,00	$ -920,00	$ 3.080,00	$ -
7	393,3	200,00	$ 78.660,00	$ -420,00	$ -1.340,00	$ 2.660,00	$ 1.340,00
8	393,6	200,00	$ 78.720,00	$ 60,00	$ -1.280,00	$ 4.060,00	$ -
9	391,8	200,00	$ 78.360,00	$ -360,00	$ -1.640,00	$ 3.700,00	$ -
10	392,7	200,00	$ 78.540,00	$ 180,00	$ -1.460,00	$ 3.880,00	$ -
11	387	200,00	$ 77.400,00	$-1.140,00	$ -2.600,00	$ 2.740,00	$ 1.260,00
12	387	200,00	$ 77.400,00	$ -	$ -2.600,00	$ 4.000,00	$ -
13	388,1	200,00	$ 77.620,00	$ 220,00	$ -2.380,00	$ 4.220,00	$ -
14	388,7	200,00	$ 77.740,00	$ 120,00	$ -2.260,00	$ 4.340,00	$ -
15	391	200,00	$ 78.200,00	$ 460,00	$ -1.800,00	$ 4.800,00	$ -
16	392,3	200,00	$ 78.460,00	$ 260,00	$ -1.540,00	$ 5.060,00	$ -

A scadenza il prezzo del future coincide con il prezzo di esercizio K, cosi come il prezzo di un'obbligazione diventa 100.

RELATIONSHIP BETWEEN FUTURE PRICE AND SPOT PRICE



a. The futures price is above the spot price prior to the delivery period.
b. The futures price is below the spot price prior to the delivery period.

Esercizio 1 *Ricostruire la tabella sopra (Hull) per il Gold Future scadenza May 20th, 2020. Cercando i dettagli sul sito https://www.cmegroup.com/trading/metals/precious/gold.html (meglio se riuscite a scaricare la serie storica su qualche sito).*

2.4 Payoffs

Compariamo in una tabella, i payoffs delle diverse strategie che un agente, che ha bisogno della merce S in data T, può effettuare:

1. In $t=0$, compra la merce al prezzo corrente S_0 e la tiene. In data T ha ancora la merce che ha capitalizzato i costi addizionali di "magazzino" (c) e i costi perduti dal non investire quei soldi al tasso $risk-free: S_0 e^{(r+c)t}$. Si può anche chiamare c, la percentuale sia dei costi finanziari che dei costi fisici. Come controparte si trova il bene di valore S_T che potrebbe, volendo, rivendere a quel valore sul mercato i data T.

2. In $t=0$, non compra e compra direttamente in T al prezzo S_T ed ottiene una unità del bene che potrebbe essere rivenduta in T.

3. In $t=0$, compra un future $F_0(T)$ di costo $m(F_0)$ =margine iniziale. In T finisce di pagare K, ovvero paga $(K-m)$, per ottenere un'unità del bene di valore S_T, che utilizzà o potrebbe rivendere.

Posizioni Long	1: Comprare S_0	2: Comprare F_0	3: Comprare S_T
Payoff in $t=t_0:(i)$	$-S_0$	$-m(F_0)$	0
Payoff in $t=T:(ii)$	S_T	$-(F_0-m(F_0))+S_T$	$-S_T+S_T$
Profitto $(T-t_0):(i)+(ii)$	$S_T-S_0e^{(r+c)(T-t_0)}$	S_T-F_0	0

(1)

Posizioni Short	1: Vendere S_0	2: Vendere F_0	3: Vendere S_T
Payoff in $t=t_0:(i)$	S_0	$m(F_0)$	0
Payoff in $t=T:(ii)$	$-S_T$	$(F_0-m(F_0))-S_T$	$+S_T-S_T$
Profitto $(T-t_0):(i)+(ii)$	$-S_T+S_0e^{(r+c)(T-t_0)}$	F_0-S_T	0

(2)

Definizione 7 *Nel tempo $S(t)$ varia e, a scadenza, $S_T \gtreqless S_0e^{rT}$, quindi il payoff è:*

- *Payoff a $t=T$ di una "posizione lunga" di 1 unità: S_T-F.*

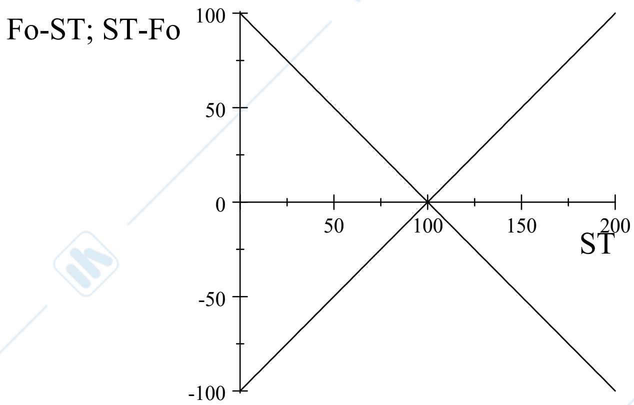
$$f_T(F,T): S_T-F_0 \gtreqless 0$$

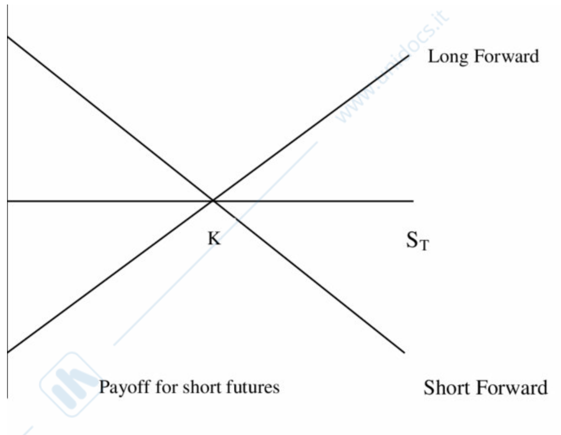
- *Payoff a $t=T$ di una "posizione corta" di 1 unità: $F-S_T$.*

$$-f_T(F,T): F_0-S_T \gtreqless 0$$

In figura $K=F_0=100$, il payoff in T è misurato sull'asse delle ordinate relative ai punti S_T futuri, sulla retta della posizione Long o su quella della posizione Short.

$$\begin{aligned} \text{Short } F_0 &: \ 100-S_T \\ \text{Long } F_0 &: \ -100+S_T \end{aligned}$$





Lo stesso grafico può essere ripetuto considerando F_t sull'asse delle ascisse e dunque la convenienza a ricevendere /ricomprare il future prima della scadenza.

osservazione 1 *Nella misura in cui $F_0 = S_0 e^{r(T-t_0)}$, le strategie 1 e 2 sono identiche. Il problema è che nella realtà il prezzo ed eventualmente i costi e i benefici del possederlo variano in maniera casuale e possono essere più alti del valore a scadenza della merce:*

- *Comprare direttamente a scadenza impedisce di fare previsioni di budget ed implica che l'operatore accetti l'incertezza.*
- *Comprando il future, l'operatore si assicura di pagare il prezzo di acquisto F_0. Se il prezzo di mercato a scadenza S_T è più alto, ha risparmiato, altrimenti ha perso.*

Esercizio 2 *Riscrivere la Tabella 1, nel caso l'agente debba vendere la merce nella scadenza T. (Posizione Short).*

2.5 Valore di un contratto forward

Dati:

- $F_t = S_t e^{r(T-t)} \Longrightarrow S_t = F_t e^{-r(T-t)}$
- $F_0 = S_0 e^{rT} \Longrightarrow S_0 = F_0 e^{-r(T-0)}$

Definizione 8 $f_t(F,T) =$ ***Valore del contratto "forward"***, *emesso in data t_0, valutato in una data $t \in (t_0, T)$ dopo l'emissione e prima della scadenza è il valore presente della*

$$Valore\ "F_0"\ in\ data\ t = VP\left[\text{"}nuovoF\text{"} - \text{"}vecchioF\text{"}\right]$$

ovvero il valore di un contratto emesso in $t = 0$, con scadenza in T, ha valore in data intermedia t, pari alla differenza fra un nuovo contratto emesso oggi e quello emesso in $t = 0$. Perché scontati? Perché F_t e F_0 sono due previsioni di prezzi validi al tempo T e è necessario riportare tali previsioni alla data t.

$$f_t(F_0, T) : (F_t - F_0)\, e^{-r(T-t)}$$

$$\begin{aligned} f_t(F_t, T) &: (F_t - F_0)\, e^{-r(T-t)} \\ &= \left(S_t e^{r(T-t)} - S_0 e^{rT}\right) e^{-r(T-t)} \\ &= S_t - F_0 e^{-r(T-t)} \end{aligned}$$

Definizione 9 *Il prezzo del forward all'emissione, F_0, è il valore che rende f nullo in data di emissione.*

$$f_{t=0}(F_0, T) : S_0 - F_0 e^{-r(T-0)} = 0$$

ovvero

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

ed è quindi uguale al Future quotato .

2.5.1 Portafoglio Replica del payoff di un forward

- $t = t$: Comprare S_t, indebitarsi di $F_0 e^{-r(T-t)}$:

$$Payoff\,(t) : -S_t + F_0 e^{-r(T-t)} = \text{Costo}$$

- $t = T$:Restituire alla banca $F_0 e^{-r(T-t)} e^{r(T-t)} = F_0$, possedere S_T

$$Payoff\,(T) : +S_T - F_0 = \text{ Rendimento}$$

3 Costi e benefici dal possesso di un Future

Possedere un future equivale a ritardare il possesso del sottostante. Ritardare il possesso del sottostante significa perdere i benefici, come per es. le cedole se si trattasse di un titolo a reddito fisso, e, invece non dover sottostare ai costi dovuti al possesso cme i costi di magazzino per le merci.

1. I benefici che si avrebbero dall'attività sottostante si cancellano comprando il future, perché ottengo il sottostante solo a scadenza e quindi riducono il valore del Future rispetto ad S (I o q).

2. I costi che si avrebbero dall'attività sottostante si cancellano comprando il future, perché ottengo il sottostante solo a scadenza e quindi aumentano il valore del future ($c =$ cost of carry).

Perché ci occupiamo di tutto ciò? Perché tali costi e/o benefici aumentano i diminuiscono il tasso di capitalizzazione del sottostante che va ad influenzare la previsione del sottostante e quindi ilvalore del Future.

Il tasso di capitalizzazione per calcolare F può quindi includere:

1. Benefici per S e dunque costi per F :
   - $\delta =$ dividendi, oppure $I = income =$ redditi o valore presente delle cedole o dei pagamenti vari (yields) pagati dall'attività sottostante;
   - $y = yield$ del sottostante $=$ convenience yield $=$ costo d'uso (u in Hull), inversamente proporzionale alle scorte, o come valore presente di tali cedole $U = uso$.
2. Costi per S e dunque benefici per F :
   - $r =$ costo del denaro o costo opportunità del detenere il sottostante.
   - $c =$ "cost of carry" o "storage cost" $=$ costi di trasporto e mantenimento;

Morale:

$$F_0 = S_0 e^{(r+c-\delta-y)t} \tag{3}$$

or

$$F_0 = (S_0 - U_0 - I_0)\, e^{(r+c)t} \tag{4}$$

Esercizio 3 *Esplicitare le equazioni* (3) *and* (4) *per* S.

Esempi, per confondersi le idee.

S	$F_0(T) \simeq E(S_T) =$	$f_0(K,T)$	$f_t(K,T)$	$f_T(K,T)$
$I = 0$	$S_0 e^{rT}$	$S_0 - F_0 e^{-rT}$		
$I > 0$	$(S_0 - I)\, e^{rT}$	$(S_0 - I) - F_0 e^{-rT}$		
$y > 0$	$S_0 e^{(r-y)T}$	$S_0 e^{-yT} - F_0 e^{-rT}$		
$U > 0$	$(S_0 - U)\, e^{rT}$	$(S_0 - U) - F_0 e^{-rT}$		
$c > 0$	$S_0 e^{(r+c)T}$	$S_0 e^{cT} - F_0 e^{-rT}$		
...	...	...		
$c > 0$	$S_0 e^{cT}$	? Esercizio		
$c, y > 0$	$S_0 e^{(c-y)T}$	? Esercizio		

3.0.2 Implied Repo Rate [1]

Cosi come possiamo ricavare il tasso zero coupon da un'obbligazione, cosi possiamo dedurre lo "yield" che chiamiamo $\widehat{r}_c = repo - rate$ dal prezzo di un future quotato F_q. Dalla definizione

$$F_q(t) = S_t \exp\left(\widehat{r} \cdot (T - t)\right)$$

da cui

$$\widehat{r}_c = \frac{1}{T - t_0} \ln \frac{F_q}{S_0}$$

Si può calcolare anche in termine di tasso di capitalizzazione discreta, ma siccome F è quotato continuamente è un calcolo meno utile.

In presenza dei benefici e dei costi elencati sopra, l'"implied repo" conterrà tutto gli elementi considerati a capitalizzazione o sconto dell'attività sottostante.

3.0.3 Contango e Backwardation [2]

Definizione 10 *Il* contango*, talvolta chiamato anche forwarding, è una situazione in cui il prezzo future o forward in $t = t_0$ è superiore al prezzo spot del contratto,($F_0 > S_0$). In una situazione di contango, gli arbitriggisti o gli speculatori sono "disposti a pagare di più in $t = 0$ per una merce da ricevere in T rispetto al prezzo atteso effettivo della merce.*

Ciò può essere dovuto al desiderio delle persone di pagare un premio per avere la merce in futuro piuttosto che pagare i costi di stoccaggio e sostenere i costi di acquisto della merce oggi. Dall'altro lato del mercato, gli hedgers (produttori di materie prime e/o detentori di materie prime) sono contenti di vendere contratti futures e accettare rendimenti superiori alle attese. Un mercato contango è anche noto come mercato normale o mercato dei costi di trasporto.

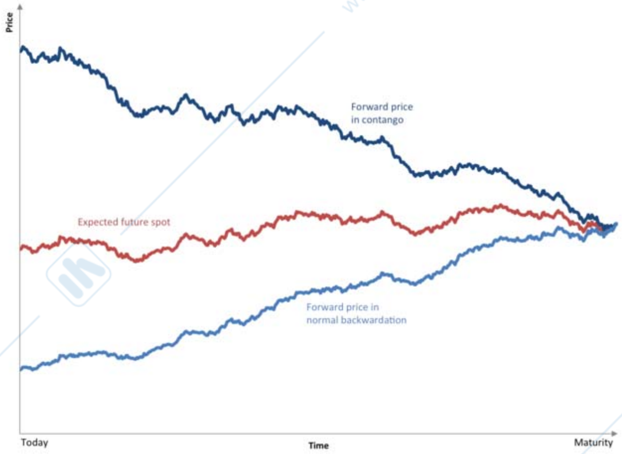
La condizione di mercato opposta al contango è nota come backwardation.

Definizione 11 Backwardation*, situazione in cui il prezzo dei futures è inferiore al prezzo spot per una particolare merce ($F_0 < S_0$). Questo è favorevole per gli investitori che hanno posizioni lunghe perché hanno interesse che il prezzo future salga al livello del prezzo spot corrente.*

I futures o la curva forward sarebbero tipicamente inclinati verso l'alto (cioè "normale"), poiché i contratti per date future verrebbero normalmente scambiati a prezzi ancora più alti. In termini generali, il backwardation riflette l'opinione della maggioranza del mercato secondo cui i prezzi spot scenderanno verso il basso, e contango che aumenteranno. Entrambe le situazioni consentono agli speculatori di guadagnare profitti.

Un contango è normale per un prodotto non deperibile che ha un cost of carry (di trasporto o finanziario, come definiti sopra).

[1] CNS(2020) p. 45-46.
[2] Da Wikipedia. By Suicup - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7173649



osservazione 2 *I Futures per date di scadenza successive in contango o backwardation sono shifts in avanti delle curve per cui, per la stessa data risulta:*

- *in Contango* $F^{T=3} > F^{T=2} > F^{T=1} > S$.
- *in Backwardation* $F^{T=3} < F^{T=2} < F^{T=1} < S$

3.1 Hedging mediante Futures

Note:

- Consideriamo due date qualunque durante la vita del future,t_1, t_2, ovvero non stiamo necessariamente considerando la scadenza in cui $F_T = S_T$.
- L'operazione di "hedging" o "copertura" va a neutralizzare una transazione effettiva necessaria.

Definizione 12 ***Meccanismo di Copertura***

- *Short Hedge: Anticipo della vendita: Vendo a F_0 (operazione di copertura) e poi di nuovo a S_1 (operazione effettiva) e completo in ogni periodo con l'operazione di segno contrario;*

  ==> L'operazione incerta $(-S_0 + S_1)$ viene sostituita dall'operazione $(-S_0 + F_0)$.
- *Long Hedge: Anticipo dell'acquisto: Compro a $-F_0$ (operazione di copertura) e poi di nuovo a $-S_1$ (operazione effettiva) e completo in ogni periodo con l'operazione di segno contrario;*

  ==> L'operazione incerta $(+S_0 - S_1)$ viene sostituita dall'operazione $(+S_0 - F_0)$.

Definizione 13 ***Basis Risk*** *= Rischio della base scelta. Dipende dalla differenza fra Spot e Future in data t*

$$b_t = S_t - F_t$$

NB. A scadenza T dovrebbe essere, soprattutto nel forward, per costruzione

$$b_T = S_T - F_T = 0$$

NB. L'uscita o entrata di cassa opposta all'operazione future al tempo t_0, la chiamiamo (S_0) e la mettiamo fra parentesi.

3.1.1 Short Hedge

- **Obiettivo.** L'operatore deve vendere il sottostate in data $t = 1$, $(+S_1)$ ed anticipa l'operazione dello stesso segno in data corrente con il future $+F_0$. In altre parole, temendo che il prezzo S_1 possa *scendere*, si "copre" vendendo il future oggi con prezzo F_0.

Vediamo i profitti nelle due date:

- in $t = t_0$, l'agente possiede il bene sottostante S in bilancio al valore corrente, ovvero S_0. Dovrebbe venderlo nella data t_1 al prezzo futuro incerto $\widetilde{S}_1$ Preferisce venderlo subito vendendo un future allo scoperto in data corrente F_0, SE la transazione gli è favorevole, bloccando un profitto positivo.

  $$\pi(t_0) : (-S_0) + F_0$$

  NB. Per memoria ed esercizio, ricalcolarsi quanto vale F_0

- in $t = t_1$, l'agente ha disponibile il bene fisico che ha in data 1 il valore S_1, che può vendere, per poter ricomprare F_1 e chiudere la posizione "future"

$$\pi(t_1) : S_1 - F_1$$

$$\begin{aligned}
\pi(t_1) + \pi(t_0) &: -S_0 + F_0 + S_1 - F_1 \\
&= \underbrace{(F_0 - S_0)}_{\text{Profitto certo}} + \underbrace{(S_1 - F_1)}_{\simeq 0} \\
&= \underbrace{F_0}_{locked} - S_0 + b_1 \\
&= -(S_0 - F_0) + b_1 \\
&= -b_0 + b_1
\end{aligned}$$

dove $b_t = (S_t - F_t) =$ rischio della "base".

osservazione 3 *Quale è il vantaggio di vendere il future (Short Hedging)?*
*Lo **Short Hedge** ha il vantaggio di "lock − in" la vendita ad F_0 e quindi un profitto $(F_0 - S_0)$ certo, suppondendo $b_1 \simeq 0$, in genere minore del profitto incerto $S_1 - S_0$.*

- Si può scrivere anche

$$\begin{aligned}
\pi(t_1) + \pi(t_0) &= (S_1 - S_0) - (F_1 - F_0) \\
&= \Delta S - \Delta F
\end{aligned} \tag{5}$$

- lo **Short Hedge** ha il vantaggio di "*lock − in*" la vendita a F_0 ovvero la vendita del sottostante al prezzo del future in $t = 0$, contro un rischio di misallineamento fra S_1 e F_1, detta base in $t = 1$, che è in genere minore della variazione $(S_T - S_0)$;
- le date $t = 0, 1$, possono anche essere due date qualunque durante la vita del future e anche $t = 0, T$.
- il future si può anche "Roll-over", per rimandare la chiusura della posizione a prezzi più favorevoli.

