

INADEGUATEZZA DELLA FISICA CLASSICA

Radiazione di corpo nero

Ogni corpo, qualsiasi sia la sua temperatura, è sorgente di radiazione elettromagnetiche in virtù del moto di agitazione degli atomi che lo compongono. A basse temperature l'emissione è invisibile (infrarosso), mentre ad alte temperature una quantità apprezzabile della radiazione viene emessa su lunghezze d'onda nel visibile (da circa 380 nm, a circa 750 nm, per la sensibilità oculare). Ogni corpo è anche in grado di assorbire la radiazione elettromagnetica prodotta da altre sorgenti.

Con considerazioni di carattere termodinamico, nel 1859 Gustav Robert Kirckhoff dimostrò che il rapporto tra il potere emissivo (che sotto opportune condizioni misura l'energia della radiazione elettromagnetica emessa dal corpo) e il potere assorbente (che nelle stesse condizioni misura l'energia elettromagnetica assorbita dal corpo) è una funzione universale $u(\nu, T)$ della frequenza ν della radiazione e della temperatura T del corpo, e non dipende dalle caratteristiche specifiche del corpo stesso. Lo studio sia teorico che sperimentale di $u(\nu, T)$ diventa importante per comprendere il modo in cui radiazione e materia interagiscono fra loro, al di là di dettagli superflui come le proprietà del corpo (forma, colore, dimensioni, ...) con il quale la radiazione interagisce.

In particolare, un corpo nero è in grado di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica che riceve; proprio per questo motivo si chiama nero. Per la conservazione dell'energia, all'equilibrio termico esso irradia tutta la quantità di energia assorbita e, se è sufficientemente caldo, può emettere radiazione nel visibile. Una stella come il Sole, per esempio, può essere considerata con buona approssimazione un corpo nero. Essa assorbe la radiazione incidente senza rifletterla, ma allo stesso tempo emette luce propria.

Il corpo nero, quindi, occupa un posto speciale nella fisica teorica perché il suo potere assorbente è costante e assume sempre il valore massimo consentito. In virtù del teorema di Kirckhoff il suo potere emissivo coincide con la funzione universale $u(\nu, T)$. Questo significa che per determinare $u(\nu, T)$ sperimentalmente è sufficiente disporre di un corpo nero e misurare la radiazione da esso emessa.

In laboratorio è possibile avere un corpo nero considerando una cavità con pareti ad una certa temperatura. In condizioni di equilibrio tra radiazione ed atomi delle pareti, l'energia emessa dagli atomi nell'unità di tempo equivale a quella da essi assorbita. In tali condizioni la densità di energia del campo elettromagnetico è costante. Se si pratica un foro nelle pareti di questa cavità, parte della radiazione fuoriesce e può essere analizzata.

I primi a derivare una espressione per lo spettro di corpo nero furono Rayleigh e Jeans, i quali partendo dalla stazionarietà delle onde elettromagnetiche nella cavità e sfruttando il teorema di equipartizione dell'energia ricavarono la famosa legge:

$$u(\nu, T) = 8\pi \frac{K_B T}{c^3} \nu^2 \quad (12)$$

Tale relazione risulta essere in buon accordo con i dati sperimentali alle basse frequenze, ma diviene inaccettabile a quelle elevate, sino a divergere per $\nu \rightarrow \infty$ (catastrofe all'ultravioletto).

