

# 1 Variabili aleatorie discrete

## Esercizio 1

Siano  $X$  e  $Y$  i risultati del lancio di due dadi.

- Calcolare  $E[X]$  e  $Var(X)$ .
- Stabilire se gli eventi  $\{1 \leq X \leq 3\}$  e  $\{3 \leq X \leq 4\}$  sono indipendenti.
- Determinare la funzione di probabilità di  $X + Y$ .

## Esercizio 2

Un'urna contiene 7 palline numerate: *quattro* palline hanno il numero 0, *due* palline hanno il numero 1 e *una* pallina ha il numero 2. Estraiamo una pallina a caso e denotiamo con  $X$  il numero scritto su di essa.

- Determinare la funzione di probabilità di  $X$ .
- Calcolare  $E[X]$  e  $Var(X)$ .
- Calcolare  $\mathcal{P}(X = 1 | X \leq 1)$ .

## Esercizio 3

Sia  $X$  il numero di teste ottenute in 3 lanci di una moneta simmetrica.

- Che tipo di v.a. è  $X$ ? Calcolare  $\mathcal{P}(X = 1)$ .
- Calcolare  $E[X]$  e  $Var(X)$ .
- Calcolare  $\mathcal{P}(X = 0 | X \leq 1)$ .

## Esercizio 4

Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie di Poisson  $P(2)$  indipendenti.

- Calcolare  $\mathcal{P}(X = 4)$ ,  $E[X]$  e  $Var(X)$ .
- Determinare la funzione di probabilità di  $X + Y$ .

## Esercizio 5

Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti di parametro  $p$  e 0,5, rispettivamente, e sia  $Z = X \cdot Y$ .

- Determinare la funzione di probabilità di  $Z$  e calcolarne valore atteso e varianza.
- Stabilire il valore di  $p$  che massimizza la varianza di  $Z$ .

- Calcolare  $E[(X + Z)^2]$ .

### Esercizio 6

Siano  $X$  una v.a. di Poisson  $P(1)$  e  $Y = \min\{X, 2\}$ .

- Determinare la funzione di probabilità di  $Y$  e calcolare  $E[Y]$  e  $Var(Y)$ .
- Stabilire se gli eventi  $A = \{Y = 2\}$  e  $B = \{X \leq 3\}$  sono indipendenti.

### Esercizio 7

Sia  $X$  il numero di teste in 5 lanci di una moneta simmetrica e sia  $Y = 1 + \frac{X(X-5)}{2}$ .

- Determinare la funzione di probabilità di  $Y$ .
- Calcolare  $\mathcal{P}(X \leq 1|Y = 1)$  e  $Var(Y)$ .

### Esercizio 8

Una scatola contiene  $k$  palline bianche e  $n - k$  nere. Faccio una serie di estrazioni con re-imbussolamento e indico con  $X$  l'istante d'estrazione della seconda pallina bianca. Calcolare  $\mathcal{P}(X = 5)$  e determinare il valore di  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  che massimizza tale probabilità.

### Esercizio 9

Sia  $X$  il numero di teste in 3 lanci di una moneta simmetrica e sia  $X_1$  l'esito del primo lancio.

- Calcolare  $\mathcal{P}(X_1 = 1|X = 2)$ .
- Calcolare  $\mathcal{P}(X \cdot X_1 = 0)$ .

### Esercizio 10

Siano  $X_1$  e  $X_2$  gli istanti di prima e seconda testa in una sequenza di lanci di una moneta asimmetrica con probabilità di testa  $p$ .

- Calcolare  $\mathcal{P}(X_1 + X_2 = 5)$
- Determinare il valore di  $p$  che massimizza tale probabilità.

### Esercizio 11

Siano  $X$  una v.a. di Poisson  $P(2)$  e  $Y$  una v.a. di Bernoulli di parametro  $\frac{1}{3}$  indipendenti.

- Si determini la funzione di probabilità di  $X \cdot Y$ .
- Si calcoli  $\mathcal{P}(X \cdot Y = 0|X \leq 1)$ .

### Esercizio 12

Siano  $X$  e  $Y$  le variabili aleatorie dell'esercizio precedente. Si calcoli  $\mathcal{P}(X = k|X+Y = n)$  spiegando anche per quali valori di  $k$  tale probabilità è diversa da zero.

## 2 Variabili aleatorie continue

### Esercizio 13

Siano  $X \sim N(0, 4)$  e  $Y \sim N(-1, 1)$  indipendenti.

- Che tipo di variabili sono  $X + Y$  e  $2X - 1$ ?
- Costruire a partire da  $X$  e  $Y$  una v.a.  $\chi_2^2$  e calcolarne il valore atteso.

### Esercizio 14

Siano  $X \sim N(-1, 1)$  e  $Y, Z \sim N(0, 9)$  indipendenti.

- Calcolare  $E[1 - (X - 2Y)^2]$  e  $Var(-3X + Y + 2)$ .
- Costruire a partire da  $X, Y$  e  $Z$  una v.a. di Student con 2 gradi di libertà.

### Esercizio 15

Siano  $X, Y \sim N(0, 2)$  tali che  $E[XY] = -1$  e sia  $Z \sim N(3, 4)$  indipendente da  $X$  e da  $Y$ .

- Calcolare  $E[(2X - Z)^2]$  e  $Var(1 + X - 2Y + Z)$ .
- Costruire a partire da  $X, Y$  e  $Z$  una V.A.  $\chi_2^2$ .

### Esercizio 16

Siano  $X$  e  $Y$  normali standard indipendenti.

- Calcolare  $E[(-5X + 2Y)^2]$  e  $Var(2X - Y + 1)$ .
- Sia  $Z = (\frac{X}{Y})^2$ . Spiegare che tipo di v.a. é  $Z$ .

### Esercizio 17

Siano  $X, Y \sim N(0, 1)$  tali che  $E[XY] = 1$  e sia  $Z \sim N(2, 2)$  indipendente da  $X$  e da  $Y$ .

- Calcolare  $E[(X - 2Z)^2]$  e  $Var(2 + 4Y + Z)$ .
- Costruire a partire da  $X, Y$  e  $Z$  una v.a.  $F(1, 1)$ .