3.1.2 Long Hedge

- **Obiettivo.** L'operatore deve comprare il sottostate in data $t = 1$, $(-S_1)$ ed anticipa l'operazione dello stesso segno in data corrente con il future $-F_0$. In altre parole, temendo che il prezzo S_1 possa *salire*, si "copre" comprando il future oggi con prezzo F_0.

Vediamo i payoffs ad ogni data ed il profitto intertemporale:

- In $t = 0$,l'agente possiede denaro in bilancio pari al valore corrente S_0, e lo considero fra parentesi. L'agente / impresa preferisce comprare oggi a $-F_0$. piuttosto che aspettare di vendere il sottostante in data futura.

$$\pi(t_0) : (S_0) - F_0$$

- In $t = 1$, (i) l'agente vende il future F_1, e con tale denaro può comprare la merce S_1. Ha soltanto postposto la transazione. Si è assicurato l'acquisto a F_0 invece che a S_1

$$\pi(t_1) : +F_1 - S_1$$

$$\begin{aligned} \pi(t_0) + \pi(t_1) &: (S_0) - F_0 + F_1 - S_1 \\ &= S_0 - F_0 - (S_1 - F_1) \\ &= \underbrace{S_0 - F_0}_{lock} - (S_1 - F_1) \\ &= \underbrace{(S_0 - F_0)}_{\text{Profitto certo}} - \underbrace{(S_1 - F_1)}_{\simeq 0} \\ &= (S_0 - F_0) - b_1 \\ &= b_0 - b_1 \end{aligned}$$

dove $b_1 = (S_1 - F_1)$.

Oppure si può scrivere

$$\begin{aligned} \pi(t_1) + \pi(t_0) &= -(S_1 - S_0) + (F_1 - F_0) \\ &= -\Delta S + \Delta F \end{aligned} \tag{6}$$

- il **Long Hedge** "*locks − in*" l'acquisto al prezzo F_0 , il valore del sottostante al prezzo del future oggi, invece che l'acquisto all'incerto S_1, caricandosi il rischio di misallineamento fra S_1 e F_1, ($basisrisk = b_1$) che è in genere minore della variazione $(S_1 - S_0)$;

3.1.3 Delta Hedging

Quanto notato sopra nelle (5) e (6) può essere generalizzato.

Un portafoglio è coperto (hedged) perfettamente se, al variare dello spot, le posizioni di copertura variano in maniera tale che la variazione netta del portafoglio resti nulla.

Consideriamo la variazione del portafoglio durante la vita dell'hedge

$$\Delta\pi = \Delta S - h\Delta F$$

si ha

$$\begin{aligned} h^* &: \Delta\pi = 0 \\ &\implies h^* = \frac{\Delta S}{\Delta F} \end{aligned}$$

calcoliamo la varianza

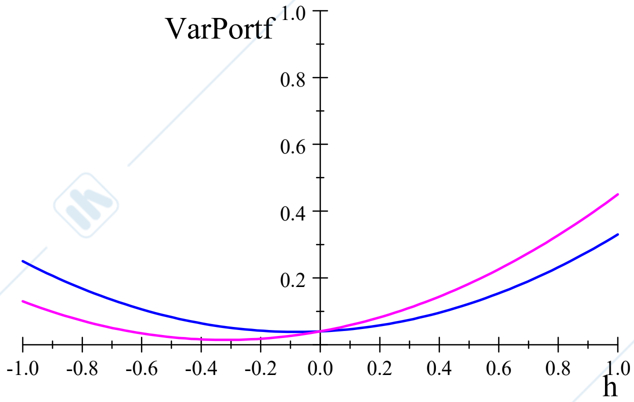
$$Var(\pi) = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 + 2 \cdot h \cdot cov(S, F)$$

scrivendo $cov(S, F) = \rho\sigma_S\sigma_F$

$$Var(\pi) = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 + 2 \cdot h \cdot \rho\sigma_S\sigma_F$$

Esempio

$$Var(\pi) = 0.2^2 + h^2 0.5^2 + 2 \cdot h \cdot (0.8) \cdot 0.2 \cdot 0.5$$



Volatility Smile per $\rho = 0.3(blue), 0.8(rosa)$

$$\frac{\partial Var\left(\pi\right)}{\partial h} \quad : \quad 2h\sigma_F^2 + 2\rho\sigma_S\sigma_F = 0$$
$$\Longrightarrow \quad h_{\min}^{**} = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

dove h^* è la copertura che garantisce la minima varianza del portafoglio. (NB. Anche in positivo).

References

[1] Benninga, S. (2014). Financial Modeling 3rd ed. MIT Press.

[2] Benninga, S. (2010). Modelli Finanziari: la Finanza con Excel 2a ed. Mc Graw-Hill.

[3] Cuthbertson, K., Nitzsche, D., & O'Sullivan, N. (2020) Derivatives, Wiley.

[4] Hull, J. (2018). Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall. (Ed italiana a cura di E. Barone).

[5] Kosowski, R.L., Neftci, S.N. (2014) Principles of Financial Engineering, Academic Press.

ABC Swaps & FRAs

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Lezioni di "Pricing"

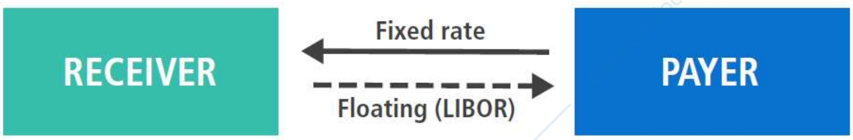
April 28, 2021

1 Introduzione: Swap su tassi di interesse[1]

Che cos'è uno swap sui tassi di interesse?

Definizione 1 *Uno swap sui tassi di interesse è un accordo tra due parti per scambiare il flusso di pagamenti di interessi a tasso fisso contro interessi a tasso variabile con la controparte, in un determinato periodo di tempo. Il flusso degli interessi è calcolato su un ammontare nozionale che non verrà mai scambiato. L'ammontare nozionale è fissato in ciascuna valuta. Gli swap sono contratti derivati negoziabili over-the-counter.*

Definizione 2 *Per fissare i nomi delle due controparti, è detto Payer chi paga il tasso fisso e Receiver chi lo riceve, anche se per i tassi variabili è esattamente il contrario.*



Gli swap su tassi di interesse più comunemente scambiati e più liquidi sono noti come swap "plain-vanilla", che scambiano pagamenti a tasso fisso con pagamenti a tasso variabile basati sull'EURIBOR (per l'euro o LIBOR (London Inter-Bank Offer Rate) sulla sterlina), il tasso di interesse di alta qualità creditizia che le banche si applicano reciprocamente per finanziamenti a breve termine. LIBOR è il punto di riferimento per i tassi di interesse a breve termine fluttuanti ed è fissato giornalmente. Sebbene esistano altri tipi di swap su tassi di interesse, come quelli che scambiano un tasso variabile con un altro, gli swap alla vaniglia rappresentano la stragrande maggioranza del mercato.

[1]Questa introduzione è tratta da: https://europe.pimco.com/en-eu/resources/education/understanding-interest-rate-swaps

Le banche di investimento e commerciali con rating creditizi elevati sono produttori di mercati di swap, che offrono flussi di cassa sia a tasso fisso che variabile ai propri clienti. Le controparti in una tipica transazione di swap sono una società, una banca o un investitore da una parte (il cliente della banca) e una banca di investimento o commerciale dall'altra parte. Dopo che una banca ha eseguito uno swap, di solito compensa lo swap attraverso un broker inter-dealer e mantiene una commissione per l'impostazione dello swap originale. Se una transazione di swap è grande, il broker inter-dealer può organizzare di venderla a un numero di controparti e il rischio dello swap diventa più ampiamente disperso. Questo è il modo in cui le banche che forniscono swap abitualmente eliminano il rischio o l'esposizione ai tassi di interesse ad esse associati.

Inizialmente, gli swap su tassi di interesse hanno aiutato le aziende a gestire le proprie passività di debito a tasso variabile, consentendo loro di pagare tassi fissi e ricevere pagamenti a tasso variabile. In questo modo, le società potrebbero bloccarsi nel pagamento del tasso fisso prevalente e ricevere pagamenti che corrispondessero al loro debito a tasso variabile. (Alcune società hanno fatto il contrario - pagato in modo fluttuante e ricevuto fisso - per abbinare le loro attività o passività.) Tuttavia, poiché gli swap riflettono le aspettative del mercato per i tassi di interesse in futuro, gli swap sono diventati anche uno strumento attraente per altri partecipanti al mercato del reddito fisso, tra cui speculatori, investitori e banche.

Qual è il tasso swap?

Il "tasso swap" è il tasso di interesse fisso richiesto dal destinatario in cambio dell'incertezza di dover pagare il tasso LIBOR (variabile) a breve termine nel tempo. In qualsiasi momento, le previsioni del mercato su ciò che LIBOR sarà in futuro si riflettono nella curva LIBOR a termine.

Al momento del contratto di swap, il valore totale dei flussi a tasso fisso dello swap sarà pari al valore dei pagamenti a tasso variabile attesi impliciti dalla curva LIBOR a termine. Con il variare delle aspettative future per il LIBOR, cambierà anche il tasso fisso richiesto dagli investitori per stipulare nuovi swap. Gli swap sono generalmente quotati in questo tasso fisso, o in alternativa nel **"spread swap"**, che è la differenza tra il tasso swap e il rendimento equivalente dei titoli di stato locali per la stessa scadenza.

Un principio simile si applica quando si considera il denaro stesso e si considera l'interesse come il prezzo per denaro. Se il rendimento reale (corretto per l' inflazione) su un'attività finanziaria differisce tra due paesi, gli investitori si affolleranno nel paese con i rendimenti più elevati. I tassi di interesse devono cambiare per fermare questo movimento. La teoria alla base di questa relazione è chiamata teoria della parità dei tassi di interesse. (Quando si osservano i tassi di interesse, è importante distinguere tra tassi reali e tassi nominali, con la differenza che riflette il tasso di inflazione. Maggiore è l'inflazione attesa in un paese, maggiore sarà la compensazione richiesta dagli investitori quando investono in una determinata valuta.)

Qual è la curva di swap?

Il grafico dei tassi di swap su tutte le scadenze disponibili è noto come curva di swap. Poiché i tassi di swap incorporano le aspettative future per LIBOR, nonché la percezione del mercato di altri fattori come la liquidità, le dinamiche della domanda e dell'offerta e la qualità del credito delle banche, la curva degli swap è un punto di riferimento dei tassi di interesse estremamente importante.

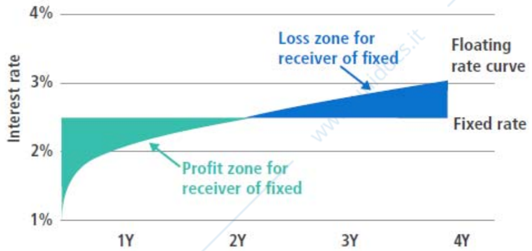
Sebbene la curva degli swap sia in genere simile nella forma alla curva dei rendimenti sovrani equivalente, gli swap possono essere scambiati con rendimenti sovrani superiori o inferiori con scadenze corrispondenti. La differenza tra i due è lo "swap spread". Storicamente lo spread tendeva ad essere positivo tra le scadenze, riflettendo il rischio di credito più elevato delle banche rispetto ai titoli sovrani. Tuttavia, altri fattori, tra cui la liquidità e le dinamiche della domanda e dell'offerta, indicano che oggi negli Stati Uniti lo spread swap è negativo a scadenze più lunghe.

Poiché la curva di swap riflette sia le aspettative LIBOR sia il credito bancario, è un potente indicatore delle condizioni nei mercati del reddito fisso. In alcuni casi, la curva di swap ha soppiantato la curva del Tesoro come principale parametro di riferimento per la determinazione del prezzo e la negoziazione di obbligazioni societarie, prestiti e mutui.

Come funziona un contratto di swap?

Al momento della stipula di un contratto di swap, viene generalmente considerato "al denaro", il che significa che il valore totale dei flussi di cassa a tasso fisso lungo la vita dello swap è esattamente uguale al valore atteso della liquidità a tasso variabile flussi. Nell'esempio seguente, un investitore ha scelto di ricevere un contratto swap fisso. Se la curva LIBOR in avanti, o curva a tasso variabile, è corretta, il 2,5% che riceve sarà inizialmente migliore dell'attuale tasso LIBOR mobile dell'1%, ma dopo qualche tempo, il suo 2,5% fisso sarà inferiore al tasso variabile. All'inizio dello swap, il "valore attuale netto", ovvero la somma degli utili e delle perdite previsti, dovrebbe sommarsi a zero.

A TYPICAL SWAP TRANSACTION AT INCEPTION



When an investor enters into a swap, the difference between the fixed rate payments and the expected future floating rate payments should be zero (the blue zone equals the green zone)

Source: PIMCO
Sample for illustrative purposes only.

Tuttavia, la curva LIBOR in avanti cambia costantemente. Nel tempo, poiché i tassi di interesse impliciti cambiano curva e quando gli spread del credito fluttuano, l'equilibrio tra la zona verde e la zona blu si sposterà. Se i tassi di interesse diminuiscono o rimangono inferiori alle attese, il "ricevitore" del profitto fisso (l'area verde si espanderà rispetto al blu). Se i tassi aumentano e si mantengono più alti del previsto, il "ricevitore" perderà (il blu si espande rispetto al verde).

Se uno swap diventa non redditizio o se una controparte desidera eliminare il rischio di tasso di interesse dello swap, quella controparte può costituire uno swap compensativo - essenzialmente un'immagine speculare dello swap originale - con una diversa controparte per "annullare" l'impatto di lo scambio originale.

Come investire in swap sui tassi di interesse?

Gli swap su tassi di interesse sono diventati uno strumento essenziale per molti tipi di investitori, nonché per tesorieri aziendali, gestori del rischio e banche, poiché hanno molti usi potenziali. Questi includono:

Gestione del portafoglio.

Gli swap su tassi di interesse consentono ai gestori di portafoglio di adeguare l'esposizione ai tassi di interesse e di compensare i rischi posti dalla volatilità dei tassi di interesse. Aumentando o diminuendo l'esposizione ai tassi di interesse in varie parti della curva dei rendimenti utilizzando gli swap, i gestori possono aumentare o neutralizzare la propria esposizione ai cambiamenti nella forma della curva e anche esprimere opinioni sugli spread di credito. Gli swap possono anche fungere da sostituti di altri strumenti a reddito fisso meno liquidi. Inoltre, gli swap su tassi di interesse di lunga data possono aumentare la durata di un portafoglio, rendendoli uno strumento efficace nell'investimento guidato da responsabilità, in cui i gestori mirano a abbinare la durata delle attività a quella delle passività a lungo termine.

La speculazione.

Poiché gli swap richiedono poco capitale in anticipo, offrono agli operatori del reddito fisso un modo per speculare sui movimenti dei tassi di interesse, evitando potenzialmente il costo di posizioni lunghe e corte in titoli del Tesoro. Ad esempio, per ipotizzare che i tassi a cinque anni scenderanno utilizzando la liquidità nel mercato del Tesoro, un operatore finanziario deve investire denaro o capitale preso in prestito per acquistare un buono del Tesoro di cinque anni. Al contrario, il trader potrebbe "ricevere" riparazioni in una transazione swap di cinque anni, che offre una scommessa speculativa simile sui tassi in calo, ma non richiede un significativo capitale iniziale.

Finanza aziendale.

Le imprese con passività a tasso variabile, come i prestiti collegati al LIBOR, possono stipulare swap in cui pagano fisse e ricevono fluttuazioni, come notato in precedenza. Le società potrebbero anche impostare swap per pagare in modo fluttuante e ricevere riparazioni fisse a copertura dei tassi di interesse in calo, o se i tassi fluttuanti corrispondono più da vicino alle proprie attività o al proprio reddito.

Gestione del rischio.

Le banche e altri istituti finanziari sono coinvolti in un numero enorme di transazioni che coinvolgono prestiti, contratti derivati e altri investimenti. La maggior parte delle esposizioni a tassi di interesse fissi e fluttuanti di solito si annullano a vicenda, ma l'eventuale rischio di tasso di interesse residuo può essere compensato da swap su tassi di interesse.

Blocco dei tassi sull'emissione di obbligazioni.

Quando le società decidono di emettere obbligazioni a tasso fisso, di solito bloccano il tasso di interesse corrente stipulando contratti swap. Ciò dà loro il tempo di uscire e trovare investitori per le obbligazioni. Una volta che vendono effettivamente le obbligazioni, escono dai contratti di swap. Se i tassi sono saliti dalla decisione di vendere obbligazioni, i contratti di swap varranno di più, compensando l'aumento dei costi di finanziamento.

Quali sono i rischi?

Come la maggior parte degli investimenti a reddito fisso non governativi, gli swap su tassi di interesse comportano due rischi principali: il rischio di tasso di interesse e il rischio di credito, che è noto nel mercato degli swap come rischio di controparte.

(i) Poiché i movimenti dei tassi di interesse effettivi non sempre corrispondono alle aspettative, gli swap comportano un **rischio di tasso di interesse**. In parole povere, un destinatario (la controparte che riceve un flusso di pagamento a tasso fisso) guadagna se i tassi di interesse diminuiscono e perde se i tassi di interesse aumentano. Al contrario, il pagatore (la controparte che paga fisso) guadagna se i tassi aumentano e perde se i tassi diminuiscono.

(ii) Gli swap sono anche soggetti al **rischio di credito della controparte**: la possibilità che l'altra parte nel contratto sia inadempiente sotto la propria responsabilità. Questo rischio è stato in parte mitigato dalla crisi finanziaria, con gran parte dei contatti di swap che ora vengono compensati tramite controparti centrali (CCP). Tuttavia, il rischio è ancora superiore a quello di investire in un buono del Tesoro "privo di rischio".

