Cheet sheet Elettrotecnica

Se $p \geq 0$ allora il bipolo è detto passivo cioè il bipolo assorbe energia.

Se $p \leq 0$ allora il bipolo eroga (ossia attua un assorbimento negativo di energia) ed è detto attivo

Kcl: correnti entranti – correnti uscenti nello stesso nodo = 0

Kvl: tensione stesso verso – verso opposto nella stessa maglia (no generatori corrente) = 0

*attenta ai versi di corrente e tensione!!!!!

Massima potenza erogabile: $P_{max} = \frac{v^2}{4R}$

Teorema di Tellegen: potenze entranti (attenzione convenzione degli utilizzatori), tutto il circuito = 0

*Se R rientra in un cortocircuito (in parallelo con un cortocircuito o attraversato da i=0) = 0 (la corrente sceglie sempre il percorso SENZA RESISTENZA)

*Cortocircuito: V=0 *Circuito aperto: I=0

Resistenza equivalente: serie (R+R); parallelo (R//R)

Partitori di tensione e corrente: posso farlo solo se resistenze in serie o parallelo, trovo una variabile specifica tra tutte quelle presenti. Se le tensioni hanno lo stesso verso di rotazione si mette un meno.

Trasformazione di generatori non ideali: V in serie con R ⇔ I in parallelo con R ; ricordarsi di modificare il valore della variabile in comando con V=I*R

Sovrapposizione: spegni un generatore indipendente e svogli l'intero circuito, poi ripeti con l'altro generatore. Non posso spegnere generatori dipendenti!!!

Da usare nel caso in cui sorgente adinamica + sinusoidale, oppure sorgenti sinusoidali con ω diverse

Teorema di Thevenin: Poni i=0; prima cerchi Voc= tensione su circuito aperto, cerchi tensione dal circuito (kvl). Poi cerchi la resistenza Eq, spegnendo tutte le sorgenti. Ricordarsi di ridisegnare il circuito equivalente di Thevenin alla fine!!!; aggiungere, se richiesto, solo alla fine il blocco a cui si fa riferimento

Casi particolari (IDEALE) Thevenin/Norton: Vt//(qualsiasi cosa) = Vt ; i_s in serie con qualsiasi cosa = i_s

Formula di Millman: per trovare la tensione fra i due nodi in un circuito binodale = trovo tutte le tensioni e correnti del circuito. $Vm = \frac{\Sigma \pm i_{sk} + \Sigma \pm \frac{V_{sk}}{R_{sk}}}{\Sigma \pm \frac{1}{R_{sk}}}$ con i_sk e v_sk valori di generatori, positivi se concordi con Vm

Circuiti con generatori pilotati: prima di tutto determinare le variabili pilotanti!
sono componenti ATTIVI: p_uscente >/< 0. MAI cancellare le variabili pilotanti durante le semplificazioni. Non lo si può spegnere nell'analisi circuitale, ma si può supporre la corrente circolante uguale a zero, quindi supporre che sia spento. Il generatore pilotato può generare resistenze negative quando viene semplificato nel circuito. Sono doppi bipoli che hanno bisogno di un comando:

Durante Thevenin: x trovare Req, mettere un generatore tra i morsetti a e b, scegliere quello piú comodo per trovare facilmente la variabile pilotante: se devo cercare $\boldsymbol{i_p} \Rightarrow \boldsymbol{V_s}$; $\boldsymbol{v_p} \Rightarrow \boldsymbol{I_s}$

Rappresentazione in comando: **(trovare le variabili dipendenti secondo quelle in comando)**

Table 3.2 Equations for the six representations of a linear resistive two-port

Representations	Scalar equations	Vector equations
Current-controlled	$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$ $v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$	$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}$
Voltage-controlled	$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$ $i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$	$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$
Hybrid 1	$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$ $i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
Hybrid 2	$i_1 = h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2$ $v_2 = h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}'\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$
Transmission 1†	$v_1 = t_{11}v_2 - t_{12}i_2$ $i_1 = t_{21}v_2 - t_{22}i_2$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$
Transmission 2†	$v_2 = t'_{11}v_1 + t'_{12}i_1$ $-i_2 = t'_{21}v_1 + t'_{22}i_1$	$\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$

† For historical reasons, a minus sign is used in conjunction with i_2. Because of the reference direction chosen for i_2, $-i_2$ gives the current leaving the output port.

