

ELEMENTI DI RELATIVITA' RISTRETTA

Inadeguatezza della Fisica Classica

Nell'ambito della meccanica classica è stato enunciato il principio di equivalenza di sistemi inerziali diversi, noto come il *principio galileiano di relatività*. Secondo tale principio tutte le leggi della Meccanica sono le medesime per osservatori in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

Si considerino due sistemi di riferimento inerziali S e S' ed un corpo non soggetto a forze posizionato nel punto P. Per semplicità i due sistemi Oxyz e O'x'y'z' si muovono di moto relativo rettilineo uniforme in modo che:

- gli assi x e x' siano costantemente sovrapposti;
- gli assi y' e z' rimangano paralleli a y e z, rispettivamente.

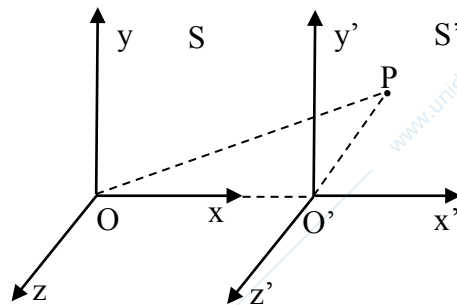


Figura 1: Sistemi di riferimento inerziali in moto relativo rettilineo uniforme.

Nei due sistemi di riferimenti il tempo è scandito da orologi sincronizzati, dunque $t=t'$. Dato che la particella P non è soggetta a forze, dalla seconda legge della dinamica:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = 0 \quad (1)$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{v} \quad (2)$$

dove \vec{v} è la velocità relativa dei due sistemi S e S', detta velocità di trascinamento.

Integrando nuovamente rispetto al tempo si ricava:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v} \cdot t' \quad (3)$$

Le eqq. (1), (2) e (3) rappresentano le trasformazioni di Galileo e sono state ottenute ipotizzando tacitamente che $t = t'$. Nell'ambito della Meccanica Newtoniana il tempo ha carattere assoluto e scorre nello stesso modo per tutti i sistemi di riferimento.

Secondo il principio galileiano di relatività tutte le leggi della Meccanica Newtoniana sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo, ovvero restano formalmente le medesime passando da un sistema all'altro qualora si applichino le trasformazioni di Galileo.

Nella seconda metà del 1800 si arrivò all'analisi completa di una nuova categoria di fenomeni, l'elettromagnetismo, con l'elaborazione delle equazioni di Maxwell. Secondo tali equazioni tutte le interazioni elettromagnetiche tra corpi si propagano nel vuoto con velocità costante

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4)$$

Il principio galileiano di relatività afferma che la velocità varia passando da un sistema di riferimento ad un altro (eq. (2)). Le equazioni di Maxwell dipenderebbero dunque dal sistema al quale si fa riferimento e non sarebbero, quindi, invarianti.

Ecco dunque il problema di individuare quel particolare sistema rispetto al quale la velocità della luce ha valore pari a c (eq. (4)), ovvero quel mezzo di trasporto nel quale le onde elettromagnetiche, in analogia con le onde meccaniche e sonore, viaggierebbero con tale velocità.

Esperimento di Michelson e Morley

Uno degli esperimenti più importanti effettuati nel tentativo di individuare l'etere è certamente l'esperimento di Michelson e Morley. L'obiettivo di tale esperimento era, secondo le intenzioni degli autori, la misura della velocità relativa della luce rispetto alla terra al variare della direzione di propagazione e l'evidenza di un eventuale moto della terra attraverso l'etere. Infatti, se la terra si muovesse in un etere stazionario, due raggi di luce, uno propagantesi nella stessa direzione e verso del moto terrestre, l'altro perpendicolare ad esso, dovrebbero impiegare tempi diversi per giungere ad un osservatore.

