



Scienza delle costruzioni (appunti su tutte le lezioni sistemati)

Scienza Delle Costruzioni
Università degli Studi di Padova (UNIPD)
63 pag.

INTRODUZIONE

Oggetto della SDG è { realizzazione costruzioni reali → tramite modello matematico
 studiare affidabilità e sicurezza degli edifici

Struttura: insieme di elementi strutturali collegati fra loro e al suolo.
 Lo scopo è quello di capire come la struttura scarica a terra i carichi agenti.

Modello matematico: caratterizzato da tre aspetti:

- **REOLOGICO** considero **RIGIDI** gli elementi della struttura
 presi due punti, la loro distanza non cambia all'applicare le forze esterne.
 la risposta del materiale determina il comportamento meccanico:
 - elastico-lineare *
 - elasto-plastico
 - affaticato
 - danneggiato
 - ...

DELE AZIONI ESTERNE definisco le **AZIONI** che agiscono sulla struttura:

- forze di superficie/massa (distribuite/concentrate)
- distorsioni (Δ termici)
- cedimenti (spostamenti impressi)

- **GEOMETRICO** schematizzo le strutture esistenti tramite un insieme di **VINCOLI** ed **ELEMENTI STRUTTURALI**

monodimensionali (travi)

idealmente realizzati dalla traslazione di una figura piana lungo un asse portante per il suo baricentro.

Sezione trasversale: figura generata dall'intersezione tra solido e piano \perp al baricentro.

Asse geometrico: traiettoria della trave

ha la dimensione \gg rispetto la dimensione della sezione trasversale

trave piana → asse geometrico contenuto su un piano

asta → trave soggetta a carichi \parallel all'asse geometrico.

bidimensionali

con tutte le dimensioni paragonabili

bidimensionali (lastre)

idealmente realizzati con la traslazione di un segmento su una superficie, restando sempre ortogonali al punto medio.

Dimensione dello spessore \ll altre due dimensioni.

lastra piana → superficie media è un piano

lastra a semplice curvatura → superficie media risulta

piastre → lastre soggette a carichi \perp alla superficie media

VINCOLI

Vincolo: ogni impedimento al moto rigido.

Legato al concetto di **grado di libertà** (= possibilità del corpo di compiere un certo tipo di moto) che nel piano risultano essere 3, nello spazio 6.

→ Esplica quelle sole componenti di forza corrispondenti alle componenti di spostamento impedito.

→ Aggiungo l'ipotesi di spostamenti infinitesimi alle ipotesi sui vincoli:







- **olonomi** definiti da un certo numero di parametri
- **fissi** indipendenti del tempo
- **bilaterali** ogni componente impedita, lo è in entrambi i sensi
- **lisci** privi di attrito
- **ideali** non cedevoli

→ Possono essere
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{INTERNI} \\ \text{ESTERNI} \end{array} \right.$
 collegano più parti della struttura
 collegano la struttura al suolo

→ Classificazione

in relazione ai gradi di libertà soppressi

in relazione al numero di reazioni vincolari esplicitate

MOLTEPLICITÀ	SIMBOLO	NOIIE	CINEMATICA	STATICA
1		APPOGGIO SEMPLICE	$\eta = 0$	$Y \neq 0$
1		BIELLA	$\xi \neq 0$ $\varphi \neq 0$	$X = 0$ $M = 0$
2		CERNIERA	$\eta = 0$ $\varphi = 0$	$Y \neq 0$ $X \neq 0$
2		CARRELLINO VINCOLATO	$\varphi \neq 0$	$M = 0$
2		BISPENDELO	$\xi = 0$ $\varphi = 0$ $\eta \neq 0$	$X \neq 0$ $M \neq 0$ $Y = 0$
3		INCASTRO	$\xi = 0$ $\eta = 0$ $\varphi = 0$	$X \neq 0$ $Y \neq 0$ $M \neq 0$

Molteplicità → numero di condizioni elementari di vincolo associate al vincolo in esame (componenti di spostamento impedito)

CLASSIFICAZIONE SISTEMI DI CORPI RIGIDI

CINEMATICA

No carichi esterni.

Porta a classificare la struttura come $\begin{cases} \text{FISSA} & \text{non presenta possibilità di moto rigido} \\ \text{LABILE} & \text{possibilità di compiere moti rigidi re e virtuali} \end{cases}$

→ Dati $\begin{cases} n & \text{corpi rigidi} \\ v & \text{cond. elem. vincolo} \end{cases}$ mi chiedo quali limitazioni pongano tali vincoli ai moti rigidi del corpo, ovvero quanti dei $6 \cdot n$ parametri restino indipendenti al fine di individuare le moto del corpo.

STATICA

Valuto la struttura dal punto di vista fisico, considerando anche le forze esterne.

Classifico le strutture:

$\begin{cases} \text{STATICAMENTE DETERMINATE} & \text{il sistema di corpi equilibra solo alcuni dei carichi agenti} \\ \text{ISOSTATICHE} & \text{il sistema di corpi è tale da equilibrare tutti i carichi agenti} \\ \text{IPERSTATICHE} & \text{il sistema di corpi è tale per cui si verifica una sovrabbondanza di reazioni vincolari equilibranti.} \end{cases}$

DUALITÀ STATICO-CINEMATICA

- un sistema staticamente determinato è labile ←
- un sistema isostatico è fisso ←
- un sistema iperstatico può essere sia fisso che labile ←

$$\bar{C} = v - 3n + e$$

grado di labilità (n' moti rigidi indipendenti)

gradi di iperstaticità (cond. elem. vincolo sovrabbondanti)

gradi di libertà (3 · n' corpi rigidi)

cond. elem. vincolo (somma molteplicità)

Calcolando $v - 3n$ posso a priori sapere:

$v - 3n < 0$ STATICAMENTE DETERMINATO → LABILE

$v - 3n > 0$ IPERSTATICO → NON DEFINITO CINEMATICAMENTE (labile se vincoli maldisposti)

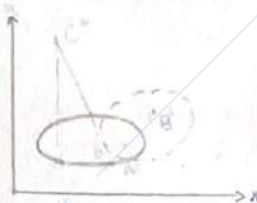
$v - 3n = 0$ COND. NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE PER ISOSTATICA

TEOREMA DI EULERO

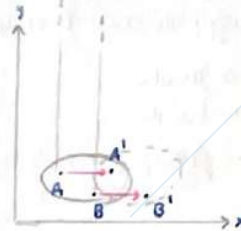
Studio grafico della cinematica dei sistemi labili.

→ Qualsiasi moto di un corpo rigido nel piano è interpretabile come una rotazione del corpo rigido stesso attorno ad un **centro di rotazione assoluta** C^* (proprio/improprio), determinato dall'intersezione delle rette ortogonali ai vettori spostamento di due punti qualunque del corpo nelle loro posizioni iniziali.

Trovare i centri di rotazione:



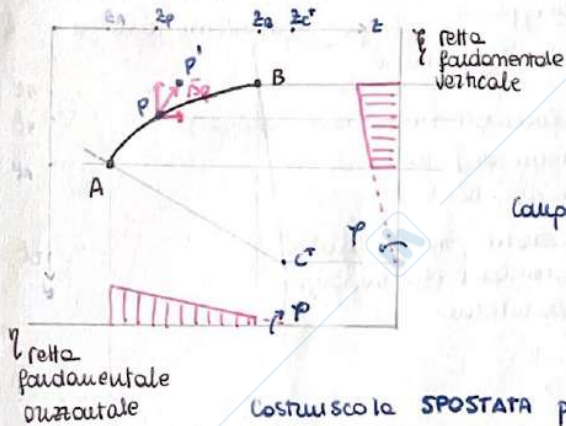
Considero due punti, ne traccio i vettori spostamento e le rette ortogonali. Il punto di intersezione è il centro di rotazione (determinabile).



Le due rette \perp agli spostamenti sono parallele tra loro: identificano una traslazione. Il punto è all'infinito e "identifica" il centro di rotazione **improprio**.

→ Se determino un centro di rotazione/traslazione, il corpo è **LABILE** ←

→ Gli spostamenti sono linearmente collegati alle rotazioni: $|\vec{\Delta}_A| = \gamma_A \cdot d_{c^*A}$ e $|\vec{\Delta}_B| = \gamma_B \cdot d_{c^*B}$



Le rette fondamentali sono quelle su cui proietta le componenti di spostamento dando luogo alla **spostata**.

Componenti di spostamento rispetto le posizioni iniziali:

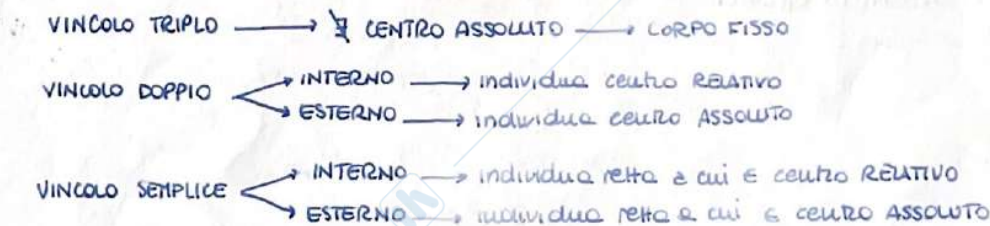
$$\eta_p = -\gamma (z_p - z_{c^*})$$

$$\xi_p = \gamma (y_p - y_{c^*})$$

Costruisco la **SPOSTATA** proiettando i centri assoluti C^* sulla retta fondamentale (essendo fissi non subiscono spostamenti).

Stacco poi una retta di angolo γ fino alla fine del corpo in esame.

Grazie al teorema di Eulero determino il grado di labilità:



centro di rotazione relativa centro a cui posso ridurre la rotazione relativa tra due corpi adiacenti.

TEOREMI DELLE CATENE CINEMATICHE

Validi per sistemi dinamici piani, se contemporaneamente soddisfatti, costituiscono le condizioni **NECESSARIE** e **SUFFICIENTI** affinché un sistema di corpi rigidi si definisca labile.