- Spegnere le sorgenti interne indipendenti, aggiungere sorgenti nelle porte in base al comando chiesto, ripetere il passaggio per ogni membro della matrice
- Per trovare vettore delle sorgenti: tieni in considerazione le sorgenti, azzeri il comando, cerchi V_oc o I_sc nella porta (1 o 2)

Metodo veloce ma rischioso se circuito complicato: mettere fin da subito entrambe le variabili di comando e risolvere il circuito con maglie e nodi

Per trovare la forma di trasmissione (v1, i1/v2, i2): non si puó interpretare sul circuito (non posso azzerare e usare in comando la stessa porta): uso la rappresentazione ibrida e metto -i

Se non ci sono sorgenti interne indipendenti: posso cercare da subito forma di trasmissione, ma nella matrice cerco i membri reciproci (1/t_11)

NON ESISTE: se $\boldsymbol{det[R] = 0}$!!!!!

Trasformatore ideale:

vale sempre la relazione $\begin{cases} v_1 = kv_2 \\ i_2 = -ki_1 \end{cases}$ e da questa ricavo tutte le rappresentazioni

Potenza entrante: $p_1 = -p_2$ **Energia:** p=0; w(t)=0 => doppio bipolo PASSIVO

Proprietá: come trasformare "trasformatore ideale" in circuito normale con Thevenin:

R_L sulla porta 1: $R_{eq} = \frac{R_{Load}}{k^2}$ $V_{oc} = \frac{V_s}{k}$

R_L sulla porta 2: $R_{eq} = k^2 * R_{Load}$ $V_{oc} = V_s * k$

Amplificatore operazionale: $i_+ = 0; i_- = 0;\ v_d = 0$ (a sinistra tutti valori nulli)

"componente attivo" $i_g = i_0$ Correnti a destra (sulla punta) uguali

Tensione v_og da trovare!

Indico le condizioni operative sul circuito: <u>(fare sempre KVL a sinistra del AO)</u>

- **Amplificatore invertente** (- sopra, + sotto): KVL intorno a tutto il AO => $v_{ab} = -\frac{R_2}{R_1} * v_s$
- **Amplificatore non invertente** (+ sopra, - sotto): KVL esterna all'AO => $v_{ab} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) * v_s$

Condensatori e Induttori: rel cost differenziali, lineari, dinamici (con memoria)= dipende dal tempo

Componente dinamico: p_e(t) > 0 assorbe energia; p_e(t) < 0 eroga energia

Condensatore: $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ con (capacitá) $C = \frac{q}{v}$ (attraversato da corrente di spostamento)

$p_e(t) = v(t)i(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cv^2(t)\right]$ Energia: $w_c(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$ Passivo: w_c sempre > 0

<u>Proprietá: a regime condensatore == circuito aperto i = 0, v = cost</u>

In parallelo: $C_{eq} = C_1 + C_2$ In serie: $C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ (inverso del resistore)

<u>Nella sostituzione nel circuito si utilizza l'impedenza</u>: $Z_C = \frac{1}{jX_C}$

Reattanza capacitativa: $X_C = \frac{1}{\omega C}$ $I = j\omega CV$

Equazione differenziale: $\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{\tau} = \frac{v_C(\infty)}{\tau}$

Induttore: $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ con L (induttanza) = $\frac{\varphi}{i}$

$p_e(t) = v(t)i(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]$ Energia: $w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$ Passivo: w_L sempre > 0

<u>Proprietá: a regime induttore == cortocircuito v = 0, i = cost</u>

In serie: $L_{eq} = L_1 + L_2$ In parallelo: $L_{eq} = \frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$ (come resistore)

<u>Nella sostituzione nel circuito si utilizza l'impedenza</u>: $Z = j\omega L$

Reattanza induttiva: $X_L = \omega L$

Induttori mutuamente accoppiati:

Accoppiamento magnetico (isolamento elettrico tra le due porte)

Energia immagazzinata: $p = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2)$

- Se interfaccia simile a trasformatore ideale:

Considerare sorgenti sinusoidali: Sostituire fasori: L_1… con jX_1… L_M o M come se fosse k dei trasformatori

Al posto dei pallini immagino due generatori pilotati di tensione jX_MI_2 e jX_MI_1

Poi risolvere con KVL e KCL

Coefficiente di accoppiamento: $M = k\sqrt{L_1L_2}$

Serie Equiversa: i due induttori sono attraversati dalla stessa corrente $X_{eq} = X_1 + X_2 + 2X_M$

