

Esercizi II

1 Variabili aleatorie discrete, valore atteso e varianza

Esercizio 1.1 Una scatola contiene due palline bianche e una pallina nera. Vengono effettuate due estrazioni con reimbussolamento e sia X il numero di palline bianche estratte.

- Stabilire immagine e funzione di probabilità di X ;
- calcolare $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{V}[X]$;
- calcolare $\mathbb{P}(X = 1 | X \leq 1)$.

Esercizio 1.2 Sia X l'esito del lancio di un dado e sia $Y := \min\{X^2, 5\}$.

- Stabilire immagine e funzione di probabilità di Y ;
- calcolare $\mathbb{E}[Y^3]$ usando la formula (4.3);
- stabilire se X e Y sono indipendenti.

Esercizio 1.3 Siano X e Y variabili aleatorie discrete con $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y) = \{1, 2\}$ e funzione di probabilità congiunta

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = cxy, \quad x \in \mathcal{I}(X), y \in \mathcal{I}(Y).$$

- Stabilire il valore di c ;
- calcolare $\text{cov}(X, Y)$;
- calcolare $\mathbb{P}(X = 1 | Y = 2)$.

Esercizio 1.4 Siano X e Y variabili aleatorie tali che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 1$, $\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y] = 2$ e $\text{cov}(X, Y) = -1$. Calcolare utilizzando le proprietà di valore atteso, varianza e covarianza:

- $\mathbb{E}[2X - 3Y + 1]$;
- $\mathbb{V}[4X + Y]$;
- $\text{cov}(-X + 2, 2Y + 5)$.

E' verificata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz?