ELETTROMAGNETISMO E ONDE ELETTROMAGNETICHE

Nel corso del secolo XIX l'elaborazione della teoria dell'elettromagnetismo diede origine alla definizione delle equazioni di Maxwell, che descrivono in forma generale la relazione esistente tra la componente elettrica E e magnetica B di un campo elettromagnetico generate da una carica elettrica (o, più in generale, una distribuzione di carica elettrica ρ) in moto relativo rispetto ad un osservatore:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r},t)\\
&\nabla\cdot\vec{B} = 0\\
&\mathrm{rot}\,\vec{E} = \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}(\vec{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}\qquad (1)$$

dove j è la densità di corrente.
Solitamente, in geometrie semplici, è più conveniente riferirsi alle equazioni di Maxwell in forma integrale, rispetto alla loro forma differenziale. Si ricavano semplicemente utilizzando il teorema della divergenza di un vettore u:

$$\int_S \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \mathrm{div}\,\vec{u}\,dV \qquad (2)$$

e il teorema della rotazione (di Stokes):

$$\oint \vec{u}\,d\ell = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,dS \qquad (3)$$

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
&\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r},t)\,dV\\
&\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 0\\
&\oint \vec{E}\,d\ell = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS\\
&\oint \vec{B}\,d\ell = \mu_0\int_S \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\,dS + \mu_0\varepsilon_0\int_S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS
\end{aligned}\qquad (4)$$

L'interpretazione fisica delle equazioni di Maxwell è più agevole nella forma integrale. In particolare, la prima equazione è la legge di Gauss, per cui una carica q è la sorgente di q/ε_0 linee di campo elettrico E. La seconda equazione stabilisce che le linee del vettore induzione magnetica B sono chiuse, ovvero il vettore B è solenoidale in tutti i punti dello spazio. La terza equazione è la legge di Faraday-Lenz dell'induzione magnetica, ovvero un campo magnetico variabile nel tempo induce una forza elettromotrice F non conservativa pari alla circuitazione del campo elettrico indotto. L'ultima equazione esprime la legge di Ampere modificata da Maxwell per includervi la corrente di spostamento.

L'anello di congiunzione tra l'elettromagnetismo e la meccanica è rappresentato dalla forza di Lorentz, azione meccanica che una particelle subisce quando si muove con velocità v in un campo elettromagnetico generato da altre cariche:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times B) \qquad (5)$$

dove p è la quantità di moto trasferita durante l'interazione.

Il sistema di equazioni (1) ammette soluzione non nulla anche in regioni di spazio in cui non sono presenti né cariche, né correnti, ovvero $\rho = j = 0$. Infatti si ottiene:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ &\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \qquad (6)$$

Tale sistema ammette soluzioni oscillanti date da:

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \qquad (7)$$

$$\Delta\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

dove l'operatore Δ è l'operatore Laplaciano (div·grad).
Le (7) hanno la stessa forma matematica dell'equazione delle corde vibranti, in cui una perturbazione trasversale generata in un punto si propaga, per effetto della continuità del mezzo, lungo tutto il sistema meccanico. Si deduce da considerazioni dimensionali che $\mu_0\varepsilon_0$ è l'inverso di una velocità al quadrato, per cui

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299792458 \frac{m}{s} \qquad (8)$$

deve rappresentare la velocità di propagazione della perturbazione elettromagnetica. La differenza sostanziale con l'analogo meccanico sta nel fatto che la propagazione delle onde elettromagnetiche non necessita di nessun supporto materiale.

Si dimostra che la classe di soluzioni fisiche non banali comprende essenzialmente funzioni oscillanti in modo armonico sia nel tempo che nello spazio, di cui riportiamo la forma generale:

$$\begin{aligned} &\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \\ &\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \end{aligned} \qquad (9)$$

oppure nella forma esponenziale

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)]$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0(\vec{r})\exp[i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)] \qquad (10)$$

La forma esplicita della soluzione dipende dalle condizioni al contorno associate al problema specifico e può variare sensibilmente da caso a caso, tanto da descrivere onde generate da sorgenti puntiformi, da dipoli oscillanti o da sorgenti estese, onde stazionarie in una cavità, fasci gaussiani, fasci guidati in fibra, ecc..

Le caratteristiche salienti delle onde, specificando il significato dei termini che compaiono nella (9) e nella (10).

- L'onda e.m. consiste di un campo elettrico e di un campo magnetico fortemente accoppiati: i due vettori non sono scindibili, e hanno una stretta dipendenza reciproca.
- $\vec{E}_0(\vec{r})$ e $\vec{B}_0(\vec{r})$ rappresentano l'ampiezza dell'onda (vale a dire il massimo della perturbazione e.m. nello spazio) e, in generale, dipendono dalla posizione (per esempio r può essere la distanza dalla sorgente).
- Se ci mettiamo in un punto fissato dello spazio ($r = r_0$)

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(r_0)\cos(\omega t + \delta(r_0))$$

e vediamo che i campi oscillano armonicamente nel tempo con pulsazione

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

con ν frequenza e T periodo temporale. ω misura in rad/s, ν viene espressa in Hz e T in s.

- Se invece consideriamo un istante fissato (t = t0)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha(t_0))$$

e vediamo che i campi oscillano armonicamente nello spazio con pulsazione di modulo

$$k = 2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda}$$

con λ periodo spaziale (o lunghezza d'onda) e n frequenza spaziale (o numero d'onda). Solitamente n viene usato solo in ambito spettroscopico e valutato in cm^{-1}, mentre λ viene comunemente indicato in nm, μm, mm, ecc. a seconda del tipo di radiazione studiata. $\vec{k}$ prende il nome di vettore d'onda; la sua direzione indica la direzione di propagazione della perturbazione ondosa.

- I campi oscillano in ogni punto dello spazio in fase.
- Consideriamo ora per semplicità onde piane di ampiezza uniforme, ovvero onde caratterizzate da fronte d'onda piano. Allora elaborando opportunamente le eqq. di Maxwell si ricava

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_0$$

il che significa che i vettori k, E e B sono mutuamente ortogonali. Perciò i campi oscillano trasversalmente rispetto alla propagazione dell'onda, punto per punto ed istante per istante.

- Inoltre dall'equazione precedente si deduce che

$$\frac{\omega}{k} = \nu\lambda = c$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c}.$$

La prima specifica che le periodicità temporale e spaziale sono correlate, la seconda che anche i moduli delle ampiezze non sono indipendenti.
Un campo elettromagnetico è caratterizzato da una densità di energia, ovvero energia per unità di volume, data da:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0}B^2$$

Tale energia trasportata da un'onda elettromagnetica è chiamata radiazione elettromagnetica.
L'intensità dell'onda elettromagnetica, definita come la quantità di energia trasportata dall'onda per unità di tempo e per unità di superficie, è data dal prodotto tra la densità di energia e la velocità dell'onda stessa. Nel vuoto tale intensità assume l'espressione:

$$I = u * c = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}cB^2 = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{c}{\mu_0}B^2$$

Dato che una carica ferma o in moto rettilineo uniforme rispetto ad un osservatore genera un campo statico, la carica non irradia energia elettromagnetica. Quando una carica si muove di moto accelerato essa irradia energia secondo la seguente espressione:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

Per mantenere accelerata la carica è dunque necessario fornire energia per compensare la dissipazione sottoforma di radiazione elettromagnetica.
Durante l'interazione con la materia i campi E e B della radiazione elettromagnetica agiscono sulle cariche presenti nel mezzo mediante la forza di Lorentz, dunque comunicano all'unità di volume del materiale una certa quantità di moto data dall'impulso trasferito nell'unità di tempo. Quando l'onda trasferisce tutta la sua energia, la quantità di moto p che investe il materiale è diretta secondo la direzione di propagazione dell'onda e ha modulo pari all'energia trasportata dall'onda stessa divisa per la velocità di propagazione dell'onda. Riferendosi ad una propagazione nel vuoto, si ha che:

$$p = \frac{E}{c}$$