2 Plain Vanilla Interest Rate Swap

Esempio 1 - Dati Hull (2018)

- $L = LIBOR(6M)$

	Fissi	Variabili	$\Delta_{Fix} - \Delta_{Var}$
Impresa A	10%	6M Libor +0.30%	
Impresa B	11.2%	6M Libor +1.00%	
$\Delta_{i=A,B}$	1.2%	0.7%	0.5%

Definizione 3 *"Vantaggio Comparato". Fra le due controparti avere il vantaggio comparato sul tasso fisso o sul tasso variabile vuol dire avere il tasso di mercato inferiore. Se una parte ha tassi inferiori su entrambi i mercati, la controparte svantaggiata si dirà avere "vantaggio comparato" sul mercato in cui ha il minore ricarico.*

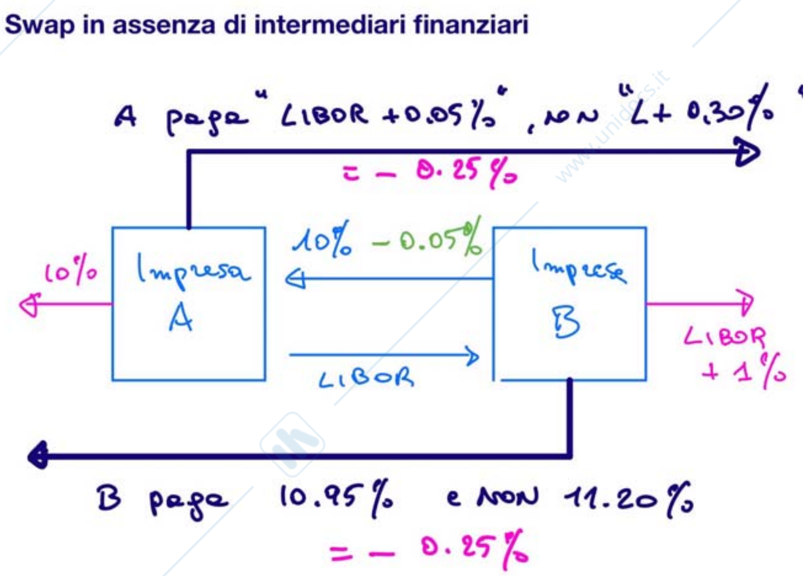
Definizione 4 *Il "Surplus" dallo Swap è pari a*

$$S = \Delta_{Fix} - \Delta_{Var}$$

e verrà spartito fra le controparti secondo il loro potere di mercato.

Nel seguito ipotizziamo che venga spartito 50:50 fra i privati, dopo aver sottratto la quota dell'eventuale intermediario che sarà un dato del problema.

2.1 Schema in assenza di intermediari finanziari



Impresa A

- Paga a esterno per anno: -10%;
- Riceve da B per anno: $+10\% - 0.05\%$;
- Paga a $B : Libor (= L)$

Sommo gli addendi

$$\Sigma = -0.1 + (0.1 - 0.0005) - (Libor) = -Libor - 0.0005$$

Scritto i termini %

$$\Sigma = -10\% + (10\% - 0.05\%) - (Libor) = -(Libor + 0.05\%)$$

Ovvero pagamento in tasso variabile di A dopo lo swap: v_A^S

$$v_A^S = L + 0.05\%$$

mentre se fosse andata sul mercato

$$v_A = Libor + 0.3\%$$

dunque risparmio di A

$$sv_A = 0.25\%$$

Impresa B

- Paga a esterno: -$(L + 1\%)$
- Riceve da $A : L$
- Paga a $A : -(10\% - 0.05\%)$

$$-(L + 0.01) + L - (0.1 - 0.0005) = -0.1095$$

Scritto in termini %

$$-(L + 1\%) + L - (10\% - 0.05\%) = -10.95\%$$

Calcoliamo e chiamiamo il pagamento in tasso fisso di B dopo lo swap

$$f_B^S = 10.95\%$$

mentre chiamiamo il tasso di mercato fisso per B, se fosse andata sul mercato

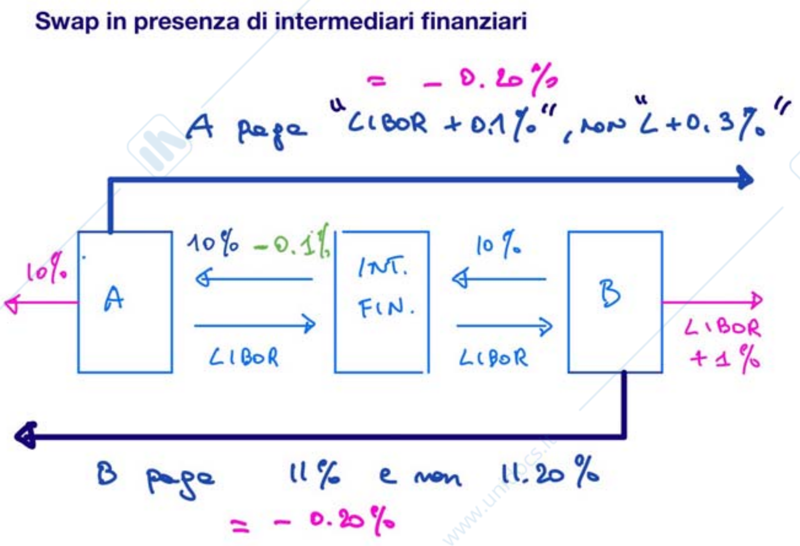
$$f_B = 11.20\%$$

dunque chiamiamo e calcoliamo il risparmio di B

$$sf_B = 0.25\%$$

2.2 Schema in presenza di intermediari finanziari

Esiste adesso un intermediario finanziario F.



Impresa A

- Paga a esterno per anno: -10%;
- Riceve da B per anno: $+10\% - 0.10\% = 9.90\%$;
- Paga a $F: -L$

Sommo gli addendi

$$\Sigma = -0.1 + (0.1 - 0.001) - (Libor) = -Libor - 0.001$$

Scritto in termini %

$$-10\% + (10\% - 0.10\%) - (Libor) = -Libor - 0.1\%$$

Ovvero chiamiamo e calcoliamo il pagamento in **tasso variabile di A dopo lo swap**: v_A^S

$$v_A^S = L + 0.1\%$$

mentre chiamiamo il **tasso di mercato variabile** per A

$$v_A = Libor + 0.3\%$$

dunque chiamiamo il **tasso variabile risparmiato da A** (s =saving rate)

$$sv_A = 0.20\%$$

Impresa B

- Paga a esterno: -$(L + 1\%)$
- Riceve da $A : L$
- Paga a $F : -10\%$

$$-(L + 0.01) + L - 0.1 = -0.11$$

Scritto in termini %

$$-(L + 1\%) + L - 10\% = -11\%$$

Calcoliamo e chiamiamo il pagamento in tasso fisso di B dopo lo swap f_B^S

$$f_B^S = 11\%$$

mentre chiamiamo il tasso di mercato fisso per B, se fosse andata sul mercato

$$f_B = 11.20\%$$

dunque chiamiamo e calcoliamo il tasso fisso risparmiato da B

$$sf_B = 0.20\%$$

Intermediario Finanziario
Per contratto (semplificato) viene pagato soltanto dal payer (di tasso fisso) ovvero B.

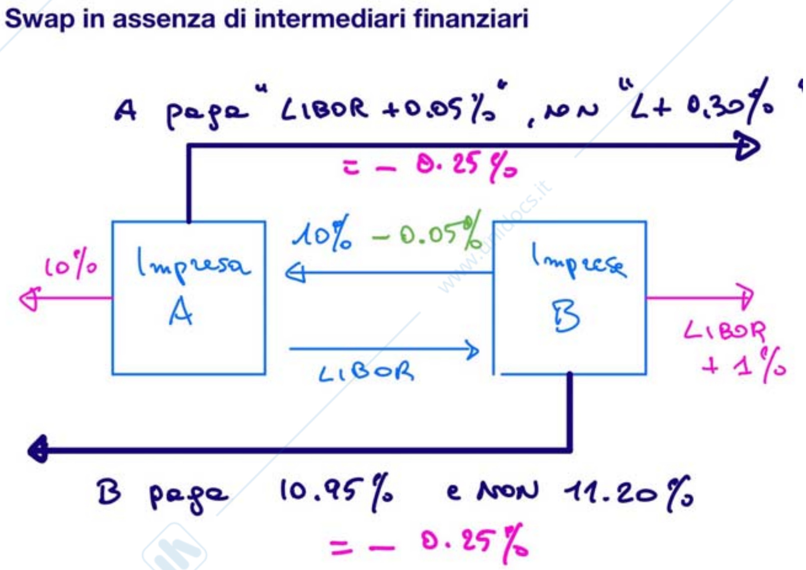
- Riceve da $B : 0.1\%$.

Esercizio 1 *Calcolare le entrate e le uscite dell'intermediario finanziario.*

2.3 Algoritmo

Esercizio di riferimento per controllare i risultati.

	Fissi	Variabili	$\Delta_{Fix} - \Delta_{Var}$
Impresa A	10%	6M Libor +0.30%	
Impresa B	11.2%	6M Libor +1.00%	
$\Delta_{i=A,B}$	1.2%	0.7%	0.5%



2.3.1 Commissione sul tasso fisso

Impresa A

- Paga a esterno un tasso fisso: $-f_A$
- Riceve da $B: f_A - x$
- Paga a $B: -(L + y)$. Ipotesi $y = 0$.
- Surplus $S = \Delta_{Fix} - \Delta_{Var} = 0.5\%$

Il contratto prevede che ognuna delle controparti abbia diritto di ottenere $S/2$

$$-0.1 + (0.1 - 0.001) - L = -L - 0.003 + 0.0025$$

$$-0.1 + (0.1 - x) - L = -L - 0.003 + 0.0025$$

$$x = 0.05\% = 0.000\,5$$

Risultato 1 *Algoritmo: cerchiamo x tale che:*

$$-f_A + (f_A - x) - L = -L - v_A + S/2$$

$$\begin{aligned} x_A^* &= v_A - \frac{1}{2}S \\ &= 0.003 - 0.0025 \end{aligned}$$

Impresa B

- Paga a esterno: $-(L + v_B)$
- Riceve da $A : (L + y)$. Ipotesi: $y = 0$.
- Paga ad $A : -(f_A - x)$

Risultato 2 *Algoritmo: cerchiamo x tale che:*

$$\begin{aligned} -(L + v_B) + (L + 0) - (f_A - x) &= -f_B + S/2 \\ -(L + 0.01) + (L + 0) - (0.1 - x) &= -0.112 + 0.0025 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B^* &= \frac{1}{2}S + f_A - f_B + v_B \\ &= 0.0025 + 0.10 - 0.112 + 0.01 \\ &= 0.000\,5 \end{aligned}$$

Risultato 3 *Le espressioni calcolate per A o per B sono identiche*

$$\begin{aligned} x_B^* &= \frac{1}{2}S + f_A - f_B + v_B \\ &= \frac{1}{2}\left((f_B - f_A) - (v_B - v_A)\right) + f_A - f_B + v_B \\ &= \frac{1}{2}f_A - \frac{1}{2}f_B + \frac{1}{2}v_A + \frac{1}{2}v_B \\ &= v_A - \frac{1}{2}S \\ &= x_A^* \end{aligned}$$

2.3.2 Commissione sul tasso variabile

Ci chiediamo cosa succede se y sia un ricarico sul Libor,

- **Impresa A**
- Paga vs esterno un tasso fisso: $-f_A$
- Riceve da $B : f_A - 0$. Ipotesi $x = 0$
- Paga a $B : -(L + y)$

- Surplus $= \Delta_{Fix} - \Delta_{Var} = 0.5\%$

Il contratto prevede che ognuna delle controparti abbia diritto di ottenere $S/2$.
Calcolare y_A^*

Risultato 4 *Algoritmo: cerchiamo y_A^* tale che:*

$$\begin{aligned} -f_A + (f_A - 0) - (L + y) &= -L - v_A + S/2 \\ -0.10 + (0.10 - 0) - L - y &= -L - 0.003 + 0.0025 \\ y^* &= 0.0005 \end{aligned}$$

Ricavando y, si ha che il tasso variabile dopo lo swap, v_A^S, diventa

$$\begin{aligned} v_A^S &= v_A - \frac{1}{2}S \\ &= 0.003 - 0.0025 \\ &= 0.000\,5 \end{aligned}$$

$$v_A^S = L + 0.0005$$

Impresa B

- Paga vs esterno: $-(L + v_B)$
- Riceve da $A:(L + y)$
- Paga a $A:-(f_A - 0)$

Risultato 5 *Algoritmo: cerchiamo y_B^* tale che:*

$$\begin{aligned} -(L + v_B) + (L + y) - (f_A - 0) &= -f_B + S/2 \\ -(L + 0.01) + (L + y) - (0.10 - 0) &= -0.112 + 0.0025 \\ y^* &= 0.000\,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_B^* &= f_B - f_A - v_B - \frac{1}{2}S \\ y_B^* &= 0.112 - 0.1 - 0.01 - 0.0025 \\ &= 0.0005 \end{aligned}$$

- In presenza di intermediario, la commissione è incorporata in x o y con lo stesso segno.

2.4 Esempio 2 - Dati Hull (2018)

Consideriamo questo altro esempio da Hull.

Ricalcolare l'intero esercizio del testo senza e con Intermediario Finanziario per la seguente tabella.

	Fissi	Variabili	$S = \Delta_{Fix} - \Delta_{Var}$
Impresa A	12%	6M Libor +0.1%	
Impresa B	13.4%	6M Libor +0.6%	
$\Delta_{i=A,B}$	1.4%	0.5%	$= 1.4\% - 0.5\% = 0.9\%$

Impresa A

- Paga a esterno un tasso fisso: $-f_A$
- Riceve da $B: +(f_A - x)$
- Paga a $B: -(L+y)$. Ipotesi $y = 0$.
- Surplus $= \Delta_{Fix} - \Delta_{Var} = 0.9\%$

Il contratto prevede che ognuna delle controparti abbia diritto di ottenere $S/2$

Risultato 6 *Algoritmo: cerchiamo x tale che:*

$$-f_A + (f_A - x) - (L+y) = -L - v_A + S/2$$

$$\begin{aligned} -0.12 + (0.12 - x) - (L+0) &= -L - 0.001 + 0.0045 = -L + 0.35\% \\ x_A^* &= 0.0035 \end{aligned}$$

Impresa B

- Paga a esterno: $-(L + v_B)$
- Riceve da $A: (L-0)$. Ipotesi: $y = 0$.
- Paga a $A: -(f_A - x)$

Ripetiamo il calcolo

$$\begin{aligned} -(L+v_B) + (L-0) - (f_A - x) &= -f_B + S/2 \\ -(L+0.006) + L - (0.12 - x) &= -0.134 + 0.0045 = -12.95\% \\ x_B^* &= 0.0035 \end{aligned}$$

Si conferma la stessa soluzione.

2.4.1 Commissioni sul tasso variabile

Sui dati della tabella dell'esempio 2, consideriamo che adesso la mediazione avvenga sul tasso variabile, mediante y, mentre lasciamo $x = 0$.

Impresa A

- Paga a esterno un tasso fisso: $-f_A$
- Riceve da $B: f_A - 0$. Ipotesi $x = 0$
- Paga a $B: -(L + y.)$
- Surplus $= \Delta_{Fix} - \Delta_{Var} = 0.5\%$

Il contratto prevede che ognuna delle controparti abbia diritto di ottenere $S/2$.

Impresa B

- Paga a esterno: -$(L + v_B)$
- Riceve da $A: (L+y)$.
- Paga a $A: -(f_A - 0)$

Il contratto prevede che ognuna delle controparti abbia diritto di ottenere $S/2$.

Esercizio 2 *(i) Calcolare y_A^*. (ii) Calcolare y_B^*. (iii) Verificare se $y_A^* = y_B^*$.*

3 Curva Zero swap rates

3.1 I interpretazione

Valutazione di uno Zero Coupon Swap

La valutazione di uno zero coupon swap implica la determinazione del valore attuale dei flussi di cassa utilizzando un tasso spot (o tasso zero coupon). Il tasso spot (a pronti) è un tasso di interesse che si applica a un'obbligazione a sconto che non paga cedola e produce un solo flusso di cassa alla data di scadenza. Il valore attuale di ciascun ramo (leg) fisso e ramo variabile dello swap sarà determinato separatamente e sommato insieme. Poiché i pagamenti a tasso cedolare fisso sono noti in anticipo, il calcolo del valore attuale di questa gamba è semplice. Per ricavare il valore attuale dei flussi di cassa della parte (leg) a tasso variabile, è necessario calcolare come tasso cedolare variabile (a numeratore), il tasso forward implicito. Ovvero l'incognita sono i tassi cedolari variabili, mentre come tasso di sconto si usano i tassi della curva dei tassi spot. Il risultato deve essere la quotazione alla pari. Si usa il metodo Bootstrap cominciando dalla prima scadenza e via via si trovano tutti i tassi a numeratore.

Definizione 5 *Curva Zero Swap Rates.*$\{c_v(t)\}$

$$\sum_{t=(t-t_0)}^{T-t_0} \frac{c_v}{m} \cdot 100 \cdot \exp(-r_t \cdot t) + 100 \cdot \exp(-r_t \cdot T) \tag{1}$$

Metodo Bootstrap per calcolare i "Zero Swap Rates"

- Data la struttura dei tassi spot da utilizzare per scontare (normalmente si usa la curva dei tassi spot zero coupon (a pronti).
- Data la data corrente t_0 che può essere diversa dalla data di emissione.
- Usare l'equazione (1) per ogni data $(t - t_0)$ di distribuzione delle cedole. Per ognuna di queste si costruisce il prezzo alla pari

$$\sum_{t=(t-t_0)}^{T-t_0} \frac{c_v(t)}{m} \cdot 100 \cdot \exp(-r_t \cdot t) + 100 \cdot \exp(-r_t \cdot T) = 100$$

  e si risolve per il tasso cedolare al numeratore annuale $c_v(t)$ a mano o con il risolutore di Excel.
- In questo modo si calcolano i tassi cedolari variabili, che sono tassi forward dello swap.

Proposizione 1 *? La struttura dei tassi forward ricavabili dagli zero coupon swap è la stessa ricavabile dalla struttura dei tassi forward?*

Mi impensierisce il nome "Zero Swap Rates".
Questa interpretazione è utilizzata negli esercizi Hull 9th (2018) Es. 7.2-3. p. 188-190 (v. inglese).

3.2 II interpretazione

I tassi forward sono quelli al denominatore e le cedole sono fisse.

Hull (2018) Esempio 7.1

Supponiamo che

- la struttura dei tassi spot, da utilizzare per i tassi di sconto, sia la curva dei tassi zero LIBOR / swap a 6 mesi, 12 mesi e 18 mesi siano 4%, 4,5% e 4,8% con compounding continuo e
- il tasso swap a 2 anni (per uno scambio in cui i pagamenti vengono effettuati semestralmente) sia del 5%.

Il tasso swap al 5% significa che si tratta di un'obbligazione con capitale nozionale pari a 100 e un tasso cedolare del 5% annuo distribuito in rate semestrali da $2.5 = 2.5\% \cdot 100$.

Ne consegue che, se r è il tasso incognito a 2 anni, uso i tassi precedenti per valutare le cedole, lascio r incognito e lo calcolo come nel solito metodo bootstrap degli Zero coupon.

La nota interessante è che i titoli fittizi sottostanti allo swap hanno sempre capitale nozionale $N = 100$ e quindi si scambiano alla "pari".

$$2.5 \cdot \exp(-0.04 \cdot 0.5) + 2.5 \cdot \exp(-0.045 \cdot 1) + 2.5 \cdot \exp(-0.048 \cdot 1.5) + 102.5 \cdot \exp(-r \cdot 2) = 100 \quad (2)$$

Risolvendo per r otteniamo: $r = 4.953\%$.