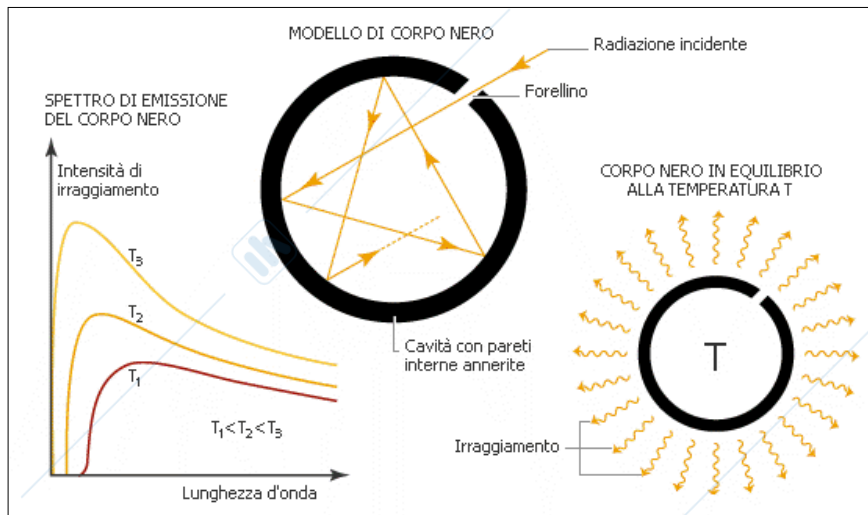


Figura 1: Spettro di corpo nero

Fu Max Planck intorno al 1900 a suggerire che, se la radiazione nella cavità è in equilibrio con gli atomi delle pareti, deve esserci una corrispondenza tra la modalità con la quale gli atomi emettono energia e la distribuzione di energia della radiazione. Ciascun atomo irradiante si comporta come un oscillatore armonico, che oscilla ad una frequenza ν . Come seconda ipotesi suggerì che *ogni oscillatore atomico può assorbire o emettere energia radiante solo in quantità definita e proporzionale al frequenza ν* . L'ipotesi di Planck afferma che, definendo E l'energia assorbita o emessa nella singola interazione radiazione-oscillatore,

$$E = h\nu$$

dove h è una costante di proporzionalità che assume lo stesso valore per tutti gli oscillatori. Quando un oscillatore assorbe o emette radiazione elettromagnetica, aumenta o diminuisce la sua energia di un quantità pari ad $h\nu$. *L'energia degli oscillatori atomici è quantizzata.*

I valori di energia possibili per un oscillatore di frequenza ν sono dunque dati da

$$E = nh\nu$$

con $n = 1, 2, \dots$

Mediante tale ipotesi, Planck derivò l'espressione della distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero (energia radiante per unità di volume alla frequenza ν e temperatura T):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/K_B T) - 1}$$

La costante h , nota come costante di Planck, risulta essere pari a $6.6256 \cdot 10^{-34}$ J s, valore ottenuto interpolando i risultati sperimentali.

Si sottolinea che l'ipotesi di quantizzazione fu una assunzione ad hoc, giustificata perché funzionava in modo sorprendente in un caso sostanzialmente ancora irrisolto.

Effetto fotoelettrico

Nel 1887 investigando le scariche elettriche tra due elettrodi come sorgente di onde elettromagnetiche, Heinrich Hertz osservò che l'intensità della scarica risulta essere maggior quando gli elettrodi sono illuminati da luce ultravioletta, ovvero che dalle superfici illuminate degli elettrodi sono emessi

elettroni. Questo fenomeno fu meglio evidenziato un anno più tardi da Hallwachs, il quale osservò emissione di elettroni da superfici metalliche (rame, rubidio, potassio, e sodio) illuminate.

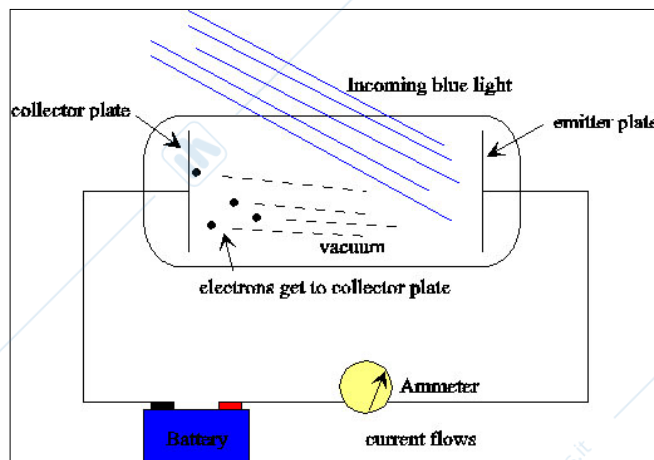


Figura 2: Dispositivo per l'osservazione dell'effetto fotoelettrico

A questo fenomeno fu dato il nome di **effetto fotoelettrico**.

Questo fenomeno mostrò immediatamente alcune peculiarità inspiegabili da un punto di vista classico: i) l'emissione di elettroni aumenta con l'intensità della radiazione incidente la superficie metallica, dato che più energia è disponibile per produrre elettroni, mentre ii) la loro energia cinetica risulta dipendere dalla frequenza della radiazione incidente. In particolare, per ogni sostanza esiste una frequenza minima, o di soglia, ν_0 al di sotto della quale nulla viene prodotto, indipendentemente dall'intensità della radiazione.

Un modo alternativo di produrre elettroni da metalli è quello di scaldarli, ovvero fornire energia E , fino al superamento del potenziale coulombiano alla superficie del metallo, chiamato funzione lavoro ϕ (lavoro necessario per strappare l'elettrone dal metallo). L'energia fornita in eccesso diviene energia cinetica dell'elettrone libero E_k . Da un punto di vista formale, il bilancio energetico è il seguente:

$$E_k = E - \phi \quad (13)$$

Se l'energia fornita E è inferiore a ϕ , nessun elettrone verrà emesso.

Considerando valida tale equivalenza, Einstein propose nel 1905 una spiegazione alquanto sbalorditiva della dipendenza della emissioni di elettroni dalla frequenza della radiazione. Egli suggerì che l'energia dell'onda elettromagnetica durante l'interazione con gli elettroni nel metallo non si distribuisce su tutto il fronte d'onda, ma risulta essere concentrata in granuli o quanti di energia (secondo le idee sviluppate da Planck per gli oscillatori armonici). Gli elettroni sono dunque in grado, in un singolo processo, di assorbire dalla radiazione elettromagnetica di frequenza ν solo valori di energia $E = h\nu$. Il campo elettromagnetico è dunque costituito da quanti di energia $h\nu$ ed interagisce con la materia secondo "collisioni" tra tali quanti e la materia stessa. Ai quanti del campo elettromagnetico venne dato successivamente il nome di fotoni. Dunque, il bilancio espresso dalla (13) assume la forma:

$$E_k = h\nu - \phi$$

Questa relazione permette di giustificare sia la presenza di una frequenza soglia $\nu_0 = \phi/h$, sia l'andamento dell'energia cinetica degli elettroni emessi al variare della frequenza ν della radiazione incidente.

L'ipotesi di quantizzazione del campo elettromagnetico introdotta da Einstein avviò l'introduzione di una teoria corpuscolare della luce.

REAZIONI ALL'IPOTESI DEL QUANTO DI LUCE

L'ipotesi di Einstein sui quanti di luce ricevette accoglienze che andavano dal tiepido allo scettico senza riserve. Ciò anche in conseguenza dell'atteggiamento di Einstein stesso il quale affermò chiaramente che i quanti di luce andavano considerati come un'ipotesi euristica più che entità reali.

Dichiarazione di Einstein al primo congresso Solvay (1911):

"Insisto sul carattere provvisorio di tale concetto (il quanto di luce) che non sembra conciliabile con le conseguenze empiricamente verificate della teoria ondulatoria"

Quello che Einstein sottintende qui è che l'alternarsi di regioni chiare e scure nelle figure d'interferenza delle onde luminose non si potrebbero formare se la radiazione avesse natura corpuscolare. Si tenga presente che siamo ai primi del '900 quando il dualismo onda-corpuscolo, che costituisce la chiave interpretativa dei fenomeni atomici, era di là da venire.

Raccomandazione per la nomina di Einstein a membro dell'accademia prussiana, da parte di alcuni membri della stessa, tra cui Planck (1913):

"si può dire che non ci sia quasi nessuno dei grandi problemi, di cui la fisica moderna è così ricca, al quale Einstein non abbia dato un contributo rilevante. Che possa a volte aver mancato il bersaglio, come per esempio, nel caso dell'ipotesi dei quanti di luce, non può essere considerato troppo grave: è impossibile infatti introdurre idee veramente nuove nelle più esatte delle scienze, senza correre a volte qualche rischio."

Qui il rifiuto dei quanti di luce da parte delle maggiori autorità accademiche è espresso in modo categorico. Dovettero passare una ventina d'anni da questa dichiarazione prima che la teoria atomica conferisse al fotone la "dignità" di ente reale. Ironia della sorte: Einstein si mantenne sempre dubbioso riguardo a questa teoria.

Effetto Compton

Gli esperimenti sull'effetto fotoelettrico riguardarono principalmente la radiazione visibile e ultravioletta. Nel 1923 Arthur Holly Compton fece un esperimento in cui raggi X di frequenza ben definita venivano inviati su un bersaglio di grafite. I raggi diffusi dal bersaglio a vari angoli θ , analizzati in frequenza, mostravano due picchi: uno con la stessa frequenza dei raggi incidenti e l'altro con frequenza via via sempre minore all'aumentare dell'angolo di diffusione secondo la relazione:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_c}{c} (1 - \cos \theta) \quad (14)$$

con $\lambda_c = 2.4262 \cdot 10^{-12}$ m lunghezza d'onda Compton per elettroni.

Quest'ultima componente non può essere spiegata classicamente. Secondo la teoria classica, gli elettroni del bersaglio, interagendo con la radiazione incidente, irradiano onde elettromagnetiche della stessa frequenza.

Compton riuscì a spiegare i risultati sperimentali facendo ricorso alla teoria della quantizzazione del campo, ovvero all'ipotesi che questo sia costituito da fotoni.

