PROBABILITÀ E PROCESSI STOCASTICI

Prof. Brunero Liseo

Prova scritta del 20 febbraio 2020

Cognome e Nome

Matricola

Numeri degli esercizi da correggere

---

1. Una compagnia di assicurazione ha classificato i suoi clienti in 3 categorie: A, B e C. Nessuno può passare da A a C oppure da C ad A in un solo passo. Ogni anno il 40% dei clienti in A passa a B, mentre il 30% dei B passa in C e il 10% dei B passa in A . Infine, il 20% dei C sono "down-graded" a B.

   A. Scrivi la matrice di transizione del modello.

   B. Stabilire se la catena è irriducibile o meno e se esiste una distribuzione invariante

   C. Quali sono le percentuali di clienti che ci aspettiamo di trovare nelle tre categorie nel lungo periodo?

2. Un professore ha due torce nel suo garage. Quando le lampadine di entrambe sono fulminate, vengono sostituite con nuove lampadine, e il giorno dopo saranno entrambe funzionanti. Supponiamo che, quando sono entrambe funzionanti, una delle due si fulminerà con probabilità 0.02 (Ognuna ha probabilità 0.01 di rompersi e ignoriamo la possibilità che si rompano entrambe lo stesso giorno).

   Tuttavia, quando solo una è funzionante, essa ha probabilità 0.05 di fulminare.

   A. Determina la percentuale di tempo, nel lungo periodo, in cui ci sarà solo una lampadina funzionante

3. Siano X e Y indipendenti con $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\text{Var}(X) = 3$, e $\text{Var}(Y) = 1$.

   A. Calcola la media e la varianza di $Z = 3X + 4Y - 5$

   B. Sia $W = 2X - 3Y$. Calcola il coefficiente di correlazione tra Z e W.

4. Su un tavolo ci sono due urne contenenti palline rosse (R) e blu (B). La prima urna ha 7 palline R e 3 B. La seconda urna ha 70 palline R e 30 palline B

   Ti si chiede di scegliere una delle due urne, dalla quale tu estrarrai a caso due palline (senza re-immissione). Vinci il gioco se almeno una delle due palline è B.

   A. Calcola la probabilità di estrarre pallina B dalla prima urna e dalla seconda urna in una singola estrazione.

   B. Calcola la probabilità di estrarre 2 palline entrambe B dalla prima e dalla seconda urna

   C. Per massimizzare la probabilità di vincere il gioco, ti conviene scegliere la prima o la seconda urna? Perché?

5. In una prova di esame basata su quiz, uno studente è promosso se fornisce 30 risposte esatte su 50 quesiti.

   Per ogni quesito, ci sono 3 possibili risposte, una sola delle quali è corretta. Gli studenti si dividono in tre categorie: quelli totalmente impreparati (A), che sono il 20%, quelli parzialmente preparati (B), che sono il 30%, mentre il restante 50% (C) è costituito da studenti preparati. Uno studente di tipo A risponde correttamente a una domanda con probabilità 1/3 indipendentemente ad ogni domanda. Uno studente di tipo B risponde correttamente a una domanda con probabilità 0.45 indipendentemente ad ogni domanda. Uno studente di tipo C risponde correttamente a una domanda con probabilità 0.8 indipendentemente ad ogni domanda.

   A. Calcola la probabilità che uno studente scelto a caso superi l'esame.

   B. Dato che Gerardo ha superato l'esame quali sono le probabilità che appartenga alle tre categorie, rispettivamente?

6. Un punto (V, W) viene scelto all'interno del cerchio di raggio unitario secondo le seguenti regole. Prima, si genera un numero aleatorio R uniforme in $(0, 1)$. Secondo, si sceglie un punto X sulla circonferenza di raggio R appena selezionato.

   A. Utilizza le regole di trasformazione di vettori aleatori per trovare la densità del punto (V, W).

   B. Determina la legge marginale di V e quella di W.

   C. Se hai fatto bene il punto A. avrai notato che (U, V) NON è uniformemente distribuita sul cerchio. Puoi spiegare perché, in modo intuitivo?

7. Sia X un numero aleatorio scelto in modo uniforme nell'intervallo $(0, 1)$ e, dato X, sia Y un numero aleatorio scelto in modo uniforme nell'intervallo $(0, X)$.

   A. Qual è la distribuzione marginale di Y?

   B. Qual è la sua media?

   C. Calcola il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$

FINE COMPITO

Prova Scritta del 20/2/2020

Soluzioni

1)

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} .6 & .4 & 0 \\ .1 & .6 & .3 \\ - & .2 & .8 \end{bmatrix} \end{array}$$

La catena è IRRIDUCIBILE E FINITA $\Rightarrow$ ERGODICA E APERIODICA

2) Legge invariante $\pi = \pi P$

$$(\pi_A, \pi_B, 1-\pi_A-\pi_B) = (\pi_A, \pi_B, 1-\pi_A-\pi_B)\, P$$

$$.6\,\pi_A + .1\,\pi_B = \pi_A$$

$$.4\,\pi_A + \pi_B \cdot .6 + (1-\pi_A-\pi_B) .2 = \pi_B$$

$$\Longrightarrow \pi^* = \left(\pi_A = \frac{1}{11},\ \pi_B = \frac{4}{11},\ \pi_C = \frac{6}{11}\right)$$

3) La legge invariante è anche la legge limite quindi il vettore π^* fornisce anche le percentuali di lungo periodo

2) Sia $X_n = \left\{ \text{numero di lampadine funzionanti al tempo } n \right\}$

La matrice di transizione ha un evento e l'altro (qui non conta il tempo che intercorre tra un evento e un altro, si considera la catena negli istanti in cui accade qualcosa)

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.05 & 0.95 & 0 \\ 2 & 0 & 0.02 & 0.98 \end{array}$$

Si determina, come prima, la legge invariante e limite

$$\underset{\sim}{\pi} = \underset{\sim}{\pi} P$$

$$\pi_A = 0.05\,\pi_B \qquad 100\,\pi_A = 5\,\pi_B$$

$$\pi_B = \frac{95}{100}\pi_B + \frac{2}{100}\left(1 - \pi_A - \pi_B\right) \qquad 100\,\pi_B = 95\,\pi_B + 2 - 2\pi_A - 2\pi_B$$

$$\Longrightarrow \quad \pi^* = \left(\frac{10}{710}, \frac{200}{710}, \frac{500}{710}\right)$$

Risposta: la percentuale è pari a $\frac{200}{710}$

3) $X \perp\!\!\!\perp Y$

$EX = 1 \quad EY = 2 \quad V(X) = 3 \quad Var(Y) = 1$

A) $EZ = 3EX + 4EY - 5 = 3 + 8 - 5 = 6$

$V(Z) = 9V(X) + 16V(Y) = 27 + 16 = 43$

B) $Cov(W, Z) = Cov(3X + 4Y - 5,\ 2X - 3Y)$

$= 6 Var X + 8 cov(X,Y) - 2 cov(5, X)$

$- 9 cov(X,Y) + 12 Var Y + 15 cov(5, Y)$

$cov(X,Y) = 0 \quad (X \perp\!\!\!\perp Y)$

$cov(\text{costante}, X) = 0 \quad \forall$ variabile aleatoria X

$\Rightarrow cov(W,Z) = 6 Var X - 12 Var Y = 18 - 12 = 6$

$V(W) = 4 Var X + 9 Var Y = 12 + 9 = 21$

$$\rho_{W,Z} = \frac{6}{\sqrt{21 \times 43}} = 0.199$$

4

A) $P(B \mid \text{Urna } 1) = 3/10$

$P(B \mid \text{Urna } 2) = 3/10$

B) $P(2 \text{ palline } B \mid \text{Urna } 1) = \frac{3}{10} \frac{2}{9} = \frac{1}{15} = 0.067$

$P(2 \text{ palline } B \mid \text{Urna } 2) = \frac{3}{10} \frac{29}{99} = 0.088$

c) $P(\text{almeno } 1 \; B \mid \text{Urna } 1) = 1 - P(2 \text{ Rosse} \mid \text{Urna } 1)$

$= 1 - \frac{7}{10} \frac{6}{9} = \frac{48}{90} \simeq 0.53$

$P(\text{almeno } 1 \; B \mid \text{Urna } 2) = 1 - P(2 \text{ Rosse} \mid \text{Urna } 2)$

$1 - \frac{7}{10} \frac{69}{99} = 1 - \frac{483}{990} \simeq 0.463$

Conviene giocare con la prima urna.

5

Sia $F = \{$ Lo studente supera l'esame $\}$

Probabilità di rispondere alla domanda i-esima

$P(X_i \mid A) = 1/3 \qquad P(A) = 0.2$

$P(X_i \mid B) = 0.45 \qquad P(B) = 0.3$

$P(X_i \mid C) = 0.8 \qquad P(C) = 0.5$

$P(F \mid A) = P(X \geq 30 \mid A)$ con $X \sim Bin(50, 1/3)$

$EX = \frac{50}{3}$

$V(X) = \frac{100}{9}$

$=$ appr. normale $\simeq P\left(Z \geq \frac{30 - 50/3}{10/3}\right)$

$\simeq P(Z \geq 4) \approx 1.$

$P(F \mid B) = P(X \geq 30 \mid B) \qquad X \sim Bin(50, 0.45)$

$\simeq P\left(Z \geq \frac{30 - 22.5}{3.51}\right) = 0.016 = P_B$

$EX = 22.5$

$V(X) = \frac{22.5 \times 55}{100}$

$\sqrt{\ } = 3.51$

$P(F \mid C) = P(X \geq 30 \mid C)$

$X \sim Bin(50, 0.8)$

$EX = 40 \quad V(X) = 8$

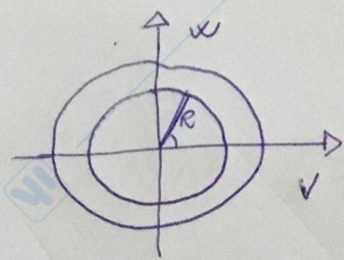
$\approx P\left(Z \geq \frac{30 - 40}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \geq -3.53) \approx 1$

$P(F) = 0.2 \times 0 + 0.3\, P_B + 0.5 \cdot 1 = 0.5 + 0.0048 = 0.5048$

$P(A \mid F) = 0 \qquad P(B \mid F) = \frac{0.0048}{0.5048} = .009 \qquad P(C/F) = .990$

(6)

$$R \sim U(0,1)$$
$$\theta \sim U(0,2\pi)$$



$$p(R,\theta) = \frac{1}{2\pi} \qquad R \in (0,1) \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

Trasformazione polare

$$v = R\cos\theta \qquad w = R\,\text{sen}\,\theta$$
$$R = \sqrt{v^2+w^2} \qquad \theta = \arctan\frac{w}{v}$$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = \frac{2v}{2\sqrt{v^2+w^2}} = \frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}} \qquad \frac{\partial R}{\partial w} = \frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{1+\frac{w^2}{v^2}}\left(-\frac{w}{v^2}\right) = -\frac{w}{v^2+w^2} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial w} = \frac{1}{1+\frac{w^2}{v^2}}\frac{1}{v} = \frac{v}{v^2+w^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{\sqrt{v^2+w^2}} & \frac{w}{\sqrt{v^2+w^2}} \\ -\frac{w}{v^2+w^2} & \frac{v}{v^2+w^2} \end{vmatrix} = \frac{v^2+w^2}{(v^2+w^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{v^2+w^2}}$$

$$f(v,w) = \frac{1}{\sqrt{v^2+w^2}} \qquad w^2+v^2 \leq 1$$

$$f_v(v) = \int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{v^2+w^2}}\,dw = 2\int_0^{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{v^2+w^2}}\,dw = 2\log\left(w+\sqrt{w^2+v^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{1-v^2}}$$

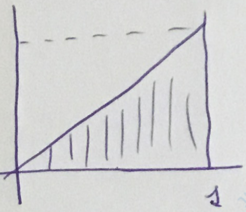
(Lo stesso vale per $f_w(w)$)

$$= 2\log\left(\sqrt{1-v^2}+1\right) = 2\log\left(1+\sqrt{1-v^2}\right) \qquad 0 < v < 1$$

(7) $X \sim U(0,1) \quad Y|X=x \sim U(0,x)$

$$P(x,y) = P(x)P(y|x) = \frac{1}{x} \qquad 0<y<x<1$$

$$P(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_y^1 = -\log y$$



$y \in (0,1)$

$$EY = -\int_0^1 y \log y\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \log y\,dy^2 = -\frac{1}{2}\left[y^2 \log y\Big|_0^1 - \int_0^1 y\,dy\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$EXY = \int_0^1 \int_0^x \frac{xy}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{6}$$

$EX = 1/2 \qquad \mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{24}$

$$V(X) = \frac{1}{12} \qquad V(Y) = EY^2 - \frac{1}{16} = -\int_0^1 y^2 \log y\,dy - \frac{1}{16} = \ldots = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{7}{144}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{1/24}{\sqrt{\frac{1}{12}\frac{7}{144}}} = \frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{7}} = 0.65$$