Serie Controversa: la corrente entra in un induttore ed esce nell'altro $X_{eq} = X_1 + X_2 - 2X_M$

Parallelo controverso: i due morsetti contrassegnati non sono allo stesso nodo (pallini) $X_{eq} = \frac{X_1X_2 - X_M^2}{X_1+X_2+2X_M}$

Parallelo equiverso: i due morsetti contrassegnati allo stesso nodo (pallini vicini) $X_{eq} = \frac{X_1X_2 - X_M^2}{X_1+X_2-2X_M}$

Come corrente passante varia nel tempo (circuiti transitori RC e RL):

Attenta a come si comporta ogni componente in ogni istante diverso!!!

- Cerco condizioni iniziali: prima e dopo cambiamento
  - $t = 0^-$ (a regime) Costante iniziale transitori: $V_C^{0-} = V_C^{0+}$ $I_L^{0-} = I_L^{0+}$
  - $t = 0^+$ cond/ind come generatore
- Condizione a regime: $t \rightarrow \infty$ (C e L si annullano)
  - Cerco costante di tempo: $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = CR_{eq}$ (interruttore a regime)
  - Calcolo R_eq: vista dal componente transitorio, spegnendo i generatori.
- Sostituisco valori nella soluzione: $i_x(t) = [i_x(0^+) - i_x(\infty)]\, e^{-\frac{t}{\tau}} + i_x(\infty)$
- Caso stabile: se $\tau > 0$ uscita diminuisce esponenzialmente
- Caso instabile: se $\tau < 0$ uscita cresce esponenzialmente

Regime sinusoidale (sorgenti con valori trigonometrici):

Per studiare il circuito togliendo la dipendenza dal tempo, uso i numeri complessi => fasori! = risolvo come circuito adinamico, ma faccio attenzione ai dati!!

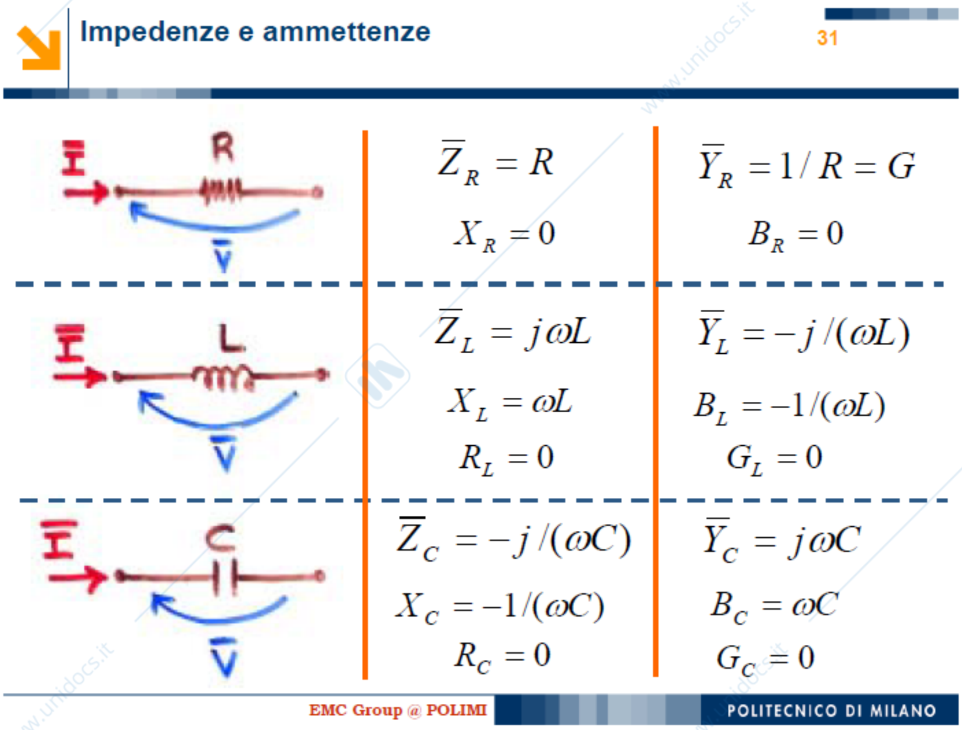
Devo porre tutto in coseno! => $\pm\sin(t) == \cos(t - 90^{\circ})$

Teorema fondamentale del regime sinusoidale: a regime, tutte le correnti e le tensioni tendono ad avere andamento sinusoidale con pulsazione ω_0 (tutte le sorgenti indipendenti devono avere stessa pulsazione ω_0)

$$v(t) = |V|\cos(\omega_0 + \arg(V)) \quad => \quad v(t) = |Z(j\omega_0)| * |I_s| * \cos(\omega_0 t + \arg(Z(j\omega_0)) + \arg(I_s))$$

Con $|V| = |Z(j\omega_o)| * |I_s|$ && $\arg(V) = \arg(Z(j\omega_0)) + \arg(I_s)$

Impedenza: $\bar{Z}(j\omega_0) = \frac{V}{I_s}$ ***Ammettenza:*** $Y(j\omega_0) = \frac{I}{V_s}$



Rappresentazione fasori:

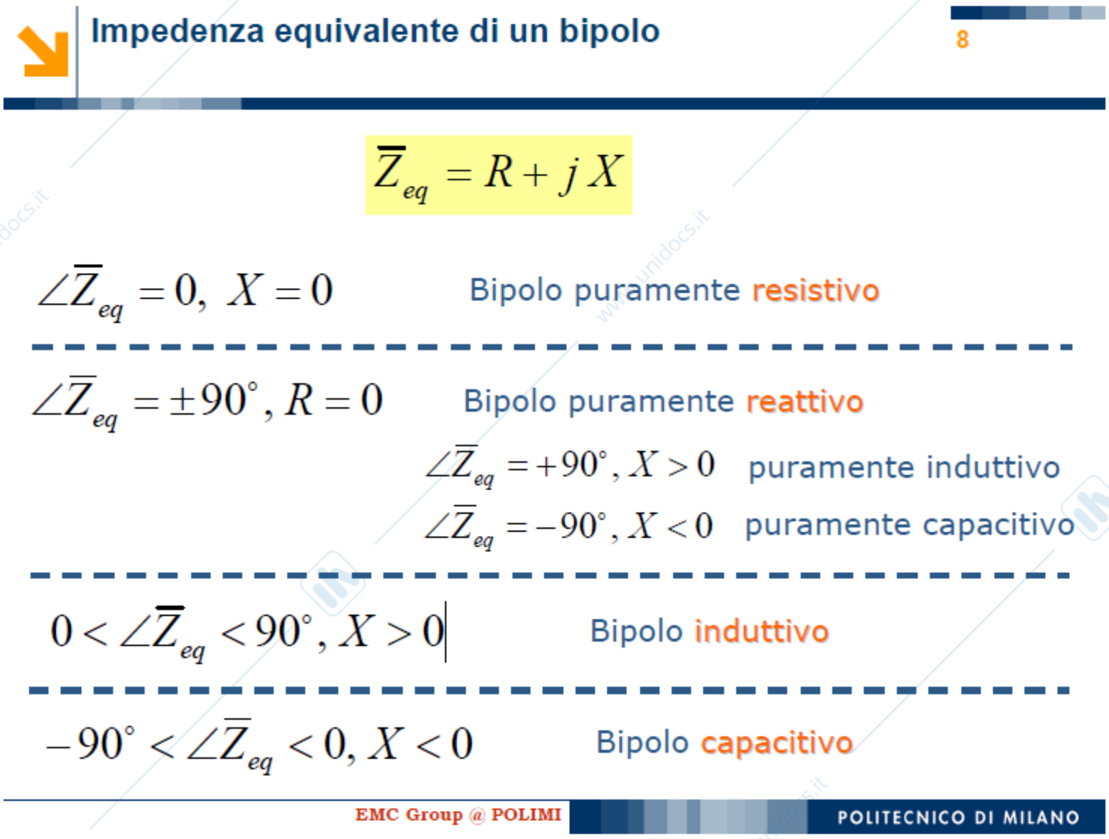
$$v(t) = \sqrt{2}V_{eff}\cos(\omega t + \varphi)$$

Ampiezza: $V_s = V_{eff} * e^{j*\varphi}$ Valore efficace = $\frac{Ampiezza}{\sqrt{2}}$

Per $\omega = 0$ Induttore = cortocircuito Condensatore = circuito aperto

Per $\omega = \infty$ Induttore = circuito aperto Condensatore = cortocircuito

Classificazione di un bipolo:



Circuiti risonanti (RLC):

Quando pulsazione $X(\omega) = 0$ == ω_0: Z_s == R; Z_L e Z_C sono numeri immaginari coniugati = $\pm jQ$

$P_{eL} \gg$ **se** Z_s e Z_L sono in risonanza in serie

Pulsazione di risonanza: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ (pulsazione alla quale R=0) => $Im\{Z(j\omega_0)\} = 0$

Definizione di banda: $B\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$ (Q >>, Bw <<)

Fattore di qualitá (merito): $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ se Q >> 1 => $|V_L| == |V_C| \gg |V_S|$

Rifasamento (corrente è in ritardo rispetto a V)

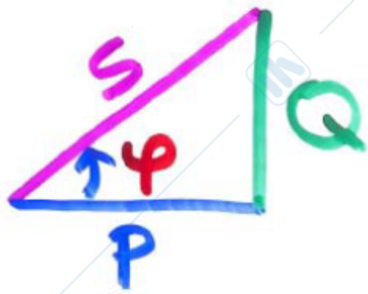
$$C = \frac{|Q_C|}{\omega V^2} \qquad \text{(sfasamento: } \varphi = arctg(\frac{imm}{reale})\text{)}$$

Per rifasare si introduce un C in parallelo che assorba la potenza neg. in eccesso $Q_C = P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)$

Per $\omega < \omega_0$ Z è resistiva/capacitativa => V in ritardo

Per $\omega > \omega_0$ Z è induttiva => I in ritardo

$$\overline{S} = P + jQ$$



- Potenza apparente $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
- Potenza attiva $P = S\cos(\varphi)$
- Potenza reattiva $Q = S\sin(\varphi)$
- Argomento (sfasamento tra V e I) $\varphi = arctg(Q/P)$
- Fattore di potenza $\cos(\varphi) = \dfrac{P}{S}$

Potenza complessa:

Se definisci i fasori in ampiezza => $S = \frac{1}{2} V * I^* = VIe^{j(\varphi_v - \varphi_i)} = P + jQ = (R + jX)I^2$

(corrente complesso coniugato, semplifica $j\omega_c$ e $j\omega_L$!!!!) $\boldsymbol{S = Z^* * I^2 = \frac{|V|^2}{Z^*}}$

Potenza Attiva: $P = Re(S) = \frac{|V|^2}{R}$ Potenza Reattiva: $Q = Im(S) = \frac{|V|^2}{X}$

Assorbita da resistori Immagazzinata da induttori e condensatori

Se Q < 0 = condensatore

Se Q > 0 = induttore

Massimo trasferimento di potenza: applicabile quando $R_s = R_{Load}$ => $P_{max} = \frac{|V_s|^2}{4Re(Z_s)}$

Potenza dissipata in un resistore: $P_R = \frac{|V_m|^2}{R}$ **Potenza media:** $P = \frac{R * I_m^2}{2}$ **Max potenza media:** $P_{disp} = \frac{|V|^2}{8R_s}$

$$I = \frac{P}{Vcos\varphi} \qquad V = \frac{P}{Icos\varphi}$$

Potenza apparente: modulo della potenza complessa => uso il valore efficace!

Ricorda che si comporta come potenza reale $S_{app} = |S| = P = v * i$

Fattore di potenza: $\cos\varphi$ in ritardo = positivo;

Funzione di rete: (come FdT di automatica) => usare variabile S=jω

$$\boldsymbol{\omega_L = \frac{R}{L}} \qquad \boldsymbol{\omega_C = \frac{1}{R*C}}$$

Consideri solo generatori richiesti, gli altri li spegni. Poi risolvi il circuito normalmente (KVL,KCL)

Trifase:

- Passare sempre da triangolo => a stella
- Impedenze: (se Z uguali) $Z_\Delta/3 = Z_Y$
- Correnti di fase: $I_Y = \sqrt{3} I_\Delta$ se Y: I_{s_a} se Δ: I_{ab}
- Tensioni di linea: $V_{ab} = V_{s_a} - V_{s_b} = \Delta V_s$ (tensioni di fase aka "generatori di tensione")
- Tensione di fase: $V_{s_a} = I_a Z$ => tensione di linea: $V_{ab} = \sqrt{3}\, I_a Z\ (+30°)$ sfasamento (φ)
- Se circuito simmetrico ed equilibrato (Z ttt uguali)(stessa frequenza): trovo circuito chiuso che comprende la prima linea, usando OO' come cortocircuito. Poi trovo le restanti fasi traslando di 120°
- **Sequenza delle fasi:** diretta= $V_b\ - 120°$; $V_c\ + 120°$ inversa= $V_b + 120°; V_c - 120°$