Un'onda elettromagnetica trasporta momento oltre ad energia. Mediante le equazioni di Maxwell è possibile mostrare che un'onda elettromagnetica piana che si propaga con velocità c è caratterizzata dalla relazione energia – momento seguente:

$$E = pc \quad (15)$$

Dalla teoria della relatività, l'energia di una particella di massa a riposo m_0 è data da:

$$E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4} \quad (16)$$

Le espressioni (14) e (15) diventano identiche quando la massa $m_0 = 0$ e la particella si muove a velocità c . Dunque il fotone mediatore dell'interazione dell'onda elettromagnetica sarà una particella in moto con velocità c , energia $E = hv$ e quantità di moto $p = E/c$.

Accettata l'ipotesi di quantizzazione del campo elettromagnetico, Compton considerò che tra lo stato iniziale fotone-elettrone e quello finale deve valere la conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il tutto avviene dunque come se si fosse in presenza di urto tra due particelle, una delle quali con massa a riposo nulla. In tale urto si trascura l'energia di legame dell'elettrone (si considerano gli elettroni atomici più debolmente legati, ovvero quelli esterni), considerato libero ed in quiete rispetto all'osservatore. Dalla conservazione dell'energia e del momento si ricava che:

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \quad (17)$$

$$E + m_e c^2 = E' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

Dove p e p' sono rispettivamente la quantità di moto del fotone prima e dopo l'urto, E e E' sono rispettivamente l'energia del fotone prima e dopo l'urto, p_e il momento dell'elettrone di massa a riposo m_e dopo l'urto. Ricavando p_e^2 da entrambe le equazioni e uguagliando le espressioni ottenute si ricava la seguente:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (18)$$

La somiglianza tra la (18) e la (14) va oltre la semplice similarità algebrica. Da una parte abbiamo una relazione energia-momento $E = pc$ per l'onda elettromagnetica che in ambito relativistico equivale alla relazione energia- momento di una particella di massa a riposo nulla. Dall'altra l'analisi dell'interazione onda - elettrone che affrontata come urto particella di massa nulla - elettrone ben riproduce formalmente l'evidenza sperimentale.

La conclusione ovvia è scrivere $E = hv$ ed $E' = hv'$, con h costante di proporzionalità tra frequenza dell'onda elettromagnetica ed energia ad essa associata durante la "collisione". La (14) diviene:

$$\frac{1}{v'} - \frac{1}{v} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \quad (19)$$

Dal confronto tra questa relazione e la (14) si ottiene che $\lambda_C = h/m_e c$. Dai valori noti di λ_C , m_e e c si ricava che la costante h è pari alla costante di Planck.

Per completezza resta da spiegare la presenza di raggi X diffusi alla stessa frequenza di quelli incidenti. Ebbene, tali raggi X derivano dall'urto di fotoni con elettroni più fortemente legati all'atomo. In tal caso è l'atomo intero ad interagire. Nella (19) la massa dell'elettrone va dunque sostituita con quella dell'intero atomo e la variazione di frequenza diviene così trascurabile.

L'effetto Compton costituisce la prima dimostrazione della quantizzazione della luce. Anche dopo l'esperimento di Compton tale proprietà venne messa in discussione e dibattuta a lungo in ambito scientifico. Si dovranno aspettare gli anni 70-80 per arrivare ad una conferma definitiva.

Più in generale si arriverà a pensare ai fotoni come le particelle mediatrici dell'interazione elettromagnetica. Quando un'onda elettromagnetica interagisce con una qualunque particella carica

(emissione o assorbimento), le quantità di energia e di momento scambiate sono quelle corrispondenti ad un fotone. Qualunque interazione elettromagnetica può essere pensata come uno scambio di fotoni tra particelle cariche interagenti.

Atomo nucleare di Rutherford

La scoperta delle prime particelle subatomiche, gli elettroni e i protoni, avvenne verso la fine del 1897, quando mediante gli esperimenti sui raggi catodici prima Thomson e poi Goldstein scoprirono l'esistenza di queste particelle a carica negativa e positiva.

Si scoprì dunque che l'atomo non è una particella indivisibile, ma altre entità di dimensioni inferiori lo costituiscono.

Un atomo è da subito considerato un agglomerato di Z elettroni e altrettanti protoni, essendo in condizioni normali elettricamente neutro.

Passiamo in rassegna alcune proprietà fondamentali:

1) Ordine di grandezza dei raggi atomici

Approssimando gli atomi di un elemento monoatomico allo stato solido o liquido come sfere di raggio R a contatto tra loro, vale la relazione:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{PA}{N_A \frac{4}{3} \pi \cdot R^3}$$

dove PA e ρ sono il peso atomico e la densità dell'elemento considerato, rispettivamente, mentre N_A il numero di Avogadro. Ricavando R ed introducendo i valori relativi ai diversi elementi, si ricavano in modo semplice raggi atomici dell'ordine dei $10^{-9} - 10^{-10}$ m, in buon accordo con l'evidenza sperimentale.