L'apparato utilizzato, detto interferometro di Michelson, è mostrato schematicamente nella figura 1:

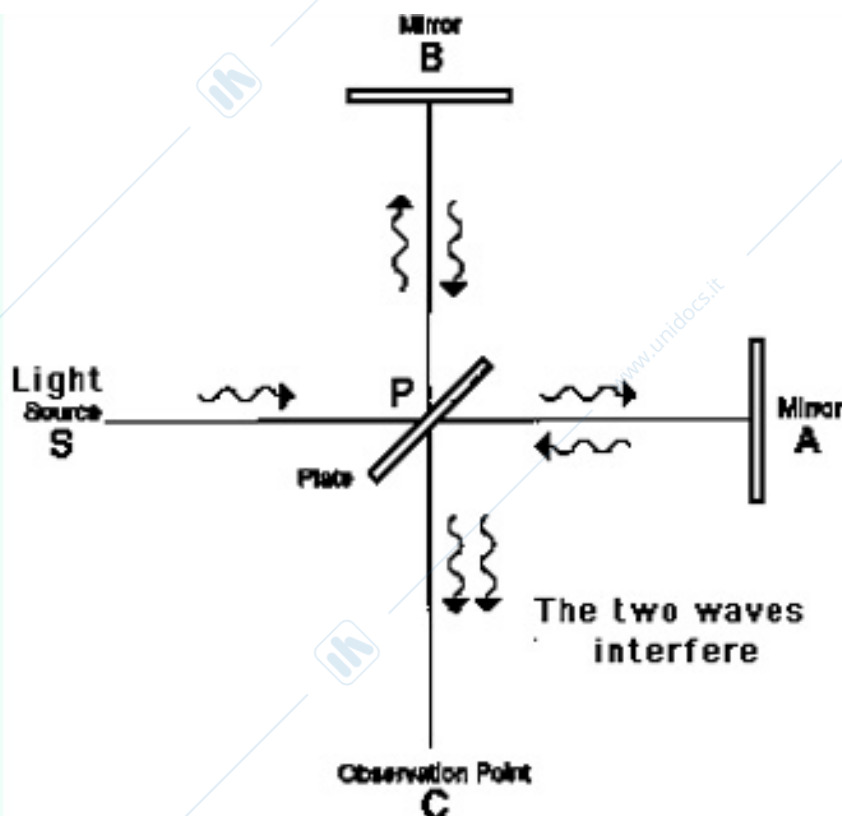


Figura 2: Schema dell'interferometro di Michelson e Morley

S indica una sorgente di luce monocromatica, P uno specchio semi-argento inclinato di 45° rispetto alla luce incidente, A e B sono degli specchi posti a distanza l_1 e l_2 da P, rispettivamente, infine C rappresenta il punto d'osservazione nel quale è presente un telescopio per l'osservazione

delle frange di interferenza. In corrispondenza dello specchio P la luce viene parzialmente riflessa verso lo specchio B e in parte prosegue verso A. I raggi riflessi dagli specchi A e B, per riflessione e per trasmissione, rispettivamente, giungono all'osservatore C.

Sia c la velocità della luce per un osservatore solidale all'etere e v la velocità della terra rispetto all'etere. Supponiamo che v sia parallela alla retta PA, con verso da P ad A.

Il tempo impiegato dal raggio di luce per passare da P ad A e ritornare in P è dato da:

$$t_{PA-AP} = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)} \quad (5)$$

Il raggio di luce che arriva allo specchio B da P ha velocità data dalla somma vettoriale della velocità della luce c rispetto all'etere e della velocità $-v$ dell'etere rispetto alla terra. Dunque si ottiene che:

$$t_{PB-BP} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad (6)$$

La differenza fra i tempi impiegati dai raggi luminosi per giungere in C risulta:

$$\Delta = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)} - \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7)$$

Ruotando l'apparato di 90° attorno all'asse verticale, la velocità v risulta ora parallela alla retta PB e la differenza dei tempi diviene:

$$\Delta' = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2l_2}{c(1-\beta^2)} \quad (8)$$

Si ha che:

$$\Delta - \Delta' \approx \frac{l_1 + l_2}{c} \beta^2 \quad (9)$$

Con la rotazione dell'interferometro si dovrebbe notare uno spostamento delle frange d'interferenza a seguito di un diverso sfasamento temporale tra i due fasci di luce.