Proposizione 2 *? Riusciamo a dimostrare che la (2) equivale al rapporto Bfix / Bvar avendo semplificato i tassi di sconto?*

4 Valutazione dello Swap "Plain Vanilla"

Poiché lo swap è lo scambio dei flussi di cassi di due titoli, uno con tasso cedolare fisso ed uno con tasso cedolare variabile, legato al Libor, il valore dello Swap è dato dalla differenza fra i valori residui di questi due titoli.

Definizione 6 *Dati:*

- N = *valore nozionale del montante dell'obbligazione (generalmente 100 milioni di USD o EUR),*
- B_{fix} = *valore dell'obbligazione a tasso fisso sottostante lo swap,*
- c_f = *tasso cedolare fisso*

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} c_f \cdot N \cdot \exp(-r_i t_i) + N \cdot \exp(-r_n t_n)$$

- B_{var} = *valore dell'obbligazione a tasso variabile sottostante lo swap,*

- $c_v(i)$ = *tasso cedolare variabile, commisurato al Libor, incognito implicito nella quotazione alla pari ed equivalente alla struttura dei tassi forward ricavabili dalla struttura dei tassi spot.*

$$B_2 = \sum_{i=1}^{n} c_v(i) \cdot N \cdot \exp(-r_i t_i) + N \cdot \exp(-r_n t_n)$$

Definizione 7 *Il "valore dello swap", V*

$$V = B_1 - B_2$$

5 Forwards Rate Agreements

Che cos'è un contratto a termine (FRA)? [2]

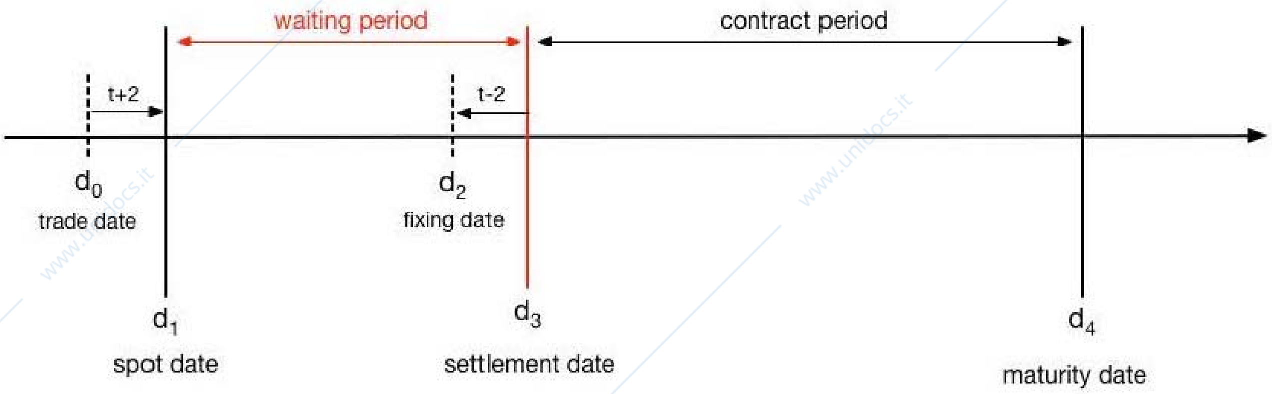
Un contratto a termine (FRA) è un contratto OTC regolato in contanti tra due controparti, in cui **l'acquirente sta prendendo in prestito** N (**e il venditore sta prestando**) una somma nozionale a un tasso di interesse fisso (il tasso FRA) e per un determinato periodo di tempo a partire da una data concordata in futuro.

Un FRA è fondamentalmente un prestito che comincia ad un tasso forward in una data futura non più lontana di 12 mesi dalla data di acquisto e di durata anch'essa non superiore ai 12 mesi, in cui non c'è scambio del capitale. L'importo nozionale viene semplicemente utilizzato per calcolare il pagamento degli interessi. Consentendo agli operatori del mercato di negoziare oggi a un tasso di interesse effettivo in data futura, i FRA consentono loro di coprire la propria esposizione ai tassi di interesse futuri.

Concretamente, **l'acquirente del FRA, che blocca il tasso debitore, sarà protetto da un aumento dei tassi di interesse** e il venditore, che ottiene un tasso di prestito fisso, sarà protetto da una caduta dei tassi di interesse. Se i tassi di interesse non diminuiscono né aumentano, nessuno ne trarrà beneficio. Per tale motivo il venditore di un FRA è tipicamente un soggetto che si attende (o che teme) un futuro ribasso dei tassi di interesse, viceversa **il compratore di un FRA è colui che si attende (o che teme) un aumento dei tassi**. Il FRA, come tutti i derivati, può essere utilizzato per finalità di copertura, speculazione e arbitraggio.

Il FRA è un contratto derivato, non standardizzato, scambiato sui mercati OTC (over the counter), tramite negoziazioni bilaterali; non è negoziato sui mercati regolamentati.

La vita di un FRA è composta da due periodi di tempo: il "periodo di attesa" (*waiting period o grace period*) e il periodo del contratto. Il periodo di attesa è il periodo fino all'inizio del prestito nozionale e può durare fino a 12 mesi, sebbene le durate fino a 6 mesi siano le più comuni. La durata del contratto copre la durata del prestito nozionale e anche questa può durare fino a 12 mesi.



Il FRA è un contratto derivato, non standardizzato, scambiato sui mercati OTC (over the counter), tramite negoziazioni bilaterali; non è negoziato sui mercati regolamentati.

[2] Il cotenuto di questo paragrafo è preso quasi integralmente da [5] .

5.1 Calcolo

Dati:

(Nb. Tutte le date sono espresse cme frazioni dell'anno, dove quest'ultimo sarà espresso in mesi o in numero di giorni a seconda delle convenzioni. Per semplicità esprimiamo le date in (numero di mesi) /(12 mesi)).

Attenzione r_{FRA} è il tasso che "crea" il contratto. Tale tasso è un tasso forward valido dalla data t_1 alla data t_2.

- $t_0 = data$ di acquisto (trade date), spot date (nel grafico d_1),
- $t_1 = data$ di inizio del contratto forward, settlement date (nel grafico d_3),
- $t_2 = data$ di fine del periodo concordato, maturity date (nel grafico d_4),
- $f_{t=0}(t_1) = r_{FRA} = r_K(Hull) =$ tasso forward FISSO, quotato in data $t = 0$, per la data t_1,
- $r(t) = r_{SET} = tasso$ Euribor (o Libor) variabile corrente in data t_1,
- $N =$ Capitale Nozionale.

Contratto:

Il borrower (Payer) (colui che prende a prestito al tasso forward concordato) "compra" il Nozionale per il periodo $(t_2 - t_1)$ al tasso r_{FRA} forward quotato in data $t = 0$.

In data $t = 1$,

- il borrower (payer) paga la somma $N \cdot r_{FRA} \cdot (t_2 - t_1)$,
- ma tale somma, a scadenza, varra per lui $N \cdot r_{SET}(t_1) \cdot (t_2 - t_1)$, dove il tasso $r_{SET}(t_1)$ è il tasso variabile corrente sul mercato in data t_1 e sconosciuto in data t_0 quando si sottoscrve il contratto,
- pertanto il valore del "forward rate agreement" per il Payer è pari alla differenza $(r_{SET}(t_1) - r_{FRA})$ alla data di scadenza (t_2 =maturity date) , scontata alla data t_1.

$$S^* = N\frac{(r_{SET}(t_1) - r_{FRA})(t_2 - t_1)}{1 + r_{SET}(t_2 - t_1)}$$

* NB. Questo valore è diverso dagli esempi su Hull (2018), perché li viene considerato lo swap come un portafoglio di FRAs, e l'operazione di sconto avviene con il tasso a capitalizzazione "continua".

5.2 Differenza tra FRA e Futures [3]

Come veicolo di hedging, le FRA sono simili ai futures su tassi di interesse a breve termine (STIRs). Ci sono tuttavia alcune differenze che li distinguono.

1. I FRA non sono quotati in Borsa, ma OTC.

[3] [5]

2. Sebbene i FRA abbiano regole piuttosto standardizzate, non sono completamente standardizzate come i contratti a termine.

3. Quando si stipula un FRA, entrambe le parti del contratto hanno un'esposizione al rischio di credito, poiché si affrontano direttamente. I futures, invece, non sono esposti al rischio di credito, perché sono negoziati attraverso la Borsa.

4. I FRA hanno il vantaggio di poter essere scambiati per qualsiasi data di scadenza. I futures, negoziati in borsa, maturano solo in date specifiche ogni anno.

5. L'acquirente di FRA (borrower, payer) beneficia dell'aumento dei tassi di interesse (perché paga in termini di tasso), mentre l'acquirente di un contratto futures beneficia della riduzione dei tassi di interesse (perché ottiene il valore del titolo, il quale sale se r scende). Ciò è dovuto al fatto che i due contratti hanno sottostanti diversi.

6. Il FRA è settled in data t_1 all'inizio del periodo del contratto. Il contratto futures alla fine del periodo, in t_2.

Mentre il sottostante di un FRA è un tasso di interesse, il sottostante di un contratto futures è uno strumento di tasso di interesse (obbligazione) il quale aumenta di valore quando i tassi di interesse diminuiscono.

Dunque:

	r scende		**r sale**	
	FRA	**Future**	**FRA**	**Future**
Acquirente di FRA	Perde	Guadagna	Guadagna	Perde
Venditore di FRA	Guadagna	Perde	Perde	Guadagna

5.3 Differenze tra FRA e Swaps

Uno swap può essere considerato come un portafoglio di FRAs.

Per questa ragione può essere valutato assumendo che i tassi forward si realizzino.

La procedura è la seguente:

1. Usare la curva zero coupon dei tassi Libor/swap, per calcolare i tassi forward per ognuno dei tassi Euribor che determinano i flussi di cassa (FC) dello swap.

2. Calcolare i FC nell'ipotesi che i tassi Euribor siano uguali ai tassi forward.

3. Scontare i FC dello swap usando la curva zero coupon Libor/swap zero curve e si ottiene il valore dello swap.

Vedere il file Excel che svolge l'esercizio di Hull (2018) qui sotto.

Esempio 1 *Hull (2018) Es. 7.3. pp. 189-90. Nei termini dello Swap:*

- *una banca ha accettato di ricevere 6M-Libor e pagare 3% annuale (con capitalizzazione semestrale (m=2)) su un capitale nozionale di 100 mil USD.*
- *Lo swap ha vita residua 1.25 anni.*
- *Il tasso Libor con capitalizzazione continua per 3M, 9M, 15M (M = mesi) sono* $2.8\%, 3.2\%$*, e* 3.4%.
- *6M Libor del primo pagamento è del 2.9% (con capitalizzazione semestrale).*

L'esercizio è svolto nelle Tabelle di Hull (2018) n. 7.5 e 7.6.

References

[1] Cuthbertson, K., Nitzsche, D., & O'Sullivan, N. (2020) Derivatives, Wiley.

[2] Hull, J. (2018). Options, futures and other derivatives, Prentice Hall. (Ed italiana a cura di E. Barone).

[3] Kosowski, R.L., Neftci, S.N. (2014) Principles of Financial Engineering, Academic Press.

[4] Borsa Italiana, https://www.borsaitaliana.it/borsa/glossario/forward-rate-agreement.html.

[5] Iota Finance, https://www.iotafinance.com/en/Article-Forward-rate-agreements-FRAs.html.

Opzioni

Maria-Augusta Miceli
Dipartimento di Economia e Diritto
Università di Roma "La Sapienza"

Lezioni di "Pricing"

May 11, 2021

1 Premesse

Definizione 1 ***Derivato*** = *strumento finanziario il cui valore "deriva" dal valore dell'attività sottostante, dove il sottostante è uno strumentogeneralmete quotato (azione, obbligazione, future), ma può anche non essere finanziario (Materie Prime, scommesse).*

Oltre alle Borse, in cui gli strumenti quotati sono standardizzati, i derivati possono essere scambiati

Definizione 2 *"OTC = Over the counter" = Mercato degli scambi one-to-one dove il contratto va definito volta per volta ed è quindi più dettagliato, ma meno liquido, ed implica rischio di credito.*

Definizione 3 *Categorie di Operatori.*

- **Hedgers.** Per trasformare uno scambio a prezzo incerto, in uno con maggiore certezza. Ridurre il rischio.
- **Speculatori.** Voglio assumere il rischio che gli hedgers vogliono evitare.
- **Arbitraggisti.** Assumono posizioni di arbitraggio su più mercati per assicurarsi profitti senza rischio.

2 Opzioni

Definizione 4 ***Opzione Call*** = *diritto a comprare un'unità dell'asset sottostante S entro una certa data T e ad un certo prezzo di esercizio X.*

Definition 1
- *per una call* ***Europea*** *call, c, l'esercizio dell'opzione deve avvenire alla data T,*
- *per una call* ***American*** *call, C, l'esercizio può avvenire ad una qualunque data $t \leq T$,*
- *Il* ***valore intrinseco di una call,*** *ovvero il payoff in data corrente t è $\max\{(S(t) - X), 0\}$.*
- *Il prezzo di una* ***Call Americana***, *C è*

$$C(S, t, X, T) > \max\{(S(t) - Xe^{-r(T-t)}), 0\}$$

la diseguaglianza stretta deriva dal fatto che, poiché è possibile esercitare il diritto oggi $t \in (t_0, T)$ ed ottenere $\max\{(S(t) - X), 0\}$, il prezzo deve dare un incentivo ad andare avanti, altrimenti la call avrebbe valore nullo.

- *Per il* ***prezzo di una Call Europea*** *c, il limite inferiore vale*

$$c(S,t,X,T) \geq \max\{(S(t) - Xe^{-r(T-t)}), 0\}$$

ovvero vale la diseguaglianza debole, perché, poiché si è vincolati ad esercitare solo a scadenza T, quindi il prezzo può essere uguale al payoff corrente.

Definizione 5 ***Opzione Put*** *è il* diritto a vendere *l'attività sottostante S, entro una certa data T e ad un certo prezzo di esercizio K.*

Definition 2
- *per una* ***put Europea****, p, l'esercizio dell'opzione deve avvenire alla data T,*
- *per una put* ***American****, P, l'esercizio può avvenire ad una qualunque data $t \leq T$,*
- *Il* ***valore intrinseco di una put,*** *ovvero il payoff in data corrente t è $\max\{(X - S(t)), 0\}$.*
- *il* ***prezzo di una put Americana****, P è*

$$P(S,t,X,T) > \max\{(Xe^{-r(T-t)} - S(t)), 0\}$$

anche qui, la diseguaglianza stretta deriva dal fatto che, poiché è possibile esercitare il diritto oggi $t \in (t_0, T)$ ed ottenere $\max\{(X - S(t)), 0\}$, il prezzo deve dare un incentivo ad andare avanti, altrimenti la call avrebbe valore nullo.

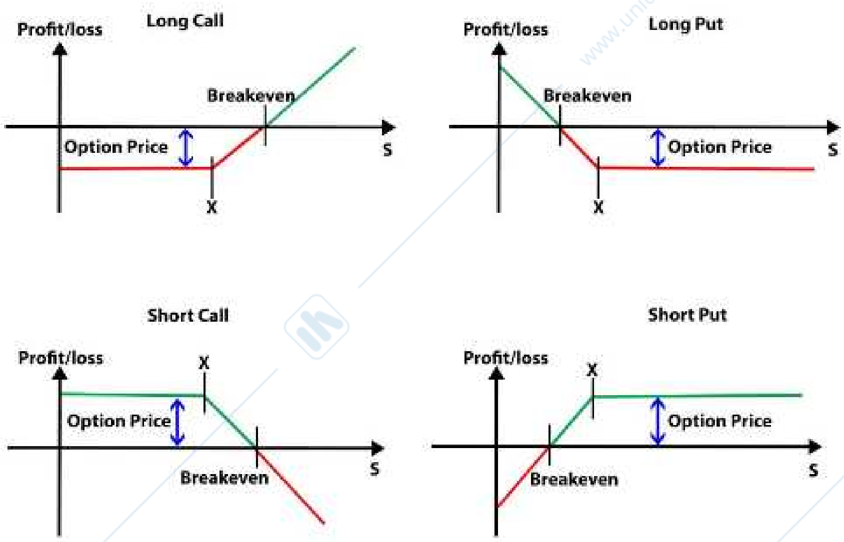
- Per il **prezzo di una Put Europea**, il limite inferiore del prezzo è

$$p(S,t,X,T) \geq \max\{(Xe^{-r(T-t)} - S), 0\}$$

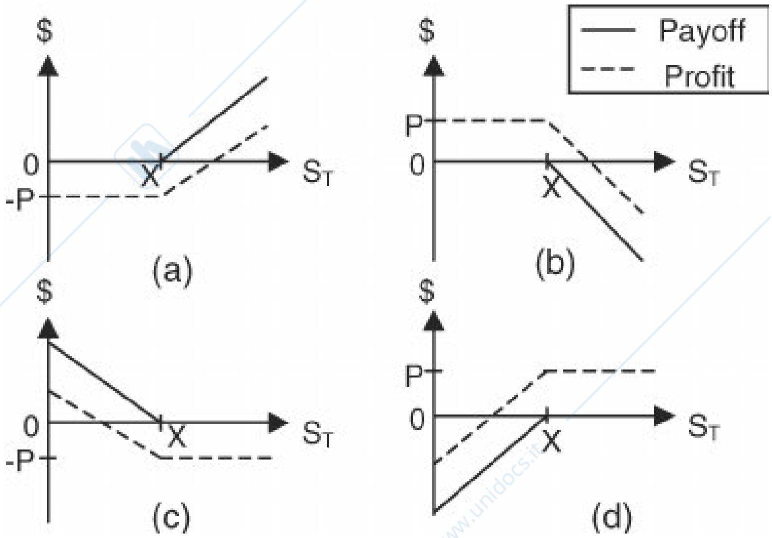
ovvero vale la diseguaglianza debole, perché, poiché si è vincolati ad esercitare solo a scadenza T, quindi il prezzo può essere uguale al payoff corrente.

osservazione 1 *Una regola generale per i prezzi delle opzioni è che, se sono uguali ai payoff, è meglio venderle ed ottenere il payoff.. Affinché l'opzione resti valida è necessario un prezzo strettamente superiore al relativo payoff.*

osservazione 2 *Per le opzioni europee, poiché non possono essere esercitate immediatamente, il prezzo può raggiungere l'attuale payoff come limite inferiore poiché l'arbitraggio non può essere sfruttato.*



Le figure successive mettono in evidenza la differenza fra il payoff e il profitto netto che è pari al payoff meno il costo dell'opzione. Nelle figure P o -P sulle ordinate indica il prezzo iniziale della Call o della Put.



A questo punto fate gli esercizi del Compito 9!

3 Strategie con Opzioni[1] : Portafoglio con Azioni e Opzioni

3.1 Put protettiva

Costruire la **Put protettiva** acquistando il seguente portafoglio (X = prezzo d'esercizio)

- Comprare Azione al prezzo $S_0 = 100$,
- Comprare Put con payoff $P(T) = \max[X - S_T, 0]$, dove $X = S_0$ e costo $P(0) = 5\%X$.