2) Numero di elettroni in un atomo

Il numero atomico Z caratteristico di un elemento può essere stimato mediante lo studio dell'interazione di raggi X con una targhetta bersaglio costituita dall'elemento considerato.

Infatti, irradiando uno strato sottile di materiale (una lastra di spessore h) caratterizzato da un numero atomico Z incognito e caratterizzato da un numero N di atomi per unità di volume, è possibile verificare che l'intensità I della radiazione diffusa è legata all'intensità I_0 della radiazione incidente dalla relazione:

$$I = I_0 \cdot \exp(-\sigma_T NZh) \quad (26)$$

dove σ_T rappresenta la sezione d'urto di Thomson relativa all'interazione dei raggi X con gli elettroni del bersaglio. La sezione d'urto ha le dimensioni di una superficie e può essere vista, da un punto di vista geometrico, come l'area efficace che gli elettroni del mezzo offrono alla radiazione incidente ai fini dell'interazione.

In generale la quantità sezione d'urto σ è definita in riferimento all'interazione della radiazione incidente con una particella bersaglio d'interesse, che più frequentemente è l'atomo nel complesso o il nucleo atomico. Anche in questi casi la sezione d'urto identifica una quantità che ha le dimensioni di un'area e che può essere vista come l'area efficace del bersaglio in relazione alla interazione con la particella incidente. Maggiore è la sezione d'urto, maggiore è l'area efficace del bersaglio vista dalla particella incidente, maggiore è la probabilità che quest'ultima interagisca con il bersaglio stesso mediante l'interazione in questione. Ecco che la sezione d'urto rappresenta in generale una quantità legata alla probabilità di interazione proiettile-bersaglio.

Come si vedrà più nel dettaglio, in ambito neutronico il prodotto σN , con N numero di nuclei per unità di volume presenti nel mezzo irradiato, è chiamata sezione d'urto macroscopica, ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza e costituisce nella sostanza la probabilità per unità di percorso che un neutrone ha di interagire con i nuclei del mezzo.

Ritornando all'espressione (26), la sezione σ_T può essere calcolata mediante un approccio classico. Dall'analisi dei risultati sperimentali è possibile così ottenere una stima del valore Z .

3) Disposizione degli elettroni in un atomo

Il primo modello atomico proposto è quello di Thomson. E' noto anche come modello a panettone, in quanto l'atomo è pensato come una sfera di raggio R all'interno della quale le cariche negative e positive sono distribuite in modo uniforme.

Fu Rutherford nel 1911 a dimostrare, sulla base di una serie di esperimenti di diffusione delle particelle α da vari materiali effettuata da Geiger e Marsden, l'inadeguatezza del modello di Thomson ed a proporre il cosiddetto atomo nucleare.

Per verificare la validità del modello atomico, furono avviati esperimenti nei quali bersagli di un dato elemento vengono bombardati con particelle cariche, le quali fungono così da sonde microscopiche del materiale. Geiger e Marsden utilizzarono particelle α prodotte da sostanze radioattive, sostanzialmente le uniche particelle disponibili con energia sufficientemente elevata.

Nella figura 4 è riportato uno schema dell'esperimento in questione.

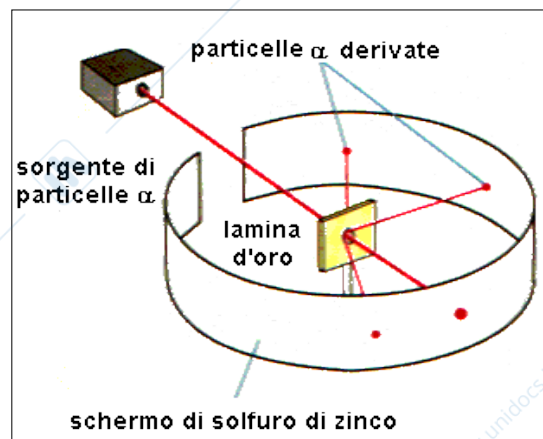


Figura 4. Schema dell'esperimento di Geiger e Marsden

Un fascio collimato di particelle α è fatto incidere normalmente su un bersaglio sottile di oro (spessore dell'ordine di 10^{-7} m). Il foglietto d'oro è circondato da un foglio circolare di Solfuro di Zinco (ZnS) che funge da schermo di rivelazione che genera una scintilla visibile quando colpito da particelle. Dallo studio della distribuzione angolare della particelle α diffuse, fu possibile ricavare molte informazioni. L'analisi dettagliata di questo esperimento, anche detto esperimento di Rutherford, sarà affrontata successivamente. Tuttavia, uno dei risultati più interessanti fu l'osservazione di una frazione non trascurabile di particelle α deviate a grandi angoli, alcune anche all'indietro, ovvero ad angoli maggiori di 90° .