Collegamenti	Tensione	Corrente	Legge di Ohm
Stella	$V_L = \sqrt{3} V_f$	$I_L = I_f$	$V = E = Z \cdot I = \sqrt{3} \cdot Z \cdot I$
Triangolo	$V_f = V_L$	$I_L = \sqrt{3} I_f$	$V = Z \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}}$

- Potenza instantanea: $p(t) = 3V_s I_Y \cos(\varphi) = \sqrt{3} V I_l \cos(\varphi)$
    - Uguale alla P attiva!!! == Costante
- Potenza complessa: $S = 3V_a * I_a^*$
    - Potenza apparente: $|S| = 3V_s I_Y = \sqrt{3} V_l I_l$
    - $Q = 3V_s I_Y \sin(\varphi) = \sqrt{3} V I_Y \sin(\varphi)$

Trasformazione stella-triangolo

Da triangolo a stella: $R_t = 3R_s$ **Da stella a triangolo: $R_s = \frac{R_t}{3}$**

Leggi di Maxwell

1) $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ Teorema di Gauss (L'origine di $\vec{E}$ sono le cariche elettriche)

2) $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ Legge di Faraday ($\vec{E}$ è creato anche da $\vec{B}(t)$)

3) $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ Teorema di Gauss per B (Non esistono cariche magnetiche)

4) $\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(i_C + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$ Teorema di Ampere-Maxwell (l'origine di $\vec{B}$ sono le correnti ma $\vec{B}$ è creato anche da $\vec{E}(t)$)

Elettromagnetismo

Legge di Faraday: elemento caratteristico = spira in un campo magnetico

Percorso C: entrante/uscente: regola della mano destra

Flusso campo induzione magnetica: $\varphi = B \cdot S_{superficie}$ unitá di misura: Wb

Flusso concatenato $\psi = N\varphi$ N = numero di spire concatenate

Forza elettromotrice e : rappresentata da generatore ideale di tensione, stesso verso di C

$$e = -\frac{d\psi}{dt} \qquad \text{"Tensione indotta in un circuito da un campo"}$$

Poi risolvo circuito, seguendo gli anelli per la KVL. Posizionare "e" in un singolo anello

- Se flusso concatenato varia nel tempo ($v = e = -\frac{d\psi}{dt} \neq 0$) velocitá w
  - B(t) varia nel tempo => FEM trasformatorica $v = e = -\frac{dB(t)}{dt} Lwt$
  - S(t) varia nel tempo => FEM mozionale $v = e = -BLw$
- Se flusso costante => corrente $i(t) = 0$

Circuiti Magnetici

Elementi magneticamente passivi: sezione di ferro intera;

Elementi magneticamente attivi: tratto di ferro circondato da avvolgimento di N spire percorso da i

Forza magnetomotrice: $e_k = N_k i_k$

Nel circuito magnetico, le barre di ferro si comportano come resistenze/riluttanze, le sezioni di aria (traferro) come conduttanze/permeanze

Permeanza $P = \frac{\mu_0 S}{l}$ **Riluttanza** $Q = \frac{l}{\mu_0 S}$ $Q_i = \frac{L_i}{\mu_0 \mu_r S_i}$

Materiale magnetico con $\mu = \infty \rightarrow H = 0, \quad \forall B < \infty$

Conduttore con $\sigma = \infty \rightarrow E = 0, \quad \forall J < \infty$

Induttanza(solo con singolo induttore): $L = \mu \frac{N^2 S}{l}$

KCL: Flusso magnetico : $\Phi_1 = \mathrm{L}_1 i_1$ (si comporta come i "magnetica")

KVL: tensione magnetica M

- **Nodi del circuito:** spigoli della figura

Permeabilitá nel vuoto: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$

Energia magnetica: $w = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} B^2$ $W = \frac{1}{2} \Phi M$ (se $\mu = 0 \Rightarrow W = 0$)

Accoppiamento perfetto: $M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2}$

- Cerco la matrice delle induttanze: $L_{12} == L_{21}$ SEMPRE!!!
- Se grafico simmetrico => anche matrice simmetrica