1. Costruire il portafoglio $\pi(t = 0)$.

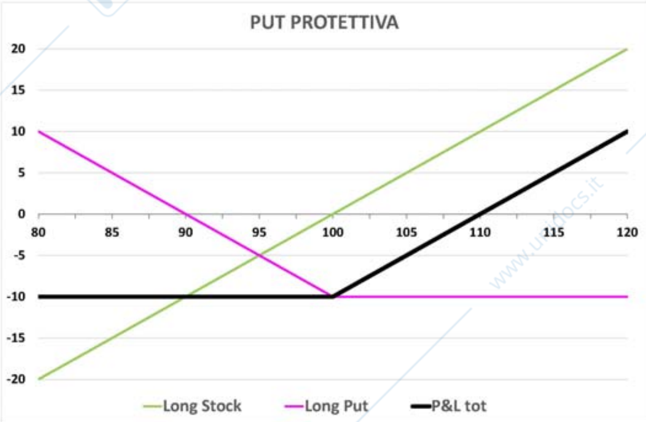
$$\pi(t = 0) = -S_0 - P_0[S, X, T]$$

1. Costruire il portafoglio $\pi(t = T)$

$$\pi(t = T) = \begin{cases} S_T + X - S_T = X & per \quad S_T < X \\ S_T + 0 & per \quad S_T = X \\ S_T + 0 & per \quad S_T > X \end{cases}$$

2. Costruire il portafoglio netto $\pi(t = 0) + \pi(t = T)$, supponendo $S_0 = 100, P_0 = 10$

$$\pi(t = T) = \begin{cases} -S(0) - P + S_T + X - S_T = -100 - 10 + 100 & per \quad S_T < X \\ S_T + 0 & per \quad S_T = X \\ S_T + 0 & per \quad S_T > X \end{cases}$$



[1] [1, Ch. 15.], [4, Ch. 12.], [2, Cap. 15.]

3.2 Bull Spread

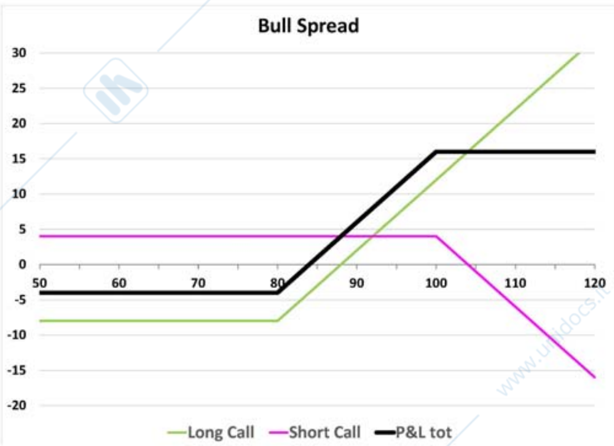
Costruiamo un **Bull Spread** formando il seguente portafoglio:

1. (a) Comprare Call con payoff $\max[S - X_1, 0]$, dove $X_1 = 100$ e costo $C(0) = 5\%X$.
   (b) Vendere una Call con $X_2 > X_1$, dove $X_2 = 120$ e costo $C(t = 0) = 5\%X_2$.
   (c) Costruire il portafoglio $\pi(t = 0)$.
   (d) Costruire il portafoglio $\pi(T = 0)$

$$\pi(t = T) = \begin{cases} \ldots & per \quad S_T < X_1 \\ \ldots & per \quad S_T = X_1 \\ \ldots & per \quad X_1 < S_T < X_2 \\ \ldots & per \quad S_T = X_2 \\ .. & per \quad S_T > X_2 \end{cases}$$

   Disegnare il payoff per $t = T$ avendo sull'asse delle ascisse $S_T = (0, ..., 200)$ e sull'asse delle ordinate il payoff di ogni componente a. b. d.

   (e) Il payoff creato dà maggiore o minore possibilità di guadagno per $S_T > X_2$?
   (f) Questo portafoglio costa di più o di meno del precedente?
   (g) Conclusioni?



3.3 Condizioni di Non-Arbitraggio

Ipotesi:

- unico risk-free rate, r;
- capitalizzazione continua, e^{-rt}.

Proposizione 1 *Data un'opzione americana $C[S_0, X, T]$ su uno stock che non paga dividendi. Allora è sempre ottimo esercitare l'opzione in T, oppure venderla senza esercitarla in $t < T$.*

Proof. Consideriamo i payoffs in $t = 0, t, T$

$$\pi(t=0) = -C[S_0, X, T]$$

$$\pi(t=t) = \begin{cases} 0 & per \quad S_t < X \\ 0 & per \quad S_t = X \\ S_t - X > 0 & per \quad S_t > X \end{cases}$$

Ma, in $t = t$, l'opzione è ancora quotata e il suo valore è il valore presente del payoff a scadenza, ed è maggiore del valore di esercizio $S_t - X$. Per questo in caso di necessità di liquidare la posizione in $t < T$ è meglio vendere C_t piuttosto che esercitare ottenendo $\pi(t=t)$.

$$C[S_t, X, t] = \max[S_t - X\exp(-rT), 0] > S_t - X$$

$$\pi(t=T) = \begin{cases} 0 & per \quad S_T < X \\ 0 & per \quad S_T = X \\ S_T - X > 0 & per \quad S_T > X \end{cases}$$

■

Proposizione 2 *[Put-Call Parity] La* ***Put-Call Parity*** *è l'equazione di prezzo che soddisfa la condizione di non arbitraggio fra queste grandezze.* Stabilisce che la differenza tra il prezzo di una call e di una put è uguale alla differenza tra il prezzo attuale del sottostante ed il valore attuale dello strike price
Ct-Pt= St -KV(t,t)

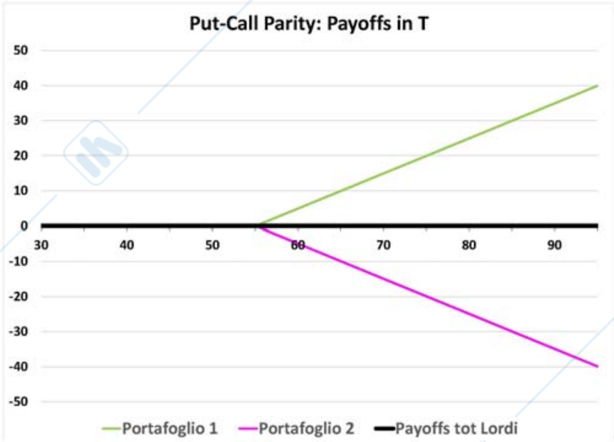
$$c_0 + X\exp(-rT) = p_0 + S_0$$

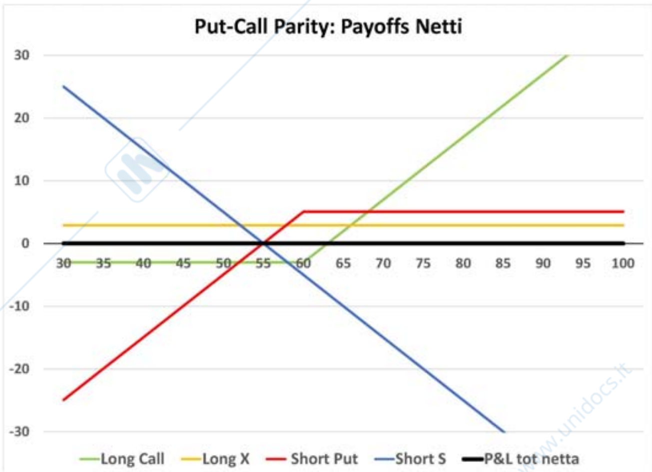
Proof. Costruire i seguenti portafogli in $t = 0$:

1. Portafoglio 1:
   (a) Acquisto c_0 = prezzo Call europea $[S_0, X, T]$,
   (b) Prendere in prestito la somma $X\exp(-rT)$
2. Portafoglio 2:
   (a) Vendita p_0 = prezzo put europea $[S_0, X, T]$,
   (b) Vendita di 1 azione di prezzo S_0.

- Costruire i payoffs dei due portafogli in $t = 0$ ed in $t = T$.
- Poiché i payoffs in T sono identici per qualunque valore di $S_T \Longrightarrow$ i prezzi in $t = 0$ devono essere uguali.

■





Corollario 1 *Data questa relazione (1 equazione), date 3 grandezze posso determinare la quarta. Per es. dati* c_0, S_0, X, *posso determinare il prezzo della put. Etc.*

4 Trading Strategies

Esercizio 1 *Per ogni trading strategy, esercitarsi a*

1. *calcolare i payoffs in* $t = 0$ *ed in* T *per* $S_T \gtreqless X$;
2. *disegnare i payoffs al netto dei costi delle componenti e poi della somma di esse per le diverse trading strategie;*

3. *evidenziare qual'è il segmento di valore di S_0 che fa crescere il rendimento della strategie e se da un rendimento lineare, crescente o decrescente in S_T;*

4. *mettere in relazione il costo della strategia e il rendimento. Se possibile capire il rendimento netto;*

5. *mettere in relazione il costo della strategia e la protezione del portafoglio.*

4.1 Involving 1 option and a stock

Convention $X_1 < X_2, T_1 < T_2$.

From the put-call parity relationship it follows that the payoffs on the RHS and on the LHS are equal.

1. **Covered call**
   $S - C = -P$

2. **Inverse of a Covered call**
   $-S + C = P$

3. **Protective put**
   $P + S = C$

4. **Reverse of Protective put**
   $-P - S = -C$

4.2 Spreads

1. **Bull spreads**
   E' costituito dalla stessa tipologia di opzioni, entrambe call o put, con prezzi di esercizio diversi. La caratteristica sta nel fatto di comprare quella con il valore X più basso, che è anche la più economica, e di vendere la più onerosa
   Compra $(X_1\ ,)$Vendi $X(C_2)$
   La speranza è che S_t aumenti.
   Aim: limits both the investor's upside potential and his or her downside risk

2. **Bear spreads**
   Vendi $(X_1\ ,)$Compra $X(C_2.)$
   Aim: La speranza è che S crolli.
   Initial inflow. (Copy remarks from problem set).

3. **Butterfly spreads**
   $-X(C_1X(C-)_3) + 2X(C_2)$
   Aim: Profitto se S rimane vicina a X_2, but only small loss if there is significant stock price move in either directions: conservative strategy. Appropriate if the investor thinks that large movements are unlikely.
   Small initial investment.

4. **Calendar spreads**
   $+C(X, T_1) - C(X, T_2)$
   The longer the maturity, the more expensive the options are. Therefore, initial investment required.
   Aim: Profit pattern similar to butterfly spread: see above.

5. **Neutral calendar spreads**
   $+C(X, T_1) - C(X, T_2)$
   If $X \approx S$.
6. **Bullish calendar spreads**
   $+C(X, T_1) - C(X, T_2)$
   If $X > S$.
7. **Bearish calendar spreads**
   $+C(X, T_1) - C(X, T_2)$
   If $X < S$.
8. **Bearish calendar spreads**
   $-C(X, T_1) + C(X, T_2)$
   Small initial profit.
9. **Diagonal spreads**
   $-C(X_i, T_i) + C(X_i, T_j), \forall i, j$

4.3 Combinations

1. **Straddle**
   (Bottom or Straddle Purchase)
   $-C(X, T) - P(X, T)$
   If $S \approx X$ there is loss. However if there is sufficient move in either directions there is significant profit. Appropriate when large moves of S are expected.
2. **Top Straddle or straddle write**
   $+C(X, T) + P(X, T)$
   If $S \approx X$ there is gain.. However if there is sufficient move in either directions there is significant loss. Appropriate when small moves of S are expected.
3. **Strip**
   $+C(X, T) + 2P(X, T)$
4. **Strap**
   $+C(X, T) + 2P(X, T)$
   If $S \approx X$ there is gain.. However if there is sufficient move in either directions there is significant loss. Appropriate when small moves of S are expected.
5. **Strangle (or Bottom vertical combinations)**
   $+C(X, T) + 2P(X, T)$
   When a large S move is expected, but it is uncertain whether it will be an increase or a decrease.
6. **Strangle Sale (or Top vertical combinations)**
   $-C(X, T) - 2P(X, T)$
   When a large S move are unlikely. Very dangerous since the *investor's potential loss is unlimited.*

5 Albero Binomiale (Hull 9th ed. Cap.13)

Argomenti:

1. Pricing secondo la No-Arbitrage Condition (NAC).
2. Pricing secondo la procedura numerica dell'albero binomiale.
3. Pricing secondo la procedura Risk_Neutral

5.0.1 Esempio

- $t_0 = 0, T = 3/12$.
- $r_f = 12\%$
- Prezzo d'esercizio $K = 21$.
- $S_0 = 20$
- $u = (1 + 10\%) = 1,1, \quad S_T = S_0 \cdot u = 20 \cdot (1 + 0.1) = 22$
- $d = (1 - 10\%) = 0,9, \quad S_T = S_0 \cdot d = 20 \cdot (1 - 0.1) = 18.0$

$$S_T = \begin{cases} S_{up} = u \cdot S_0 = & (1 + 0.1) \cdot 20 = & 22 \\ S_{down} = d \cdot S_0 = & (1 - 0.1) \cdot 20 = & 18 \end{cases}$$

- Valore della Call a scadenza $T = C(T) =$

$$C_T = \max[S_T - K; 0] = \max[S_T - 21; 0] = \begin{cases} 22 - 21 = 1 & \text{se } S_T = 22 \\ 0 & \text{se } S_T = 18 \end{cases}$$

- Prezzo Call in t=0, ovvero $c(0)$?

5.1 I. Pricing call by No-Arbitrage Condition

Costruiamo un portafoglio hedged, senza rischio, costituito da:

- Vendo una call
- (Compro) POSSIEDO un numero Δ (delta) incognito di azioni sottostanti la call.

$$\pi(t = 0) = -\Delta S_0 + 1 \cdot c(0)$$

$$\begin{aligned} \pi(T = 3/12) &= S_T\Delta - 1 \cdot \max[S_T - K; 0] \\ &= \begin{cases} 22\Delta - 1 & \text{se } S_T = 22 \\ 18\Delta - 0 & \text{se } S_T = 18 \end{cases} \end{aligned}$$

- Calcolo Δ tale che i due payoffs in T siano uguali

$$\Delta \cdot 22 - 1 = \Delta \cdot 18$$

da cui

$$\Delta^* = \frac{1}{4}$$

e quindi il valore dei due portafogli a scadenza sarà

$$\frac{1}{4} \cdot 22 - 1 = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4.5$$

- Siccome è un portafoglio senza rischio, deve essere una realizzazione del valore del portafoglio in data d'acquisto (corrente), capitalizzata al tasso risk-free r_f, nota bene, in ognuno dei due stati di natura. Quindi devo ottenere

$$-\pi\,(t=0)\cdot e^{r_f(T-t_0)} = \pi\,(t=T,\forall s) \tag{1}$$

o, analogamente, devo poter scontare il portafoglio finale.

$$\pi\,(t=0) = \pi\,(t=T,\forall s)\,e^{-r_f(T-t_0)} \tag{2}$$

L' eguaglianza in valore futuro o l'eguaglianza in valore presente risolvono il prezzo incognito dell'opzione $c\,(0)$

$$4.5\cdot e^{-0.12\left(\frac{3}{12}\right)} = 4.367$$

Ovvero $c\,(0)$ è tale che

$$\frac{1}{4}20 - 1\cdot c = 4.367$$
$$c\,(0) = 0.633$$

N.B. Il segno del portafoglio $\pi\,(t=0)$ è opposto al criterio contabile. Perché? Perché sta stimando il "valore" del portafoglio e non il "costo" del portafoglio. E' come se fosse $\pi\,(t=0+1ora)$

- Implicazioni: **Implied Rate**

$$\begin{cases} \text{se } c\,(0) > 0.633 & \Rightarrow 0.25\cdot 20 - 1\cdot c < 4.367 \Rightarrow \widehat{r} > r_f \\ \text{se } c\,(0) < 0.633 & \Rightarrow 0.25\cdot 20 - 1\cdot c > 4.367 \Rightarrow \widehat{r} < r_f \end{cases}$$

5.2 Procedura

1. Immunizzare il portafoglio a scadenza eguagliando i due payoff futuri mediante il "delta hedging". Ovvero eguaglio

$$\begin{aligned} \pi(t+1,up) &= \pi(t+1,down) \\ &\Longrightarrow \Delta^* \end{aligned}$$

Lo inserisco nei payoffs e trovo il loro valore:4.5 euro, $\forall$ stato di natura.

2. Per il No-Arbitrage, impongo

$$\pi(t) = \pi(t+1,s)\exp\left(-r_f\,(t+1-t)\right)$$

e trovo come incognita il prezzo della call c

$$S_0\Delta - c = \pi(t+1,s)\exp\left(r_f\,(t+1-t)\right)$$

5.3 Generalizzazione

Dati:

- $S_0; u; d;$
- $-\pi\,(0) = \Delta\cdot S_0 - c\,(0)$
- $\pi\,(T) = \Delta\cdot S_0 u - c_u\,(T) = \Delta\cdot S_0 d - c_d\,(T)$

- Δ tale che
$$\Delta \cdot S_0 u - c_u(T) = \Delta \cdot S_0 d - c_d(T)$$
da cui
$$\Delta = \frac{c_u(T) - c_d(T)}{S_0 u - S_0 d}$$

- Eguagliando il valore del portafoglio in data corrente a uno qualunque dei portafogli in data futura (sono uguali grazie a Δ!)
$$\Delta \cdot S_0 - c(0) = [\Delta \cdot S_0 u - c_u(T)] \cdot e^{-r_f(T-0)}$$
da cui, risolvo per $c(0)$
$$c(0) = \Delta \cdot S_0 \left(1 - u \cdot e^{-r_f(T-0)}\right) + c_u(T) \cdot e^{-r_f(T-0)}$$
sostituendo il valore di Δ
$$\begin{aligned} c(0) &= \frac{c_u(T) - c_d(T)}{S_0 u - S_0 d} \cdot S_0 \left(1 - u \cdot e^{-r_f(T-0)}\right) + c_u(T) \cdot e^{-r_f(T-0)} \\ &= \frac{c_u - c_d}{u - d} \cdot \left(e^{r_f(T-0)} - u\right) + c_u \frac{(u-d)}{u-d} \\ &= \frac{(c_u - c_d)\left(e^{r_f(T-0)} - u\right) + c_u(u-d)}{(u-d)} \\ &= \frac{\left(e^{Tr_f} - d\right) c_u + \left(u - e^{Tr_f}\right) c_d}{(u-d)} \end{aligned}$$
oppure
$$c(0) = e^{-r_f(T-0)} [p c_u + (1-p) c_d] \tag{3}$$
dove
$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r_f(T-0)} - d}{u-d} \\ (1-p) &= 1 - \frac{e^{r_f(T-0)} - d}{u-d} = \frac{e^{r_f(T-0)} - d}{u-d} \end{aligned} \tag{4}$$

Le due equazioni sopra permettono di prezzare un'opzione restando indietro di un periodo nell'albero binomiale, ovvero con il metodo recursivo / a ritroso (backwards).

Esempio sopra:

Esercizio 2 *Dati esempio sopra:* $K = 21; S_0 = 20; u = (1 + 10\%) = 1.1, \quad Su = 22; \ d = (1 - 10\%) = 0.9$, $Sd = 18; \ r_f = 12\%$

La probabilità degli stati di natura
$$p = \frac{\exp(0.12 \cdot (3/12)) - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$
e il prezzo della call è pari al valore presente scontato delle due call successive sopra
$$c(0) = \exp(-0.12 \cdot (3/12)) \cdot (0.6523 \cdot 1 + (1 - .6523) \cdot 0) = 0.633$$

5.4 II. Risk-Neutral

Le probabilità "Risk-Neutral" possono essere calcolate anche con questo altro ragionamento.

Ipotesi.

1. Il rendimento atteso (medio con probabilità che sommano ad 1 su quella data) su tutte le attività finanziarie è pari al r_f.
2. Il tasso di sconto a cui scontare il valore atteso dei rendimenti futuri è il r_f.

Le (3) e (4) ci dicono che

$$\begin{aligned} E(S_T) &= pS_0u + (1-p)S_0d \\ &= p \cdot 22 + (1-p)18 \end{aligned}$$

e

$$E(S_T) = S_0 e^{r_f(T-0)}$$

Cosi, molto più facilmente, dato r_f, si può ricavare p tale che

$$22p + 18(1-p) = 20 \cdot e^{r_f(T-0)}$$

ovvero

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0 e^{r_f T}$$

da cui

$$p = \frac{e^{-r_f(T-0)} - d}{u-d}$$

6 Albero Binomiale con 2 steps

- Dati CALL: $K = 21; S_0 = 20; u = (1+10\%) = 1.1, \quad Su = 22; \ d = (1-10\%) = 0.9, \quad Sd = 18; r_f = 12\%; T = 6/12.$
- $$p = \frac{e^{-r_f(T-0)} - d}{u-d} = 0.6523$$

$$\begin{pmatrix} u\backslash t & & \\ & & S_{u,u} \\ & S_u & S_{u,d} \\ S_0 & S_d & S_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\backslash t & & \\ & & 24.2 \\ & 22 & 19.8 \\ 20 & 18 & 16.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u\backslash t & & \\ & & 3.2 \\ & 2.0257 & 0 \\ 1.2823 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S_u = S_0 \cdot u = S_0 \cdot (1+0.1) = 20 \cdot (1+0.1) = 22.0$
Chiamiamo le opzioni

$$c_0; \ c_u, \ c_d; \ c_{u,u}; \ c_{u,d}; \ c_{d,d}$$

- Valore opzioni in $T = 6M = payoff$
- Valore opzioni in $T - 1 = 3M$

$$\begin{aligned} c_u &= \frac{e^{-r_f(3/12)}\left[pc_{u,u} + (1-p)c_{ud}\right]}{u-d} \\ &= \frac{e^{-r_f(T-0)}\left[pc_{u,u} + (1-p)c_{ud}\right]}{1} \\ &= \exp(-0.12 \cdot (3/12)) \cdot (0.6523 \cdot 3.2 + (1-.6523) \cdot 0) \\ &= 2.0257 \end{aligned}$$

$$c_d = 0$$

- Valore opzioni in $T-2=0$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{e^{-r_f(T-0)}\left[pc_u+(1-p)\,c_d\right]}{u-d} \\ &= \exp\left(-0.12\cdot(3/12)\right)\cdot(0.6523\cdot 2.025\,7+(1-.6523)\cdot 0) \\ &= 1.282\,3 \end{aligned} \tag{5}$$

7 Generalizzazione

$$p = \frac{e^{-r_f \cdot dt} - d}{u - d}$$

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right) \qquad \text{e} \qquad d = \exp\left(-\sigma\sqrt{\Delta t}\right)$$

quindi

$$pu + (1-p)\,d = \exp(\mu \cdot \Delta t)$$
$$c_0 = e^{-r_f \cdot (dt)}\left[pc_u + (1-p)\,c_d\right]$$

Andando a ritroso

$$c_u = e^{-r_f dt}\left[pc_{u,u} + (1-p)\,c_{ud}\right]$$
$$c_d = e^{-r_f dt}\left[pc_{u,d} + (1-p)\,c_{dd}\right]$$

sostutuendole in c_0

$$c_0(T) = e^{-r_f 2 \cdot dt}\left[p^2 c_{u,u} + 2p\,(1-p)\,c_{u,d} + (1-p)^2\,c_{dd}\right] \tag{6}$$

Passaggi

$$c_0 = e^{-r_f \cdot (dt)}\left[p\left(e^{-r_f dt}\left[pc_{u,u} + (1-p)\,c_{u,d}\right]\right) + (1-p)\left(e^{-r_f dt}\left[pc_{u,d} + (1-p)\,c_{dd}\right]\right)\right]$$

poiché $c_{u,d} = c_{d,u}$

$$\begin{aligned} &= e^{-2 \cdot r_f \cdot (dt)}\left[p\left(\left(pc_{u,u} + (1-p)\,c_{u,d}\right)\right) + (1-p)\left(\left(pc_{u,d} + (1-p)\,c_{dd}\right)\right)\right] \\ &= e^{-2 \cdot r_f \cdot (dt)}\left[p^2 c_{u,u} + 2p\,(1-p)\,c_{u,d} + (1-p)^2\,c_{d,d}\right] \end{aligned}$$

Cosa sono i $c_{u,u}, c_{u,d}, c_{d,d}$? Sono i payoffs finali. Formalmente

$$c_0 = e^{-2 \cdot r_f \cdot (dt)} \sum_{j=0}^{n} (...)\, p^{n-j}\,(1-p)^j\, c\left(u^n d^{n-j}\right)$$
$$c_0 = e^{-2 \cdot r_f \cdot (dt)} \sum_{j=0}^{n} (...)\, p^{n-j}\,(1-p)^j \cdot \max\left[Su^n d^{n-j} - K; 0\right] \tag{7}$$

Osservazioni

1. Esponente: $2 \cdot dt = (T - t_0)$

2. Quanti sentieri (path) conducono allo stesso payoff finale? Ovvero quanti eventi (...) uguali ci sono? Coefficiente bnomiale: Triangolo di Tartaglia

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$$

Es.

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!}$$
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

3. Cerchiamo il valore c_0.

$$Su^n d^{n-j} > K$$

linearizziamo

$$\ln S + j \ln u + (n-j)\ln d > \ln K$$

risolviamo per j

$$\ln \frac{S_0}{K} > -j \ln u - (n-j) \ln d$$

sostituendo

$$\begin{aligned} u &= \exp\left(\sigma\sqrt{T/n}\right) \\ d &= \exp\left(-\sigma\sqrt{T/n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{S_0}{K} &> -j\left(\sigma\sqrt{T/n}\right) - (n-j)\left(-\sigma\sqrt{T/n}\right) \\ &= \left(-2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\right) j + n\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \end{aligned}$$

quindi

$$j > \underbrace{\frac{n}{2} - \frac{\ln\left(S_0/K\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}_{\alpha}$$

dove chiamiamo il termine di destra α.

Quindi la (7) viene riscritta, in cui la sommatoria comincia da $j > \alpha$.

$$c_0 = e^{-2 \cdot r_f \cdot (dt)} \sum_{j>\alpha}^{n} \binom{n}{j} p^j \left(1-p\right)^{n-j} \cdot \max\left[S u^j d^{n-j} - K; 0\right]$$

e viene spezzata nella parte che moltiplica e spiega la capitalizzazione di S_0

$$U_1 = \sum_{j>\alpha}^{n} \binom{n}{j} \underbrace{p^j \left(1-p\right)^{n-j}}_{q_j^*(n)} \cdot u^j d^{n-j}$$

e la parte che moltiplica il prezzo d'esercizio K che è una costante

$$U_2 = \sum_{j>\alpha}^{n} \binom{n}{j} \underbrace{p^j \left(1-p\right)^{n-j}}_{q_j^*(n)}$$

cosicché

$$c_0 = \exp\left(-r \cdot (T - t_0)\right)\left(U_1 S_0 - U_2 \cdot K\right)$$

Definizione 6 *Le probabilità Risk-Neutral cumulate $q_j^*(n)$ esprimono la probabilità del nodo j, nella data n. E infatti la loro somma, ponderata con i coefficienti binomiali è pari ad 1.*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \underbrace{p^j \left(1-p\right)^{n-j}}_{q_j^*(n)} = 1, \ \textit{per ogni data "n"}$$

Coefficiente Binomiale (Combinazioni semplici - Wikipedia)

Definizione 7 *Combinazioni di n elementi presi a j a j.*

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot (n-j+1)}{j!}$$

- Sono anche i coefficienti del polinomio $(a+b)^n$

Il risultato può essere ottenuto col seguente ragionamento. Immaginiamo di mettere in un sacchetto le $n = 6$ lettere a, b, c, d, e, f ed estraiamo a caso la prima che può essere indifferentemente una delle 6: abbiamo quindi 6 possibilità di estrazione. Ora passiamo ad estrarre la seconda lettera: poiché nel sacchetto ne sono rimaste 5, abbiamo 5 possibilità di estrazione. Passiamo quindi ad estrarre la terza lettera: poiché nel sacchetto ne sono rimaste 4, abbiamo 4 possibilità di estrazione. Infine, reiterando ancora il ragionamento, quando andremo ad estrarre la quarta lettera ne saranno rimaste 3 nel sacchetto e avremo quindi 3 possibilità di estrazione. Se moltiplichiamo tutte le possibilità fra loro, avremo $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ possibili gruppi.

Il valore ottenuto di 360 è, in realtà, il numero delle disposizioni semplici di 6 oggetti di classe 4 nelle quali l'*ordine è rilevante.* Ad esempio, le lettere successivamente estratte potrebbero essere a,b,c,d, ma anche d,c,b,a. Le due sequenze rappresentano la stessa combinazione in quanto differiscono solo nell'ordine ma non negli elementi che le costituiscono. In generale, le quattro lettere a,b,c,d possono presentarsi in 24 modi diversi da considerarsi però equivalenti ai fini delle combinazioni:

Non essendo interessati all'ordine di estrazione, *dobbiamo dividere 360 per il numero delle sequenze che si possono formare con le stesse j=4 lettere*, cioè per il numero delle permutazioni di 4 elementi, dato da 4! = 24. Il risultato finale è:

Generalizzando, se abbiamo n elementi da raggruppare a j a j, dobbiamo effettuare il rapporto sopra (Cnj).

Definizione 8 *Distribuzione Binomiale $B(n, j)$, ha media np e varianza $np(1-p)$.*

Definizione 9

7.1 Intrinsic Value e Time Value

Definizioni

- Esercitare l'opzione = vendere e ottenere il payoff.
- Vendere o comprare l'opzione = venderla o comprarla al valore quotato "senza" esercitarla.

I payoff nella call (per la Put scrivere l'altro payoff) sono definiti

$$c_0 = e^{-2 \cdot r_f \cdot (dt)} \sum_{j=0}^{n} (\ldots) \, p^{n-j} \, (1-p)^j \cdot \max \left[S u^n d^{n-j} - K; 0 \right]$$

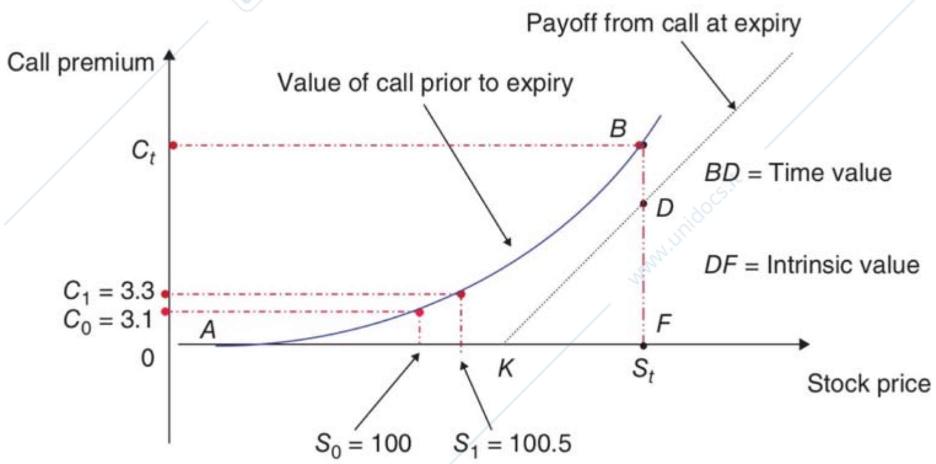
- "IN the money" (ITM), se $Su^n d^{n-j} > K$,
- "AT the money" (ATM), se $Su^n d^{n-j} = K$,
- "OUT of the money" (OTM), se $Su^n d^{n-j} < K$.

Definizione 10 *(IT)* ***Intrinsic Value*** (t_0): *Valore del Payoff sul mercato, SE l'opzione potesse essere esercitata nella data corrente* t_0 *anche se non è la data di emissione!*

$$IV\,(t_0) = \max\left[(S_0 - K)\,; 0\right];$$

Definizione 11 *(TV)* ***Time Value***(t): *Prezzo della call* (t) $-$*Intrinsic value* (t)

$$TV\,(t_0) = c(t_0, s) - IV\,(t_0)$$



8 Opzioni Americane: Early Exercise

Procedura:

1. Costruire l'albero a $n = 3$ date future.

2. Su ogni nodo da $n = 0$ ad $n = T$, scrivere
   (a) il valore del sottostante risultante dalla combinazione di $S_0 u^j d^{(n-j)}$,
   (b) il valore dei payoffs del derivato (call o put), dato il valore del sottostante $S(n,j)$ e il prezzo d'esercizio K.
3. Seguendo la solutìzione recursiva, su tutti i nodi intermedi, ad eccezione quindi dei valori dei payoffs ai nodi finali, calcolare il valore delle opzioni europee (Call o Put) come valore atteso scontato al r_f, dei due valori dell'opzione nei due nodi successivi derivanti dal nodo in questione. In questo modo ottengo i valori delle opzioni europee $f(n,j)$ in ogni nodo intermedio ed anche in quello iniziale.

Pricing Opzione Americana.

L'obiettivo è, in ogni nodo intermedio, valutare (i) se uscire esercitando l'opzione, ovvero ottenendo il payoff, oppore (ii) se "continuare" qualora il valore della call europea sia più alto del payoff. Quindi la valutazione dell'opzione americana in ogni nodo dell'albero è:

1. In tutti i nodi finali della data T: Valori del payoffs.
2. In ogni nodo delle date intermedie (n,j), scelgo il massimo fra: $max\left[(2.b.),(3)\right]$ ovvero
   (a) Valore dell'Uscire (early exit) in una data intermedia t: Payoff dell'opzione (Call o Put) in quel nodo.
   $$\max\left[S_t - K; 0\right],$$
   (b) Valore del continuare, ovvero il valore dell'opzione europea in quel nodo
   $$f = \frac{e^{-r_f(T-0)}\left[pc_u + (1-p)\,c_d\right]}{u-d}$$

Esercizio 3 *Sopra. Ad ogni step si deve decidere se vale di più il payoff o il valore dell'opzione. Rifacciamo il procedimento*

Non ci sono variazioni perché il payoff intermedio non è superiore al prezzo di proseguire.

- Dati CALL: $K = 21; S_0 = 20; u = (1 + 10\%) = 1.1$, $Su = 22$; $d = (1 - 10\%) = 0.9$, $Sd = 18$; $r_f = 12\%; T = 6/12$.

$$p = \frac{e^{-r_f(T-0)} - d}{u-d} = 0.6523$$

$$\begin{pmatrix} S(t) & & & \\ u\backslash t & & & \\ & & & 24.2; \\ & & 22 & 19.8 \\ & 20 & 18 & 16.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & Payoffs & & \\ u\backslash t & & & \\ & & & 3.2 \\ & & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \Pr ezzi & Call & EU \\ u\backslash t & & & \\ & & & 3.2 \\ & & 2.0257 & 0 \\ & 1.2823 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto possiamo valutare la Call US in ogni nodo. I valori sono uguali alla Call EU perché il valore della contiuazione è sempre superiore ai payoffs (Si veda grafico).

$$\begin{pmatrix} & \text{Prezzi} & Call & US \\ u\backslash t & & & \\ & & & 3.2 \\ & & 2.0257 & 0 \\ & 1.2823 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.0.1 Esercizio PUT

- Dati PUT: $K = 52; S_0 = 50; u = (1 + 20\%) = 1.2, \quad Su = 22;\ d = (1 - 20\%) = 0.8, \quad Sd = 18;$ $r_f = 5\%; T = 6/12.$

$$\begin{pmatrix} S(t) & & & \\ u\backslash t & & & \\ & & & 72 \\ & & 60 & 48 \\ & 50 & 40 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & Payoffs & Call \\ u\backslash t & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \text{Pr}ezzi & Call & \\ u\backslash t & & & \\ & & & \\ & & & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9 3t BOPM

9.1 Plain Vanilla Europee

- $Up = u = 1.15;$
- $Down = d = 0.8;$
- $S_0 = 100;$
- $K = 100;$
- $r = 10\% \Longrightarrow R = 1 + r = 1.10, or \Longrightarrow R = \exp\left(r\left(T - t_0\right)\right)$
- $n =$ numero dei time steps
- $$p = \frac{R - D}{U - D} = \frac{1.10 - 0.8}{1.15 - 0.8} = 0.857\,14 \Longrightarrow (1 - p) = 1 - 0.857\,14 = 0.142\,86$$
- $C\left(S\left(3\right) - K, 0\right) = ?$
- $P\left(K - S\left(3\right), 0\right) = ?$

Excel per la parte numerica

$$\begin{aligned} C\left(S\left(3\right) - K, 0\right) &= \underbrace{\frac{1}{R^{t-0}}}_{Sconto} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n}}_{Somma-eventi-diversi} \underbrace{\binom{n}{j}}_{\#eventi-uguali} \cdot \underbrace{p^k\left(1-p\right)^{(t-k)}}_{\mathrm{Pr}\,ob.-Evento} \cdot \underbrace{\max\left(S \cdot u^K \cdot d^{(n-k)} - K, 0\right)}_{payoff-opzione-nell'evento} \\ &= \frac{1}{1.10^3} \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} 0.857\,14^k \cdot 0.142\,86^{(3-k)} \cdot \max\left(100 \cdot 1.15^j \cdot .80^{(n-k)} - 100, 0\right) \end{aligned}$$

$$p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

l'altra p è 1-p

lo scopo dell'albero binomiale è vedere come il prezzo della call o della put varia in base a quello che stai calcolando, come varia in base ad un incremento o un ribasso del prezzo. Up e Down stanno per questo: up, fattore di rialzo quindi di incremento invece Down è il fattore di ribasso in base alle probabilità. P la probabilità sta per la probabilità che il prezzo possa andare in up o in Down

Ito's Lemma e Black-Scholes-Merton (1973)

Maria-Augusta Miceli
Sapienza University of Rome

May 11, 2021

Considerate i paragrafi Moto Browniano e Ito's Lemma come premesse, ma NON necessarie, solo utli come referenze, alla trattazione di BSM.

Andate direttamente al §. 2.

1 Moto Browniano Aritmetico (Facoltativo)

Il processo di Wiener è un'idealizzazione matematica del moto browniano fisico che descrive il movimento di particelle sospese soggette a collisioni da parte di atomi più piccoli in un liquido. Questo fenomeno, studiato per la prima volta dal botanico Robert Brown nel 1827, fu studiato da Einstein, Langevin e altri fisici.