Tale risultato è inspiegabile con il modello di Thomson. Esso infatti prevede che le particelle α non subiscano nessuna deviazione significativa dalla loro traiettoria iniziale, essendo debole la forza coulombiana esercitata dalle distribuzioni uniformi di cariche positive e negative. Al contrario, la deviazione a grandi angoli dimostra l'azione di forze molto intense.

Per spiegare l'evidenza sperimentale, Ernest Rutherford propose un modello atomico caratterizzato da un nucleo centrale nel quale sono concentrate le cariche positive e le cui dimensioni sono molto più piccole dell'atomo, attorno a cui si muovono gli elettroni all'interno del volume atomico. Le particelle α attraversano il bersaglio interagendo con più probabilità con gli elettroni atomici,

dunque risentono di una forza totale debole e non subiscono deviazioni. Tuttavia, quando si ritrovano a passare in prossimità del nucleo, l'intensità di tale forza aumenta rapidamente e tutto avviene come se si trattasse dell'urto colombiano tra due particelle cariche.

Il modello proposto da Rutherford venne successivamente confermato da Geiger e Marsden.

Da un punto di vista classico non è possibile giustificare un simile modello. Infatti, secondo una visione classica, le particelle cariche hanno moti accelerati, dunque irradiano energia. In particolare, gli elettroni perdendo energia dovrebbero in tempi assai brevi cadere sul nucleo. In conclusione, con la leggi della fisica classica non è possibile spiegare la stabilità della materia.

Righe spettrali e livelli energetici

Un qualunque solido, liquido o gas, se scaldato ad una temperatura sufficientemente elevata emette luce a causa del moto di agitazione termica degli atomi che lo compongono. La situazione più semplice da studiare è costituita dai gas rarefatti, ovvero gas a pressione molto bassa per i quali gli atomi sono, in media, molto distanti tra loro e interagiscono debolmente. In tal caso l'emissione (e l'assorbimento) di luce è un fenomeno caratteristico del singolo atomo.

Lo spettro di emissione di un gas rarefatto non è continuo, ma consiste in una serie di intervalli stretti, separati da zone scure molto più larghe. Ciascuno degli intervalli illuminati costituisce una riga spettrale. Le lunghezze d'onda alle quali corrispondono le righe spettrali sono tipiche dell'elemento considerato.

Se della radiazione con spettro continuo investe una data sostanza, nella radiazione trasmessa o riflessa si osservano righe scure, evidenza di un assorbimento. Queste righe costituiscono il cosiddetto spettro di assorbimento.

Lo spettro dell'idrogeno può essere misurato utilizzando l'apparato mostrato nella figura 3. Esso presenta una struttura piuttosto semplice. Le lunghezze d'onda delle diverse righe sono espresse dalla formula di Balmer-Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (20)$$

dove n_i e n_f sono numeri interi tali che $n_f > n_i$ mentre R , costante pari a $1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ ricavata sperimentalmente, è detta costante di Rydberg.

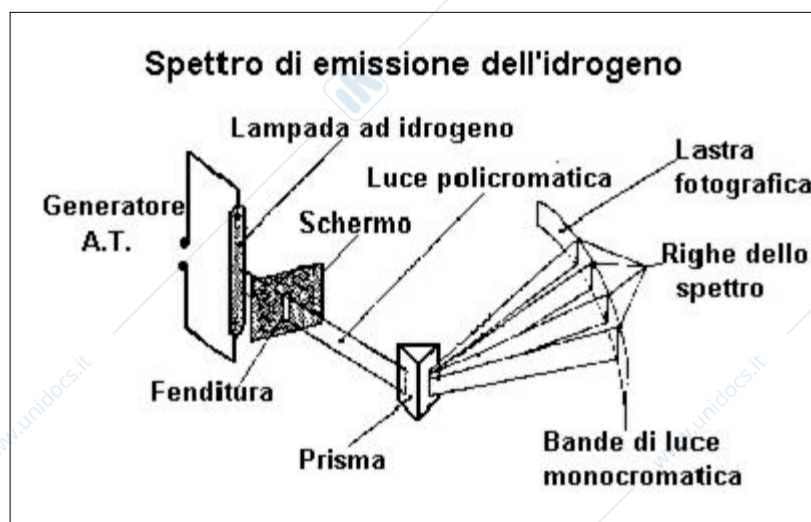


Figura 3. Apparato sperimentale per la misura dello spettro di emissione dell'idrogeno