Tuttavia, l'esperimento ebbe esito negativo: sperimentalmente non si osservano spostamenti.

Proprio a seguito di questa serie di esperimenti e nel tentativo di giustificare le incongruenze tra evidenza sperimentale e teoria, Einstein propose la cosiddetta Teoria della Relatività Ristretta (nel 1905). Secondo tale teoria tutte le leggi della fisica, non solo quelle della meccanica, sono valide ed invarianti in un qualunque sistema inerziale in moto relativo rettilineo e uniforme. Il problema è individuare le trasformazioni corrette e la corretta forma delle leggi stesse. Einstein indicò le trasformazioni di Lorentz e, da queste, individuò le forme più generali delle leggi della Meccanica. Nell'ambito della Teoria della Relatività la velocità della luce è un invariante fisico, dunque la distanza spaziale e la separazione temporale tra due eventi dipendono dal sistema di riferimento inerziale considerato. L'ipotesi di tempo assoluto viene dunque abbandonata.

Trasformata di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz descrivono la relazione tra le coordinate spaziali e temporali di due sistemi di riferimento in moto relativo tra loro. Furono ricavate per la prima volta da Lorentz nel tentativo di individuare le trasformazioni che devono valere tra le coordinate x, y, z, t e x', y', z', t' affinché la forma delle equazioni di Maxwell resti invariata.

L'ipotesi avanzata da Einstein, motivata soprattutto dagli esperimenti di Michelson e Morley, afferma che la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Si consideri una situazione, simile a quella descritta in precedenza, dove due sistemi S e S' sono in moto relativo traslatorio lungo l'asse x con assi y e z sempre paralleli. Due orologi solidali con S e S' misurano lo scorrere dei tempi t e t' , rispettivamente, in modo che $t = t' = 0$ quando le origini O e O' coincidono. Un evento fisico nei due sistemi di riferimento è caratterizzato dalle tre coordinate spaziali alle quali ora si aggiunge la coordinata temporale: (x, y, z, t) e (x', y', z', t') .

Qual è la relazione intercorre tra le coordinate spazio-temporali di un evento fisico visto da un osservatore solidale con S e da uno solidale con S' ?

Si consideri ad esempio come evento fisico l'accensione di una lampada in un punto P di coordinate (x, y, z, t) in S .

Dato il moto relativo dei due sistemi di riferimento considerati $(v, 0, 0)$ e utilizzando per essi campioni uguali per l'unità di lunghezza, si ha:

$$\begin{cases} y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (10)$$

Le relazioni tra le coordinate spazio-temporali di S e S' devono essere lineari. Infatti, secondo il principio di relatività, resta vero che un corpo non soggetto a forze deve muoversi di moto rettilineo uniforme rispetto a qualunque sistema, e un moto rettilineo uniforme è caratterizzato da relazioni lineari tra le coordinate.

Dunque:

$$x' = \gamma \cdot x + \zeta \cdot t \quad (11)$$

Con γ e ζ costanti. Per $x' = 0$, dunque per tutti i punti appartenenti al piano $y'z'$, deve valere che $x = vt$, dunque:

$$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \quad (12)$$

Analogamente, per un evento avvenuto all'istante t' nel punto di coordinata x' in S' , si ha:

$$x = \gamma' \cdot (x' + v \cdot t') \quad (13)$$

Eliminando x' tra la (11) e la (12):

$$t' = \gamma \cdot \left[t - \frac{1}{v} \cdot \left(1 - \frac{1}{\gamma \gamma'} \right) \cdot x \right] \quad (14)$$

Si supponga ora che un segnale luminoso sia emesso dall'origine comune di S e S' all'istante $t = t' = 0$. Data l'invarianza della velocità della luce c nei due sistemi, il fronte sferico dell'onda che si propaga è descritta dalle relazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \text{in S} \quad (15)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad \text{in S'} \quad (16)$$

Tenendo conto, dalla relazione (5), che $y = y'$ e $z = z'$ si ha la seguente uguaglianza:

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad (17)$$

Utilizzando la (12) e la (14) si ricava:

$$x^2 - c^2 t^2 = \gamma^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) - \gamma^2 c^2 \left[t^2 - \frac{2}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right) xt + \frac{1}{v^2} \left(1 - \frac{1}{\gamma\gamma'} \right)^2 x^2 \right] \quad (18)$$

Questa uguaglianza è verificata per qualunque valore di x e t nel caso in cui

$$\gamma = \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (19)$$

con β pari a v/c .

Si ottiene così la trasformazione delle coordinate, detta trasformazione di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{v \cdot x}{c^2} \right) \end{cases} \quad (20)$$

La trasformazione inversa si ottiene scambiando le coordinate (x, y, z, t) con (x', y', z', t') e cambiando il segno della velocità v :

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{v \cdot x'}{c^2} \right) \end{cases} \quad (21)$$

In definitiva dunque, nell'ambito della teoria della relatività, le trasformazioni galileiane sono sostituite da quelle di Lorentz:

$$\begin{cases} x' = x - v \cdot t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v \cdot x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \cdot \left(t - \frac{v \cdot x}{c^2}\right) \end{cases} \quad (22)$$

Il fattore γ è detto fattore di Lorentz. E' possibile osservare che per $v \ll c$, ovvero per velocità piccole rispetto a quelle della luce, γ tende al valore unitario e le trasformazioni di Lorentz, più generali, si riducono a quelle di Galileo.

Le trasformazioni di Lorentz sono dunque considerate dalla teoria di Einstein le trasformazioni rispetto alle quali tutte le leggi fisiche sono invarianti.

Esse rendono conto di fenomeni, già ipotizzati nell'ambito sperimentale, legati alla contrazione delle lunghezze e alla dilatazione del tempo.

Contrazione delle lunghezze

Un osservatore S deve misurare la lunghezza di un'asta AB rigida in moto con velocità $(v, 0, 0)$ lungo l'asse x del sistema di riferimento di S. La misura prevede la registrazione delle posizioni di A e di B nello stesso istante t. Un osservatore S' solidale con l'asta misura, in un qualunque istante t', la lunghezza dell'asta a riposo, detta anche lunghezza propria. Le posizioni degli estremi A e B dell'asta viste da S' e quelle viste da S sono legate dalle trasformazioni di Lorentz, ovvero:

$$\begin{cases} x'_A = \gamma \cdot (x_A - v \cdot t) \\ x'_B = \gamma \cdot (x_B - v \cdot t) \end{cases} \quad (23)$$

Sottraendo membro a membro nella (6) si ottiene:

$$x'_B - x'_A = \gamma \cdot (x_B - v \cdot t) - \gamma \cdot (x_A - v \cdot t) \quad (24)$$

Ovvero

$$x_B - x_A = \frac{1}{\gamma} \cdot (x'_B - x'_A) = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot (x'_B - x'_A) \quad (25)$$

Il termine $\sqrt{1 - \beta^2}$ è sempre < 1 , quindi l'oggetto in moto appare più corto.

In generale un corpo in moto subisce una contrazione che interessa solo la direzione del moto stesso.

Dilatazione dei tempi

Si consideri un orologio in quiete rispetto ad un osservatore S' in un punto P' di coordinate (x', y', z') . Questo orologio registra due eventi ad istanti diversi t'_1 e t'_2 . Per un osservatore S in moto con velocità $(v, 0, 0)$ rispetto all'asse x, i due eventi appaiono in posizioni diverse e a istanti diversi. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma \cdot (t'_1 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_1) \\ t_2 = \gamma \cdot (t'_2 + \frac{v}{c^2} \cdot x'_2) \end{cases} \quad (9)$$

Sottraendo membro a membro la seconda eq. dalla prima si ricava:

$$t_2 - t_1 = \gamma \cdot (t'_2 - t'_1) \quad (10)$$

La distanza temporale tra i due eventi risulta maggiore per un osservatore in moto rispetto al sistema materiale. Questo fenomeno sta alla base del cosiddetto “paradosso dei gemelli”.

Simultaneità

Si considerino due eventi che avvengono allo stesso istante t nel sistema S nelle posizioni x_1 e x_2 . Questi due eventi nel sistema S' sono registrati agli istanti

$$\begin{cases} t'_1 = \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x_1) \\ t'_2 = \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x_2) \end{cases}$$

e di conseguenza

$$t'_2 - t'_1 = \gamma \cdot \frac{v}{c^2} (x_1 - x_2)$$

Gli eventi non appaiono più in coincidenza, a meno che $x_1 = x_2$.

Nel caso in cui i due eventi considerati siano legati da causalità (ad es. l'uno la conseguenza dell'altro) e avvengano ad istanti t_1 e t_2 diversi, nel passaggio al sistema S' si ha che:

$$\begin{cases} t'_1 = \gamma \cdot (t_1 - \frac{v}{c^2} \cdot x_1) \\ t'_2 = \gamma \cdot (t_2 - \frac{v}{c^2} \cdot x_2) \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$$t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) - \gamma \cdot \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)$$

Dividendo ambo i membri per $(t_2 - t_1)$:

$$\frac{t'_2 - t'_1}{t_2 - t_1} = \gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} \right)$$

Nell'ambito della teoria della relatività la velocità della luce costituisce condizione nella quale il fattore di Lorentz diverge, dunque una velocità limite in qualunque sistema di riferimento. Tale

limite è valido per un qualunque trasferimento di informazione. Il modulo della velocità $(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$ è necessariamente sempre inferiore a c . Dunque il rapporto a primo membro è sempre positivo. Questo significa che l'ordine temporale degli eventi 1 e 2 non cambia passando da un sistema di riferimento all'altro.

Einstein's train.

Suppose a fast-moving train is moving past a platform, and suppose that at the moment when the front of the train reaches the far end of the platform (where it is about to leave the station), a firecracker explodes there, leaving scorch marks on the train and platform. Similarly, when the back of the train arrives at the start of the platform (at the other end of the station), a firecracker explodes there, leaving scorch marks on the train and platform. We consider a train whose length is such that, in the reference frame of the platform, the lengths of train and platform are the same. In this case the two explosions are simultaneous in the reference frame of the platform. The flashes of light emitted by the explosions therefore arrive at the centre of the platform at the same time. However, the flashes of light do not arrive at the centre of the train together. An observer standing on the platform ends that when the flashes arrive at him, the train has moved on, so that the flash from the front of the train has already moved past the centre of the train, and the flash from the back has not yet arrived at the centre of the train. It follows that *the flash from the front of the train arrives at a passenger seated in the middle of the train before the flash from the back does.*

Observers in all reference frames must agree with this fact, i.e. one flash arrives at the passenger before the other, because the flashes could be arranged to trigger events at the passenger. Suppose, for example, that he carries a device which will smash a glass if the flashes arrive simultaneously (or if the rear flash arrives first). If the observer at rest on the platform ends that the glass is not smashed, then it is not, irrespective of which reference frame we adopt for the purpose of calculating time and space intervals.

It follows that, in the reference frame of the train (i.e. that in which the train is at rest), the front flash arrives at the passenger before the rear flash does. Also, the two scorch marks at the front and back of the train are equidistant from the passenger in the middle of the train, and the light pulses have the same speed (by postulate 2). It follows that the firecracker explosion at the front of the train must have happened first, *before* the one at the back, and *not* simultaneous with it, in the reference frame of the train.

We infer that simultaneity is a relative concept: it depends on reference frame. It also follows that in the reference frame of the train, the train and the platform are not of the same length: the train must be longer than the platform.

Dinamica Relativistica

E' noto dalla meccanica classica che a ciascun punto materiale è associata una massa m ed una quantità di moto $\bar{p} = m \cdot \bar{u}$, dove u è la velocità del punto. La quantità di moto è legata alla forza agente sul corpo stesso mediante la legge fondamentale della dinamica classica:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (11).$$

Quale forma deve assumere la quantità di moto \bar{p} affinché le leggi della dinamica risultino invarianti rispetto alla trasformata di Lorentz?

La quantità di moto dipende dalla velocità che, passando da un sistema di riferimento all'altro, si trasforma. Si consideri la trasformazione delle coordinate spaziali e temporali espressa dalla (5). Differenziando ambo i membri delle equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} dx' = \gamma_v \cdot (dx - v \cdot dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma_v \cdot (dt - \frac{v \cdot dx}{c^2}) \end{cases} \quad \text{con} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (12)$$

v è la velocità di trascinamento di un sistema rispetto all'altro.

Definendo

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad \text{la velocità della particella nel sistema } S' \text{ lungo la direzione } x', \text{ e così via}$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{la velocità della particella nel sistema } S \text{ lungo la direzione } x, \text{ e così via}$$

la (12) diviene

$$\begin{cases} u'_x \cdot dt' = \gamma_v \cdot (u_x \cdot dt - v \cdot dt) \\ u'_y \cdot dt' = u_y \cdot dt \\ u'_z \cdot dt' = u_z \cdot dt \\ dt' = \gamma_v \cdot (1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x) \cdot dt \end{cases} \quad (13)$$

E' possibile verificare che:

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (14)$$

Dunque, elaborando la (14) si ottiene:

$$(c^2 - u'^2) \cdot dt'^2 = (c^2 - u^2) \cdot dt^2 \quad (15)$$

Definendo per analogia $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, dalla (15) si ottiene:

$$\frac{dt'}{\gamma_{u'}} = \frac{dt}{\gamma_u} \quad (16)$$

Infine, sfruttando la (16) ed elaborando la (13):

$$\begin{cases} \gamma_{u'} \cdot u'_x = \gamma_v \cdot \gamma_u \cdot (u_x - v) \\ \gamma_{u'} \cdot u'_y = \gamma_u \cdot u_y \\ \gamma_{u'} \cdot u'_z = \gamma_u \cdot u_z \\ \gamma_{u'} = \gamma_v \cdot \gamma_u \cdot \left(1 - \frac{v}{c^2} \cdot u_x\right) \end{cases} \quad (17)$$

Moltiplicando ambo i membri delle equazioni che compongono la trasformazione (17) per la massa m della particella in questione si ottiene che le quattro quantità ($m \cdot \gamma_u \cdot u_x$, $m \cdot \gamma_u \cdot u_y$, $m \cdot \gamma_u \cdot u_z$, $m \cdot \gamma_u$) si trasformano come le coordinate (x , y , z , t) della (5). Da qui l'ipotesi che la quantità di moto di una particella con velocità \bar{u} rispetto ad un sistema di riferimento inerziale sia definita dalla relazione:

$$\bar{p} = \frac{m \cdot \bar{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m \cdot \gamma_u \cdot \bar{u} \quad (18)$$

Per velocità della particella piccola rispetto alla velocità della luce, cioè per $u \ll c$, $\gamma_u \approx 1$ e la (18) si riduce alla forma classica $\bar{p} = m \cdot \bar{u}$. Tutte le esperienze compiute con particelle di alta energia, e quindi con velocità non trascurabili rispetto a quella della luce, hanno mostrato la validità della (18).

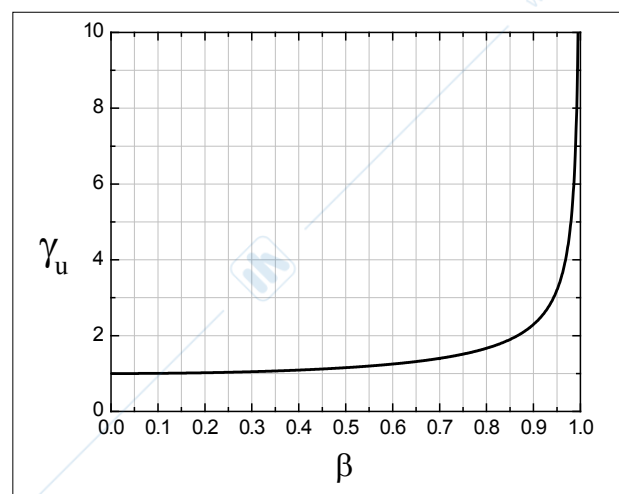


Figura 3. Andamento del fattore di Lorentz $\gamma_u = M/m$ al variare del rapporto $\beta = u/c$.

Il passaggio dalla forma classica a quella relativistica è dato dalla sostituzione della massa propria m con la quantità:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m \cdot \gamma_u \quad (19)$$

detta *massa relativistica* della particella. Questa si riduce alla massa propria solo per un osservatore rispetto al quale la particella è in quiete. All'aumentare della velocità della particella, la massa relativistica aumenta, seguendo l'andamento mostrato nella figura 1. Per velocità molto vicine a c , la massa relativistica diverge: la velocità della luce è dunque una velocità limite. Si sottolinea, inoltre, che tale variazione di massa relativistica non deriva da alcun mutamento nella struttura interna della particella, ma dalle proprietà geometriche dello spaziotempo.

La forza e la quantità di moto sono in generale legate dalla (11). Tuttavia, nell'ambito relativistico la derivata non coinvolge solo la velocità, ma anche la massa M ed in particolare γ_u , che dipende dalla velocità.

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \gamma_u \cdot \bar{u}) = m \cdot \gamma_u \cdot \frac{d\bar{u}}{dt} + m \cdot \bar{u} \cdot \frac{d\gamma_u}{dt} \quad (20).$$

Considerando le componenti normale e tangente alla traiettoria della particella considerata, sviluppando la (20) si ottiene che:

$$F_N = m \cdot \gamma_u \cdot a_N$$

$$F_T = m \cdot \gamma_u^3 \cdot a_T$$

dove a_N ed a_T sono rispettivamente la componente normale e tangente del vettore accelerazione. Da qui si evince che la forza non è più la stessa direzione dell'accelerazione a meno che non si tratti di moto circolare uniforme.

L'energia cinetica relativistica di una particella che si muove con velocità \bar{u} è definita dal lavoro necessario per portare la particella stessa da una velocità nulla sino ad \bar{u} :

$$E_k = \int_{\bar{u}=0}^{\bar{u}} \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_{\bar{u}=0}^{\bar{u}} \frac{d}{dt}(m \cdot \gamma_u \cdot \bar{u}) \cdot d\bar{s} = \int_{\bar{u}=0}^{\bar{u}} \bar{u} \cdot d(m \cdot \gamma_u \cdot \bar{u}) \quad (21)$$

Integrando per parti la (21):

$$E_k = m \cdot \gamma_u \cdot u^2 + m \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\gamma_u} - m \cdot c^2 = m \cdot \gamma_u \cdot c^2 - m \cdot c^2 = (M - m) \cdot c^2 \quad (22)$$

Secondo la (22) l'energia cinetica relativistica acquisita da una particella equivale alla variazione di massa che la particella stessa subisce passando da uno stato di quiete ad uno stato di moto alla velocità \bar{u} . In sostanza questo rappresenta il cosiddetto *principio di equivalenza tra massa ed energia*, secondo il quale massa e energia sono due misure diverse di una stessa grandezza fisica.

Dalla (22) si deduce anche che l'energia cinetica di una particella è data dalla differenza di una quantità di energia associata allo stato di moto e una quantità di energia associata allo stato di quiete, dove la prima (Mc^2) si riduce alla seconda (mc^2) in condizioni di riposo ($u = 0$). Il prodotto Mc^2 identifica dunque una grandezza generale che rappresenta in qualunque condizione il contenuto energetico totale del sistema. Essa viene definita *energia relativistica totale* ed è espressa dalla seguente:

$$E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m \cdot \gamma_u \cdot c^2 = M \cdot c^2 \quad (23)$$

Come già sottolineato, per $u = 0$ $E = m \cdot c^2$, detta *energia a riposo*. Elaborando la (22) si ottiene:

$$E = E_k + m \cdot c^2 \quad (24)$$

E' interessante osservare che per velocità piccole rispetto a quelle della luce E_k si riduce alla espressione nota nella meccanica classica. Infatti, sviluppando in serie di potenze l'eq. (23) e considerando $u \ll c$ si ricava:

$$E = \frac{m \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{u^4}{c^4} + \dots \right) \cong m \cdot c^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 \quad (25)$$

Combinando le espressioni relativistiche della quantità di moto e dell'energia totale (eqq. (18) e (23)), è possibile ricavare una forma alternativa molto interessante dell'energia totale. Infatti:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 \cdot \gamma_u^2 \cdot (c^2 - u^2) = m^2 \cdot \gamma_u^2 \cdot c^2 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = m^2 \cdot c^2 \quad (26)$$

Da cui:

$$E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4} \quad (28)$$

Per energie molto maggiori di quella a riposo, $E \approx p \cdot c$. Al limite, anche qualora l'energia a riposo sia nulla, la Meccanica Relativistica ammette l'esistenza di particelle aventi massa a riposo nulla (ad es. i fotoni) con energia ed impulsi propri e legati dalla relazione $E = p \cdot c$. Dalla (18) e dalla (23) si deduce che tali particelle devono necessariamente avere velocità pari a c .

L'equivalenza tra massa ed energia fa sì che ci si possa riferire all'una o all'altra in modo indifferente (a meno del fattore c^2). Per questo le masse a riposo delle particelle o dei nuclei sono, per comodità, comunemente espresse in termini di energia.

Ad esempio:

elettrone:	$m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	→	$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$
protone:	$m_p = 1.6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	→	$m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$
neutrone:	$m_n = 1.6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	→	$m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$

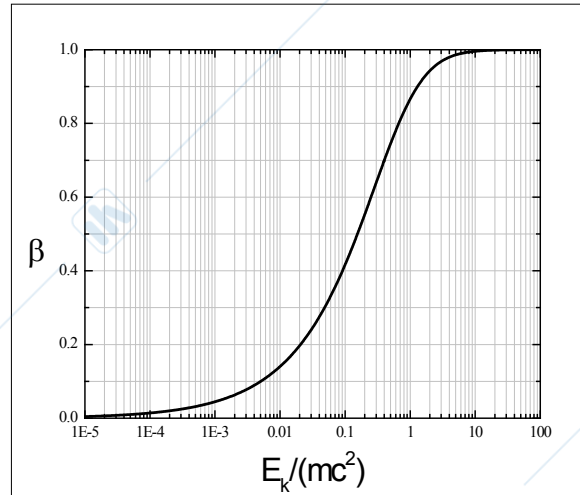


Figura 4. Andamento di $\beta = u/c$ al variare del rapporto tra energia cinetica e a riposo della particella

Spesso poi si presenta la necessità di sapere se una particella di energia cinetica E_k è in condizioni relativistiche di velocità, ovvero quanto la sua velocità sia prossima a quella della luce. Per ottenere questa informazione è sufficiente elaborare l'espressione (23) dell'energia relativistica totale e considerare la relazione (24):

$$\frac{E_k}{m \cdot c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_k}{m \cdot c^2} + 1\right)^2}} \quad (29)$$

La figura 2 mostra l'andamento di β al variare del rapporto tra energia cinetica ed energia a riposo della particella.

In particolare, per $E_k = m \cdot c^2$ il rapporto β risulta essere pari a circa 0.87. Di conseguenza, quando l'energia cinetica della particella è prossima alla sua energia a riposo la corrispondente velocità risulta essere prossima a quella della luce: la particella è relativistica.

Osservando i valori delle energie a riposo riportati nell'esempio sopra riportato si deduce che gli elettroni sono relativistici a centinaia di keV, mentre le particelle più pesanti divengono relativistiche per energie tre ordini di grandezza superiori. Ad esempio: per un elettrone da 1 MeV $\beta = 0.94$ e la massa relativistica risulta essere un fattore 1.96 maggiore di quella a riposo; per un protone da 1 MeV $\beta = 0.046$ e la sua massa relativistica è 0.1% maggiore di quella a riposo.