Il processo di Wiener è stato inizialmente definito matematicamente dal matematico del MIT Norbert Wiener e le sue proprietà sono state successivamente studiate in dettaglio da Paul Lévy. Ha la caratteristica interessante che le sue traiettorie sono frattali, poiché sono continue senza essere differenziabili da nessuna parte. La derivata del processo di Wiener (dW) è chiamata "rumore bianco" gaussiano (*random walk* o *white noise*).

Definizione 1 *Un processo stocastico si chiama Moto Browniano con drift (o aritmetico) se soddisfa la seguente equazione differenziale*

$$\begin{aligned} dX &= \mu dt + \sigma dW \\ &= X(t+dt) - X(t) \end{aligned}$$

dove

- dt = unità infinitesima di tempo o tick (1min,, 5 min, 1 ora, 1g, 1 mese etc).
- Processo di Wiener:

$$\begin{aligned} dW &= W(t+dt) - W(t) \\ &= \varepsilon \cdot \sqrt{dt}, \qquad \text{dove } \varepsilon \sim N(0,1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} E(dW) &= 0 \\ Var(dW) &= 1 \cdot dt \\ Dev.St &= \sqrt{dt} \end{aligned}$$

brevemente, il processo di Wiener si distribuisce come una Normale con media e variaza seguenti.

$$dW \sim N(0, dt)$$

Sostituendo in dS

- Valore atteso del moto browniano, ovvero E(9)

$$\begin{aligned} E(dX) &= \mu dt + \sigma \cdot E(dW) \\ &= \mu dt + \sigma \cdot 0 \\ \Longrightarrow & \ \mu = E(dX)/dt \end{aligned}$$

dove $\mu = drift$ del moto browniano (il trend del sentiero del processo).

- Varianza del moto browniano

$$\begin{aligned} Var(dX) &= \sigma^2 \cdot Var(dW) \\ &= \sigma^2 \cdot E[dW - 0]^2 \\ &= \sigma^2 \cdot dt \end{aligned}$$

Cosa vuol dire? Il processo stocastico ha un trend pari a μ (= drift) e intorno c'è una variazione a media nulla, ma con una variazione pari alla volatilità σ in su o in giù per ogni unità di tempo. Quindi per n unità di tempo l'intervallo di variazione ha distanza potenziale di $\sigma^2 \cdot n$ unità di tempo $= \sigma^2 \cdot n \cdot dt = \sigma^2 \cdot (T - t_0)$. E dunque la dispersione cresce con $(T - t_0)$.

Conseguenze di (9) : dX_t sono:

- indipendenti (sapere cosa è successo lunedi non ha impatto su cosa succederà martedi (non è vero, mean reversion ... ...).
- stationari (la variazione giornaliera attesa è uguale per tutti i giorni (non è vero ..., può dipendere da eventi esterni)).

La distribuzione di dX_t non dipende dal punto di inizio, ma dalla lunghezza dell'intervallo.
Se la scrivo cosi

$$X(t + dt) = X(t) + \mu dt + \sigma dW$$

- la distribuzione dipende dal valore iniziale, soltanto, (non dal passato) Markov property. (L'analisi tecnica dipende invece dal passato),
- può assumere valori negativi $\Longrightarrow NO$!!!

Invece, sono le "variazioni" che possono essere negative, quindi è una distribuzione perfetta per

- rendimenti,
- spreads.
- Nel caso di $\mu = 0$

$$E(dX) = 0dt + \sigma \cdot 0 = 0$$

il moto Browniano coincide con il random walk o white noise amplificato secondo la volatilità (σ) data.

1.1 Moto Browniano Geometrico

Samuelson 1965: sono i rendimenti e "non" i prezzi delle azioni a seguire

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW \tag{1}$$

or

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW$$

poi usata da Black & Scholes (1973) e Merton (1973).

Attenzione, quando i rendimenti NON si distribuiscono normalmente, le formule di BS non valgono!

1.2 Ito's Lemma

1.2.1 Per variazione assoluta:

Dato

$$dX = \mu dt + \sigma dW \tag{2}$$

Consideriamo una funzione scalare $f(t, x)$ differenziabile due volte.

La sua espansione in Taylor è

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + ... \tag{3}$$

Sostituiamo x con X

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu^2 dt^2 + 2\mu \cdot \sigma \cdot dt \cdot dW^2 + \sigma^2 dW^2\right) + ... \tag{4}$$

Calcoliamo il lim per $t \longrightarrow 0$. Tutti i termini di ordine superiore a 1 li consideriamo trascurabili e resistono solo i termini in dt, ricordando che $dW^2 = dt$.

$$\begin{aligned}\lim_{dt \longrightarrow 0} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu^2 dt^2 + 2\mu \cdot \sigma \cdot dt \cdot dW^2 + \sigma^2 dW^2\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0 + 0 + \sigma^2 dt\right)\end{aligned} \tag{5}$$

mettendo in evidenza dt

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2\right)dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW \tag{6}$$

con aggiunta di x

1.2.2 Per variazione percentuale

Attenzione, se consideriamo la variazione percentuale

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2\right)dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW$$

dobbiamo calcolare

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW$$

Rifacendo i passaggi sopra (3), (4) e (5) usando l'equazione sopra invece della variazione assoluta (2) ottengo l'equazione di Ito per il moto Browniano geometrico,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\mu x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}x^2\sigma^2\right)dt + \sigma\frac{\partial G}{\partial x}x dW \tag{7}$$

1.3 Log-Normal Variable

Definizione 2 $X \in [0, +\infty)$ *si distrbuisce secondo una Legge LogNormale* $\sim LN(\mu, \sigma)$, *dove* μ *reale e* $\sigma > 0$, *se* $Y = \log X \sim N(\mu, \sigma)$.

$$U_t = \ln S_s, \qquad \forall t \geq 0$$

dove $U_t = \ln S_t = f$.
Per soddisfare eq. (6)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{1}{S}; \qquad \frac{\partial U}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Sostituendo nella (7)

$$\begin{aligned} dS_t &= dU = d\ln S_t(?)^* = \left(\frac{1}{S}S\mu - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}S^2\sigma^2\right)dt + \sigma\frac{1}{S}SdW \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma \cdot dW \end{aligned}$$

* ma $d\ln(.) =$
soddisfa l'equazione

$$dU_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW$$

Quindi

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right]$$

ovvero

$$\ln S_T \sim \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right]$$

dove $T = (T - t_0)$, per $t_0 = 0$.

1.4 Log-Normal Distribution

Definition 1 *A continuous random variable is said to have a Log-Normal distribution if its pdf* $f_X(x)$ *is given by*

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \textit{for } x \in [0, \infty)$$

Proposizione 1

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{x \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \end{aligned}$$

DIM.
Tools:

1. The integral of the pdf of a Normal distribution $x \sim N(\mu, b^2)$ is 1.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2b}\right) dx = 1n \qquad \text{for } x \in [0, \infty)$$

2. L'equazione di II grado di coefficienti a, b, c si può scrivere

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \tag{8}$$

Calcoliamo la media della distribuzione: $E(x)$

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{x \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \end{aligned}$$

cambio di variabile

$$\begin{aligned} y &= \ln x - \mu \quad \Longrightarrow \quad y + \mu = \ln x \quad \Longrightarrow \quad x = \exp(y + \mu) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad dx = x \cdot dy = \exp(y + \mu) \cdot dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp(y + \mu)\, dy \\ &= \exp(\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} + y\right) dy \end{aligned}$$

ma il termine entro $exp\,(..)$ è un'equazione di II grado in y con coefficienti $a = -\frac{1}{2\sigma^2}, b = 1, c = 0$. Allora la posso scrivere come il termine di destra della (8) come

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y\right) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y+\frac{1}{2\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)}\right)^2+0-\frac{1}{-4\sigma^4}\right)\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y-\sigma^2\right)^2+0-\frac{1}{4\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y-\sigma^2\right)^2+0-\sigma^4\right)
\end{aligned}$$

Tornando all'integrale

$$\begin{aligned}
E\left(x\right) &= \exp\left(\mu\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y\right)dy\\
&= \exp\left(\mu\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y-\sigma^2\right)^2\right)\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)dy\\
&= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y-\sigma^2\right)^2\right)\right)dy}_{=1}\\
&= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

CVD.

Proposizione 2

$$\begin{aligned}
Var\left(x\right) &= \int_0^{+\infty}\frac{x}{x\cdot\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx\\
&= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

DIM.
Usiamo gli stessi strumenti sopra, da cui $x = \exp\left(y+\mu\right)$

$$\begin{aligned}
Var\left(x\right) &= E\left(x^2\right)-\left(E\left(x\right)\right)^2\\
&= E\left(x^2\right)-\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot 2\\
&= E\left(x^2\right)-\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned}
E\left(x^2\right) &= \int_0^{+\infty}x^2 f_X\left(x\right)dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x\cdot\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)dx
\end{aligned}$$

Solito cambio di variabili

$$\begin{aligned}
y &= \ln x - \mu \quad \Longrightarrow \quad y + \mu = \ln x \quad \Longrightarrow \quad x = \exp(y+\mu) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad dx = x \cdot dy = \exp(y+\mu) \cdot dy
\end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned}
E\left(x^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot x \cdot \exp(y+\mu) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp(y+\mu) \cdot \exp(y+\mu) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \frac{\exp(2\mu)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2\sigma^2} + 2y\right) dy
\end{aligned}$$

dove, come prima il termine entro parentesi è un polinomio di II grado, usando il completamento del quadrato con $a = \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$, $b = 2$, $c = 0$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-y^2}{2\sigma^2} + 2y\right) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(y + \frac{2}{\frac{-2}{2\sigma^2}}\right)^2 + 0 + \frac{4}{4\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - 2\sigma^2\right)^2 + 2\sigma^2
\end{aligned}$$

$$E\left(x^2\right) = \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y - 2\sigma^2\right)^2\right) dy}_{=1}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
Var(x) &= E\left(x^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \\
&= \exp\left(2\mu + 2\sigma^2\right) - \exp\left(2\mu + \sigma^2\right) \\
&= \exp\left(2\mu + \sigma^2\right)\left(\exp\left(\sigma^2\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

2 Black and Scholes and Merton (1973) (SI)

Invece dell'albero binomiale, vogliamo un processo che descriva il movimento di un'attività finanziaria sottostante, continuo nel tempo: un'azione, per esempio.

Vogliamo descrivere

$$S_t = ...$$

ma, come sappiamo, preferiamo trattare le sue variazioni percentuali. Quindi:

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW$$

dove W = Wiener Process (notazione z su Hull cap. 14).

Definizione 3 *Un processo stocastico si chiama Moto Browniano con drift (o aritmetico) se soddisfa la seguente equazione differenziale*

$$\begin{aligned} dX &= \mu dt + \sigma dW \\ &= X(t + dt) - X(t) \end{aligned} \tag{9}$$

dove

dt = unità infinitesima di tempo o tick (1min,, 5 min, 1 ora, 1g, 1 mese etc).
dW = Processo di Wiener.

2.1 Processo di Wiener

Il processo di Wiener è stato inizialmente definito matematicamente dal matematico del MIT Norbert Wiener e le sue proprietà sono state successivamente studiate in dettaglio da Paul Lévy. Ha la caratteristica interessante che le sue traiettorie sono frattali, poiché sono continue senza essere differenziabili da nessuna parte. La derivata del processo di Wiener (dW) è chiamata "rumore bianco" gaussiano (*random walk* o *white noise*).

Il Processo di Wiener è caratterizzato dalle proprietà seguenti:

1. $W(0) = 0$.
2. $W(t)$ ha incrementi indipendenti: $\forall t > 0$, gli incrementi futuri $W(t + dt) - W(t)$, $dt \geq 0$, sono indipendenti dai valori passati $W(s)$, per $s \leq t$.
3. $W(t)$ ha incrementi distrubuiti normalmente $dW(t) \sim N(0, dt)$.
4. $W(t)$ è un processo continuo in t.

Ovvero

$$W(t) = 0 + \varepsilon \cdot \sqrt{dt}$$

$$\begin{aligned} dW(t) &= W(t + dt) - W(t) \\ &= \varepsilon \cdot \sqrt{dt}, \qquad \text{dove } \varepsilon \sim N(0, 1) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} E(dW) &= 0 \\ Var(dW) &= 1 \cdot dt \\ Dev.St &= 1 \cdot \sqrt{dt} \end{aligned}$$

da cui

$$dW \sim N(0, dt)$$

Consideriamo un intervallo di tempo che ci interessa: $\Delta T = [T - t_0] = T - 0$. Per esempio $T = 1$ anno.

Consideriamo l'unità di tempo come la frazione dell'intervallo

$$\frac{\Delta T}{N} = dt$$

Per esempio

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{52} &= dt = 1 \text{ settimana} \\ \frac{\Delta T}{252} &= dt = 1 \text{ giorno lavorativo etc. secondo le convenzioni} \end{aligned}$$

La variazione attesa sull'intervallo "grande" = somma delle variazioni nelle unità di tempo.

$$W(T) - W(0) = \sum_{i=1}^{N} dW_i = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \cdot \sqrt{dt}$$

e dunque

$$\begin{aligned} E[W(T) - W(0)] &= N \cdot 0 = 0 \\ Var[W(T) - W(0)] &= N \cdot dt = T - 0 \\ Dev.St[W(T) - W(0)] &= N \cdot \sqrt{dt} = \sqrt{T - 0} \end{aligned}$$

DISEGNI

2.2 Processo di Wiener Generalizzato

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dW$$

dove $a = drift$ (trend), $b = coeffciente$ della volatilità. Se $b = 0$

$$x_t = x_0 + a \cdot t$$

ovvero è l'equazione di una retta che ha la variabile t sulle ascisse.

Invece la sua variazione

$$\begin{aligned} dx &= adt + b \cdot dW \\ &= adt + b \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \end{aligned}$$

dove, come sopra, $\varepsilon \sim N(0,1)$. Dunque

$$dx \sim N(?,?)$$

$$\begin{aligned} E(dx) &= a \cdot dt \\ Var(dx) &= E\left[a \cdot dt + b \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt} - (a \cdot dt)\right]^2 = b^2 \cdot 1 \cdot dt \\ Dev.St &= b \cdot 1 \cdot \sqrt{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[x(T) - x(0)] &= a \cdot (T - 0) \\ Var[x(T) - x(0)] &= N \cdot dt = b^2 \cdot (T - 0) \\ Dev.St[x(T) - x(0)] &= N \cdot \sqrt{dt} = b \cdot \sqrt{T - 0} \end{aligned}$$

GRAPH Hull

2.3 Processo di Ito

Come sopra ma i coeffcienti sono variabili $a(x,t)$ e $b(x,t)$

$$\begin{aligned} dx &= a(x,t) \cdot dt + b(x,t) \cdot dW \\ &= a(x,t) \cdot dt + b(x,t) \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \end{aligned}$$

2.4 Moto Browniano del Sottostante

Sostituendo in dS, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW \\ &= \mu dt + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt} \end{aligned}$$

o anche

$$dS_t = S_t \cdot \mu \cdot dt + S_t \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}$$

o ancora, poiché $dS_t = S_{t+dt} - S_t$

$$S_{t+dt} = S_t + \left(S_t \cdot \mu \cdot dt + S_t \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}\right)$$

e ancora

$$\frac{dS_t}{S_t} = \ln S_{t+dt} - \ln S_t = \ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)$$

Dunque, come sopra

$$\frac{dS_t}{S_t} \sim N(?,?)$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) &= \mu \cdot dt \\ Var\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) &= E\left[\mu \cdot dt + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt} - (\mu \cdot dt)\right]^2 = \sigma^2 \cdot 1 \cdot dt \\ Dev.St\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) &= \sigma \cdot 1 \cdot \sqrt{dt} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\frac{S_T - S(0)}{S_0}\right] &= \mu \cdot (T-0) \\
Var\left[\frac{S_T - S(0)}{S_0}\right] &= \sigma^2 \cdot N \cdot dt = \sigma^2 \cdot (T-0) \\
Dev.St\left[W(T) - W(0)\right] &= \sigma^2 \cdot N \cdot \sqrt{dt} = \sigma^2 \cdot \sqrt{T-0}
\end{aligned}
$$

2.5 Simulazione Montecarlo

Dati i parametri:

- $S_0 =$ valore iniziale dell'azione.
- $\mu =$ rendimento atteso annuale,
- $\sigma =$ volatilità annuale, in genere compresa fra $(0.15 - 0.60)$ annualizzata,
- dt espressa in frazione di anni.
- Generare la variabile casuale Uniforme nell'intervallo $u_i \sim U[0,1]$. In Excel funzione "Casuale".
- Cercare il supporto della variabile normale come inversa degli u_i : in Excel funzione $\varepsilon_i =$NORMINV(u_i).
- Calcolare

$$dS_t = S_t \cdot \mu \cdot dt + S_t \cdot \sigma \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{dt}$$

GRAPH.

2.6 Lemma di Ito

2.6.1 Per variazione assoluta:

Dato un sottostante con coefficienti dipendenti da (x,t) e volatilità proporzionale al processo di Wiener (white noise frattale).

$$dX = \mu(x,t)\,dt + \sigma(x,t)\,dW \tag{10}$$

Consideriamo la funzione $f(t,x)$ che dipende dal sottostante e dal tempo, differenziabile due volte

La sua espansione in Taylor è

$$df(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + ...$$

Sostituiamo x con X

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu^2 dt^2 + 2\mu \cdot \sigma \cdot dt \cdot dW + \sigma^2 dW^2\right) + ...$$

Calcoliamo il lim per $t \longrightarrow 0$. Tutti i termini di ordine superiore a 1 li consideriamo trascurabili e resistono solo i termini in dt, ricordando che $dW^2 = dt$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{dt \longrightarrow 0} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\mu^2 dt^2 + 2\mu \cdot \sigma \cdot dt \cdot dW + \sigma^2 dW^2\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(0 + 0 + \sigma^2 dt\right)
\end{aligned}
$$

mettendo in evidenza dt

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2\right) dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW$$

2.6.2 Per variazione percentuale

Attenzione,

- se consideriamo la variazione percentuale, abbiamo

$$dX = \frac{dS_t}{S_t} = \mu\left(x,t\right)dt + \sigma\left(x,t\right)dW$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2\right) dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW$$

- se consideriamo la variazione assoluta del sottostante, dobbiamo moltiplicare il termine a destra per S_t

$$dS_t = S_t \cdot \mu_t \cdot dt + S_t \cdot \sigma \cdot dW \tag{11}$$

  In questo caso rifacendo i passaggi sopra, usando l'equazione (11) invece della (10) ottengo l'equazione di Ito per il moto Browniano geometrico

$$df\left(x,t\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\mu \cdot x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2 \cdot \sigma^2\right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma \cdot x \cdot dW \tag{12}$$

  o, in notazione Hull ed avendo sostituito $x = dS$

$$df\left(S,t\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu \cdot S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot \sigma\right) dW \tag{13}$$

  dove il primo termine entro parentesi tonda è il drift del derivato e il secondo rappresenta la volatilità.

- NB. Sia il processo del sottostante, che il processo del prodotto derivato dipendono dalla stessa variabile casuale W.

2.7 Esempio: la distribuzione Log-Normale

Usiamo il lemma di Ito per derivare il processo seguito dal $\ln(S)$.