Per tenere conto dell'evidenza sperimentale, in particolare della stabilità della materia e degli spettri atomici discreti (come quello dell'idrogeno), Niels Bohr nel 1913 ipotizzò che la presenza di un numero discreto di righe è da attribuirsi al fatto che gli atomi o le molecole responsabili dell'emissione possano esistere solo in determinate configurazioni energetiche, dette stati di energia, e che nel passaggio da uno stato ad un altro di energia diversa sia emesso un fotone. In particolare lo stesso Bohr affermò che:

- gli elettroni atomici possono trovarsi solo in certe configurazioni stabili (stati), in numero discreto, alle quali corrispondono date energie; lo stato di energia minima è detto stato fondamentale, mentre gli altri corrispondono a stati eccitati dell'atomo;
- tra tali stati possono avvenire delle transizioni elettromagnetiche, ovvero l'atomo può passare da uno stato di energia E_i a uno di energia E_f mediante l'emissione o l'assorbimento di un fotone di frequenza:

$$\nu_{i,f} = \frac{|E_i - E_f|}{h}$$

I valori sperimentali delle righe spettrali ottenuti con l'idrogeno riprodotti mediante la (20) possono essere interpretate con le ipotesi di Bohr se le energie dei vari stati sono date da:

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Dove il segno sta ad indicare che si tratta di stati legati, ovvero stati dai quali per strappare l'elettrone è necessario compiere dall'esterno un lavoro positivo.

Il diagramma dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno è riportato nella figura 3. Ogni livello è individuato dal corrispondente numero quantico n .

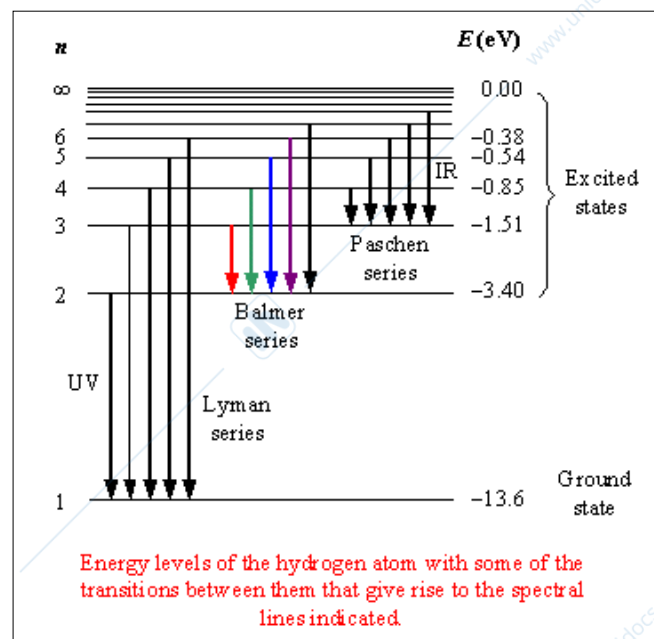


Figura 3. Diagramma dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno.

La formula (21), ricavata utilizzando i risultati sperimentali, venne successivamente giustificata da Bohr sul piano teorico.

Teoria di Bohr per l'atomo di idrogeno

La teoria di Bohr è basata su una trattazione semi-classica del moto di un elettrone attorno al nucleo di un atomo sotto l'azione di una forza coulombiana. Si consideri, per generalità, un atomo idrogenoide costituito da un atomo con numero atomico Z , ma ionizzato $Z-1$ volte, ovvero un atomo con un solo elettrone in orbita attorno al nucleo. Le orbite considerate da Bohr sono circolari. Secondo la legge fondamentale della dinamica, considerando l'accelerazione del moto puramente centripeta ed una forza coulombiana tra il nucleo di carica $Z \cdot e$ e un elettrone di carica e , si ha:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \quad (22)$$

dove v è la velocità dell'elettrone e r il raggio dell'orbita. L'energia potenziale coulombiana è:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

mentre l'energia cinetica risulta

$$T(r) = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

Tenendo conto della (22), l'energia meccanica totale è

$$E(r) = V(r) + T(r) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (23)$$

mentre il momento angolare risulta

$$L(r) = m_e v r = \sqrt{\frac{m_e Ze^2 r}{4\pi\epsilon_0}} \quad (24)$$

L'espressione (23) unita alle ipotesi relative alla quantizzazione dei livelli energetici espressa dalla (21) implica che possano esistere solo valori discreti per i raggi r delle orbite possibili, che risultano dunque quantizzate. E' dunque necessario individuare un nesso tra i risultati di un modello classico che prevede funzioni continue e l'evidenza sperimentale della discretizzazione dei livelli. Tale nesso è da Bohr enunciato in forma di principio, il cosiddetto principio di corrispondenza.

Principio di corrispondenza

Le leggi classiche hanno dei limiti di applicazione quando si trattano sistemi microscopici, ma restano molto utili per descrivere il comportamento di oggetti macroscopici. La distinzione tra mondo macroscopico e mondo microscopico non è tuttavia netta, dato che è possibile realizzare oggetti macroscopici mediante l'unione di molti oggetti microscopici. Come non è possibile distinguere particelle classiche da particelle quantistiche. Nel caso dell'atomo di idrogeno, ad

esempio, se si considerano numeri quantici molto grandi il raggio dell'orbita aumenta, sino a dimensioni macroscopiche, dove sono applicabili le leggi classiche.

Dunque, secondo Bohr, **una teoria dei quanti credibile deve fornire risultati in accordo con quelli della teoria classica per valori elevati dei numeri quantici.**

Dalla formula di Balmer-Rydberg e dalla relazione che esprime i livelli energetici associati alle righe spettrali proposta da Bohr (espressione 21) si ricava che per valori grandi dell'indice n_i (e di conseguenza di n_f) la distanza tra i livelli energetici diviene talmente piccola da approssimare una distribuzione continua, simile alla visione classica. In tale situazione la frequenza di rotazione degli elettroni risulta classicamente pari alla frequenza del fotone emesso dall'atomo. In pratica, per una transizione dal livello $n-1$ al livello n , con n molto grande, si ha dalla (20) che la frequenza del fotone assorbito è pari a:

$$\nu_{qu} = Rc \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = Rc \left(\frac{2n-1}{n^4 - 2n^3 + n^2} \right) \cong \frac{2Rc}{n^3} \quad (25)$$

Ricavando n dalla (21) e sostituendo nella (25) si ottiene che:

$$\nu_{qu} \cong 2 \sqrt{\frac{|E|^3}{h^3 c R}}$$

Secondo un approccio classico la frequenza della radiazione emessa è all'equilibrio pari alla frequenza di oscillazione dell'oscillatore microscopico, ovvero dell'elettrone in moto periodico attorno al nucleo. Dunque la frequenza ν_{qu} è da uguagliare, per n molto grandi, alla frequenza di rotazione dell'elettrone in moto sull'orbita n -esima di raggio r_n con velocità v_n , ovvero $\nu_{cl} = v_n / 2\pi r_n$. Mediante la (22) e la (23) è possibile esprimere v_n in funzione dell'energia meccanica totale E ottenendo la seguente:

$$\nu_{cl} = \frac{4}{e^2} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0^2 |E|^3}{m}}$$

Uguagliando le due espressioni ottenute per ν si ricava per l'atomo di idrogeno ($Z=1$) la costante di Rydberg in forma estesa:

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1} \quad (26)$$

Tale risultato è in accordo con il valore sperimentale ottenuto da Balmer e Rydberg.

Utilizzando la (26) nella (21) è possibile allora calcolare l'energia degli stati discreti dell'elettrone:

$$E_n = - \frac{m_e Z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} \quad (27)$$

i cui valori, riportati nella figura 3, risultano essere coerenti con l'energie dei fotoni emessi dalle transizioni elettroniche, ovvero con le righe spettrali osservate.

Sfruttando la (23) e la (27) si arriva all'espressione con cui calcolare i raggi r_n delle orbite degli elettroni:

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \cdot m_e Z e^2} = \frac{n^2}{Z} a_0 \quad \text{con} \quad a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \cdot m_e e^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (28)$$

La quantità a_0 è detta raggio di Bohr e rappresenta il raggio dell'orbita dell'atomo di idrogeno per $n = 1$, ovvero dello stato fondamentale.

Infine, dalle relazione (22) e (28) si ottiene l'espressione del momento angolare dell'elettrone, ovvero:

$$L_n = m_e v_n r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dove r_n è il raggio della n -esima orbita permessa, specificata dal numero quantico principale n , e v_n è la velocità dell'elettrone corrispondente. Il momento angolare dell'elettrone è dunque quantizzato.

Il modello di Bohr venne successivamente esteso da Sommerfeld per trattare orbite ellittiche o atomi con più elettroni. Esso costituì un passaggio fondamentale per la comprensione di certi fenomeni atomici inspiegabili da un punto di vista classico. Tuttavia risultò inadeguato a trattare atomi più complessi, a partire da quello di elio.