Definiamo

$$G\left(S,t\right) = \ln\left(S\right)$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S} \\
\frac{\partial f^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial G^2}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} d\ln(S) &= dG(S,t) = \left(\frac{1}{S}\mu\cdot S - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\cdot\sigma^2\cdot S^2\right)dt + \left(\frac{1}{S}\cdot S\cdot\sigma\right)dW \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)dt + \sigma dW \end{aligned}$$

da cui, rivedendoi calcoli per $\frac{dS_t}{S_t}$

$$\begin{aligned} (\ln S_T - \ln S_0) &\sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)T, \quad \sigma^2 T\right] \\ \ln S_T &\sim N\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)T, \quad \sigma^2 T\right] \end{aligned}$$

Se $\ln S_t \sim N[...]$, allora

$$E(S_T) = S_0 \exp(\mu\cdot T)$$

$$var(S_T) = S_0^2\cdot e^{2\mu T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right)$$

Fare esempi numerici.

2.8 Distribuzione della variabile per unità di tempo

Se

$$x = \frac{1}{T}\ln(S_T/S_0)$$

allora

$$x \sim N\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right), \quad \frac{\sigma^2 T}{T^2} = \frac{\sigma^2}{T}\right]$$

e quindi volatilità

$$DevSt = \frac{\sigma}{\sqrt{T}}$$

decresce nel tempo.

GRAFICO

2.9 Stima Volatilità

Si veda Hull.

3 Black-Scholes-Merton (1973)

Dati:

- il processo stocastico del sottostante (11)

$$dS = S\cdot\mu_t\cdot dt + S\cdot\sigma\cdot dW \tag{14}$$

- e la sua equazione alle differenze parziali per S e per t

$$df\,(S,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu \cdot S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) dt + \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot \sigma\right) dW$$

1. costruiamo lo stesso portafoglio dell'albero binomiale, dove f è un derivato (call o put o altro), dove $\Delta = \partial f / \partial S$.

$$\begin{aligned} \pi\,(0) &= -1f + \Delta \cdot S \\ &= -1f + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \end{aligned}$$

$$\Delta\pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{15}$$

sostituendo dS e df dalle equazioni sopra nella (15)

$$\Delta\pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

In pratica, stiamo svolgendo la stessa operazione che nell'albero binomiale era il cercare il $\Delta hedging$.

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu \cdot S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) dt - \left(\frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot \sigma\right) dW + \frac{\partial f}{\partial S} S \cdot \mu \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial S} S \cdot \sigma \cdot dW \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) \Delta t \end{aligned}$$

Il risultato è che questa variazione di portafoglio ha eliminato le varianze dei due processi ed ha quindi eguagliato i valori del portafoglio in qualunque stato di natura.

2. Per il principio di non arbitraggio, se questo portafoglio è risk-free deve capitalizzare al tasso riskfree $r = (1 + r_f)$ oppure $r = \exp(r_f\,(T - t_0))$

$$\Delta\pi = r \cdot \pi \cdot \Delta t$$

ovvero

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot \sigma^2 \cdot S^2\right) \Delta t = r \cdot \left(-1f + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S\right) \cdot \Delta t$$

eliminando Δt e riarrangiando i termini, si ha

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \tag{16}$$

3. Dopo "molti passaggi" algebrici, l'idea è che

$$f = \frac{\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}}{r}$$

dove il numeratore è lo sviluppo in Taylor del differenziale totale del portafoglio al variare di S nel tempo, dovuto al moto wiener che da gli impulsi di variazione. Ma attenzione è il differenziale della sola "media" (valore atteso) del processo stocastico.

4. Tale equazione differenziale viene risolta nel modo più semplice usando la condizione finale (i payoffs a scadenza) ponderati con le probabilità risk-neutral. Tali probabilità nel continuo sono costituite dalle probabilità cumulate della distribuzione normale standardizzata per dei valori del payoffs dell'opzione "in the money", ovvero per $S_T > K$ nel caso della call, e di $S_T < K$ nel caso della put.

   Ovvero, per $t = T$

$$f(T) = c(T) = \max[S_T - K; 0], \text{ per } t = T$$
$$f(T) = p(T) = \max[K - S_T; 0], \text{ per } t = T$$

   Per $t < T$, la formula è più complicata.

3.1 Esempio di un contratto forward su un'azione.

Payoff a scadenza

$$\pi(T) = S_T - K$$

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \exp(-r(T - t_0)) \cdot E_{RN}(S_T - K) \\ &= E_{RN}(S_T) \cdot \exp(-r(T - t_0)) - K \exp(-r(T - t_0)) \end{aligned}$$

dove

$$E_{RN}(S_T) = S_0 \exp(r(T - t_0))$$

e dunque

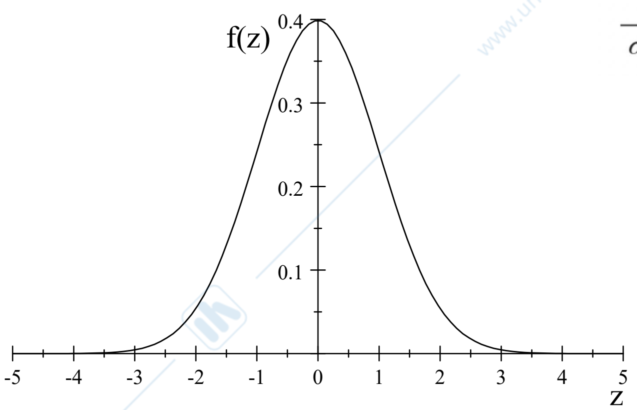
$$f(t_0) = S_0 - K \exp(-r(T - t_0))$$

3.2 BSM formulas

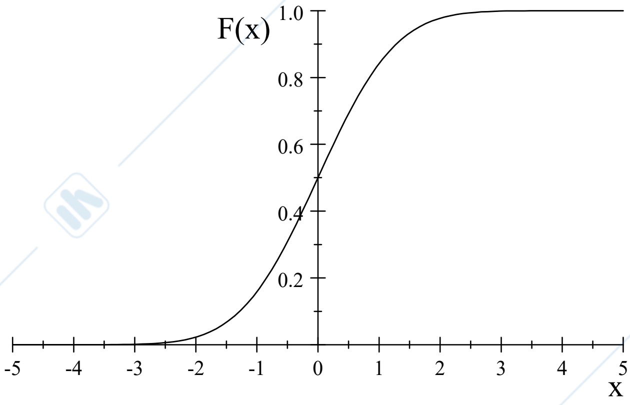
Premessa: La Normale Standardizzata

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$ z= (x- μ)/σ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$



3.2.1 Metodo 1

Risolvendo la (16) partendo dalle condizioni finali si ha ....

Si veda Hull. Cap. 15 Appendice.

$$c = S_0 N(d_1) - K \cdot N(d_2) \exp(-r(T - t_0)) \tag{17}$$

$$p = K \cdot N(-d_2) \exp(-r(T - t_0)) - S_0 N(-d_1) \tag{18}$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

3.2.2 Metodo 2: Risk-Neutral Approach

Il valore atteso a scadenza della call è

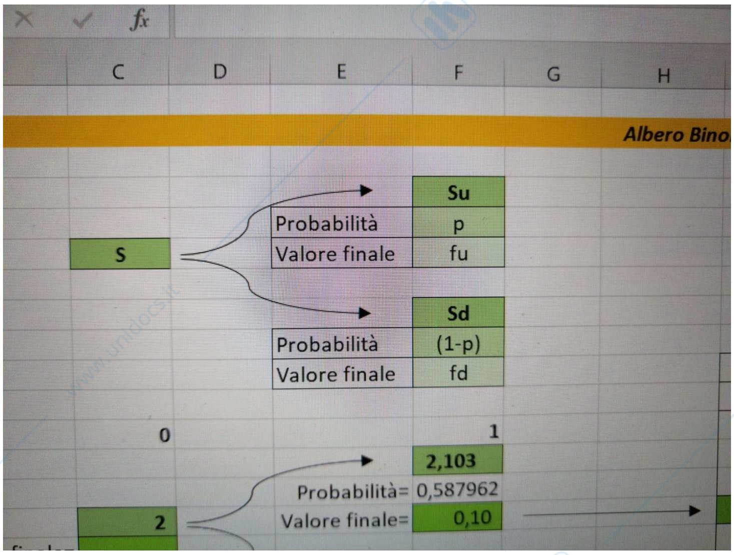
$$c = \exp(-r(T - t_0)) \cdot E_{RN}[S_T - K; 0]$$

per ottenere le (17) e (18) .

Albero Binomiale
è un albero ordinato in cui:
- l'albero B0 è costituito da un singolo nodo
- l'albero Bk è costituito da due alberi binomiali collegati insieme in modo che la radice di uno dei due alberi sia figlio sinistro della radice dell'albero.

Modello Binomiale a uno stadio
Il pi`u diffuso e flessibile processo discreto per la valutazione di un'opzione `e senza dubbio quello binomiale. Esso si caratterizza per il fatto che il prezzo dell'azione sottostante, qualunque sia il prezzo iniziale, pu`o evolvere in due possibili stati alla fine di un periodo di tempo di ampiezza prefissata.
Per motivi di semplicit`a si suppone, inoltre, che il mercato sia efficiente (non ci sono costi di transazione, `e possibile vendere titoli allo scoperto senza limitazioni e cedere o prendere a prestito denaro allo stesso tasso (costante) di interesse, ecc.) e che non esistano opportunit`a di arbitraggio. Si suppone inoltre, anche se questa ipotesi pu`o essere rimossa, che il bene sottostante l'opzione non paghi dividendi durante la vita dell'opzione

Modello Binomiale multiperiodale
L'ipotesi che il prezzo finale del bene sottostante possa assumere due soli valori `e chiaramente ben poco realistica. D'altra parte, si pu`o supporre di suddividere l'intervallo di tempo che intercorre tra l'epoca di valutazione e la scadenza dell'opzione in un numero n adeguatamente elevato di sottoperiodi di uguale ampiezza. In ciascun sottoperiodo il prezzo di fine periodo `e ottenuto moltiplicando il corrispondente prezzo di inizio periodo per il fattore di crescita u o per il fattore di diminuzione d . Tale procedura d`a luogo ad un albero binomiale che descrive l'andamento del prezzo del bene sottostante l'opzione nei singoli sottoperiodi.



$$F = \left((f_u \cdot p) + (f_d(1-p)) \right) e^{(-r \cdot \Delta t)}$$

The Greeks

Maria-Augusta Miceli
Sapienza University of Rome

May 11, 2021

1 Example

Da Hull. Cap. Greche 19.1.
Dati:

- $S_0 = 50.08$ =prezzo valido quando l'Istituzione Finanziaria vende la call.
- $S_1 = 49 = prezzo$ corrente
- $S_T = prezzo$ a scadenza potenziale.
- $K = 50$.
- $dt = (20/52) = 0.384\,62$.
- $\mu = 0.13$.
- $\sigma = 0.2$;
- $rf = 0.05$;
- $T - t_0 = 1anno$;
- num. Azioni $n = 100000.00$.

Case 1 *Financial institution vende una call per* 300 000 \$
Per $S_t = 49 \Longrightarrow \max[S_t - K; 0] = \max[49 - 50; 0]$

$$\pi(t) = 300000 - \max(49 - 50, 0) \cdot 100000 = 300000 - 0$$

1.1 Strategie di copertura del rischio

1. **Naked Position** = Non fare nulla.
   Se $S_t > K$

   $$\pi(t) = 300000 - \max(S_t - 50, 0) \cdot 100000 = 300000 - (60 - 50) \cdot 100000 < 0, \text{ per } S_T > 53$$

   In generale

   $$\begin{aligned} \pi(t) &= +\max(50.08 - 50; 0) \cdot n - \max(S_t - 50, 0) \cdot n = 300000 - (S_t - 50) \cdot 100000 < 0, \text{ per } S_T > \\ \pi(t) &= +\max(50.08 - 50; 0) \cdot n - \max(S_t - 50, 0) \cdot n = 300000 > 0, \text{ per } S_T \leq 53 \end{aligned}$$

2. **Covered Position** = Comprare $n = 100000$ sottostante.

$$\begin{aligned} \pi(t) &= 300000 - \max(S_t - 50, 0) \cdot 100000 + 100000 \cdot S_t \\ &= \begin{cases} 300\,000 + 50 \cdot 100\,000 = 5\,300\,000 - 100000 \cdot S_0 > 0 & \text{se } S_T > K \\ 300\,000 \;+ 100000 \cdot S_t - 100000 \cdot S_0 < 0 & \text{Se } S_T < S_0 - 3 \\ 300\,000 \;+ 100000 \cdot 40 - 100000 \cdot 49 = -600\,000 & Se\ S_T = 49.? \end{cases} \end{aligned}$$

3. **Stop Loss Strategy.**

   - Comprare nS, appena $S > K \Longrightarrow$"Covered Position".
   - Vendere nS, appena $S < K \Longrightarrow$"Naked Position".

   Morale: Comprare e vendere a $S = K$, cosicché l'Istituzione finanziaria possa guadagnare l'intera posizione short iniziale.

   Tuttavia non funziona perché:

   (a) I pagamenti successivi sono a date diverse e quindi vanno scontate alle diverse date e la somma algebrica non è zero.

   (b) Il risultato vale se e solo se fosse $r = 0$, con transazioni ad $S = K$. Ma sarà sempre acquisto a $S + \varepsilon$ e vendita ad $S - \varepsilon$ e quindi la somma non sarà nulla. La grandezza ε è fissata a priori: più è piccola, meno costo, ma maggiori costi di transazione ...
   Forse

$$\begin{aligned} \Delta\pi(t) &= -\frac{\partial C}{\partial S} dS + n \frac{\partial S}{\partial S} dS = 0 \\ &\Longrightarrow\ ndS = \frac{\partial C}{\partial S} \end{aligned}$$

   (c) E poi ci sono le commissioni sulle transazioni.

   FIGURA 19.1.

2 Delta Hedging

Definizioni.

1. **Delta hedging** è la derivata del valore di un'opzione call o put rispetto al sottostante

$$\begin{aligned} \Delta\pi(t) &= -\frac{\partial c}{\partial S} dS + \Delta dS = 0 \\ &\Longrightarrow\ \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \end{aligned}$$

2. Se $\Delta = 0 \Longrightarrow \pi(t)$ è **"Delta Neutral"**.

   Delta varia in continuazione con il variare della quotazione del sottostante. Chiamiamo:

3. **Dynamic Hedging** se c'è un "rebalancing" ad intervalli di tempo fissi.

4. Static Hedging, chiamato "hedge-and-forget".

Riconsideriamo la formula di Black-Scholes

$$c = S_0 N(d_1) - K \cdot N(d_2) \exp(-r(T - t_0)) \quad ((15.20))$$

$$p = K \cdot N(-d_2) \exp(-r(T - t_0)) - S_0 N(-d_1) \quad ((15.21))$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t_0)}{\sigma\sqrt{(T - t_0)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T - t_0)}$$

Vedi fig. Hull Fig. 19.3 o su Excel.

2.0.1 Portafoglio con Call.

Short S - Long Call
Long S - Short Call

$$\begin{aligned} d\pi(T) &: \Delta \cdot dS - \frac{\partial \max[S - K; 0]}{\partial S} dS = 0 \\ &: \Delta \cdot dS - \frac{\partial c}{\partial S} dS = 0 \\ \Delta &= \frac{\partial c}{\partial S} \\ &= N(d_1) \end{aligned}$$

2.0.2 Portafoglio con Put

Long S + Long Put
Short S + Short Put

$$\begin{aligned} \Delta\pi(T) &: \Delta \cdot dS + \frac{\partial \max[K - S; 0]}{\partial S} dS = 0 \\ &: \Delta \cdot dS + \frac{\partial p}{\partial S} dS = 0 \\ \Delta &= -\frac{\partial p}{\partial S} \\ &= -(N(-d_1)) \end{aligned}$$

2.0.3 Variazioni Δ allo scadere della Call

Cerchiamo

$$\frac{\partial N(d1)}{\partial(T - t_0)} =$$

Vedere Excel.

3 Theta

Definizione 1 *Dobbiamo*

$$\Theta = \frac{\partial \pi}{\partial (T - t_0)}$$

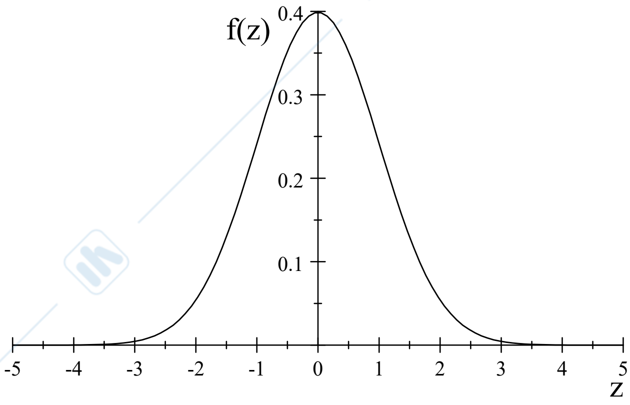
e dunque

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial (T - t_0)}$$

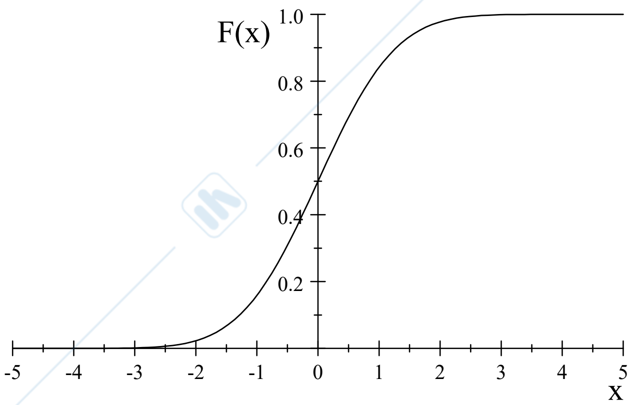
Avevamo visto che
Premessa: La Normale Standardizzata

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right)$$



$$N(d_1) = F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$



Se consideriamo che la variabile di integrazione sia il tempo o il tempo corrente, derivare l'integrale, ci riporta alla funzione primitiva, quindi $N'(d_1) =$ distribuzione Normale NON cumulata.

$$\Theta\left(call\right) = -\frac{S_0 N'\left(d_1\right)\sigma}{2\sqrt{T-t_0}} - rK \cdot \exp\left(-r\left(T-t_0\right)\right) N\left(d_2\right)$$

$$\Theta\left(put\right) = -\frac{S_0 N'\left(d_1\right)\sigma}{2\sqrt{T-t_0}} + rK \cdot \exp\left(-r\left(T-t_0\right)\right) N\left(d_2\right)$$

Vedere Excel.

4 Gamma Hedging

Definizione 2

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

E' la derivata seconda. Paragonabile alla convexity. Risolve la curvatura del valore della call.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial S}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)\left(T-t_0\right)}{\sigma\sqrt{(T-t_0)}}$$

dunque

$$\Gamma = N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial S} = N'(d_1) \cdot \frac{1}{S \cdot \sigma\sqrt{(T-t_0)}}$$

Fig. 19.10
Sempre i 3 grafici in Excel

5 Vega

$$V = \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = N'(d_1) \cdot \frac{\partial (d_1)}{\partial \sigma} = N'(d_1) \cdot S\sqrt{(T-t_0)}$$