1. I centri di rotazione assoluta C_i e C_j di due elementi I e J di un sistema rigido piano e il loro centro di rotazione relativa C_{ij} sono allineati.
2. I centri di rotazione relativa C_{ij} , C_{ik} e C_{jk} di tre elementi I, J, K di un sistema rigido piano, sono allineati.

→ Nella realtà non è possibile determinare la labilità del sistema controllando che venga soddisfatto il primo teorema a gruppi di due tronchi alla volta.

C.A. PROPRIO → corpo ruota

C.A. IMPROPRIO → corpo trasla

C.A. \equiv C.R. → corpo fisso

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA E EQUAZIONI AUSILIARIE

Sono condizioni **NECESSARIE** e **SUFFICIENTI** per l'equilibrio del corpo.

Le reazioni vincolari dipendono da { sistemi di forze applicate vincoli } dunque il problema risulta e le equazioni saranno di equilibrio a traslazione e rotazione:

$$\begin{cases} \vec{R}^e = \sum \vec{F}_i = 0 & \vec{R}^e \text{ risultante forze esterne + forze interne reattive (vincoli)} \\ \vec{M}^e = \sum \vec{M}_i = 0 & \vec{M}^e \text{ momento risultante dai sistemi di forze} \end{cases}$$

↓
sono sufficienti per sistemi statici determinati e isostatici, ma per quelli iperstatici devo considerare delle equazioni ausiliarie che impongono il rispetto di condizioni statiche relative ai vincoli interni.

$$\begin{cases} \vec{R}_x^e = 0 \\ \vec{R}_y^e = 0 \\ \vec{M}_o^e = 0 \end{cases}$$

Teorema di Lagrange

Sostituisce alle cond. elem. di vincolo le rispettive reazioni vincolari.

Le reazioni incognite diventano carichi equivalenti, ovvero incluse nell'equilibrio assieme ai carichi effettivi.

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- Ipotesi:
- deformazioni infinitesime
 - materiali linearmente elastici (= no memoria delle precedenti deformazioni)

→ L'effetto prodotto da più forte agenti contemporaneamente sullo stesso corpo, è uguale alla somma degli effetti prodotti dalle singole forze agenti separatamente.

PLV

Condizione NECESSARIA e SUFFICIENTE affinché una posizione s_0 iniziale del sistema S , a vincoli rigidi bilaterali e privi di attrito, sia in equilibrio, è che il lavoro virtuale δL delle forze agenti sia nullo per ogni spostamento virtuale eseguito da s_0 .

$$\delta L = 0 \quad \text{eq. simbolica della statica}$$

Metodo di Lagrange: (sistemi isostatici)

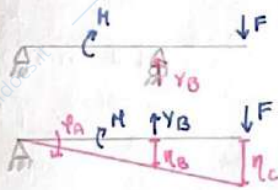
sopprimi uno each elem. di vincolo alla volta e lo sostituisco con l'incognita

↳ sistema rimane labile

↳ per assicurare l'equilibrio, le assegno un qualsiasi moto rigido virtuale e impongo che il lavoro delle forze attive e reattive sia nullo.

- OSSERVAZIONI:
- Nella realtà, le reazioni vincolari non compiono lavoro
 - Se devo trovare più reazioni vincolari, è necessario liberare una incognita alla volta (altrimenti $e > 1$ e problema non avrebbe soluzione).
 - PLV applicabile a sistemi IPERSTATICI, ma solo per reazioni non sovrabbondanti (determinabili anche con le ecs)
 - considero ciascun contributo come + o - in base all'azione concorde o discorda rispetto lo spostamento virtuale.

ESEMPIO



Determino Y_B generata sostituendo Δ

Assegno un moto rigido φ in A che è carico ammetto.

Per equilibrio, Y_B deve essere pari alla reazione che il carrello esercita.

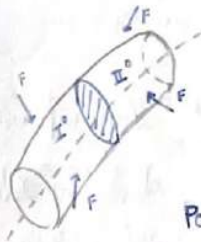
$$\delta L = 0 \quad H \cdot \varphi - Y_B \cdot \delta \eta_B + F \cdot \eta_C = 0$$

$Y_B = \eta_B$ discendi

$$H \varphi - Y_B \cdot 2L \cdot \varphi + F \cdot 3L \varphi = 0$$

$$Y_B = \frac{H + 3FL}{2L}$$

PARAMETRI DELLA SOLLECITAZIONE



Considero una trave $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad asse generico} \\ \text{piccola curvatura} \\ \text{rigida} \end{array} \right.$ caricata da un sistema di forze.

Divido la trave in due porzioni mediante taglio, la sezione I° ha normale positiva, mentre II° ha normale negativa.

Per considerare nuovamente i tronchi in equilibrio, basta applicare alla sezione di I° le azioni che esercitava la sezione II° prima del taglio e viceversa. Tali azioni sono dette **azioni interne** e si pensano applicate sui baricentri delle due sezioni.

PARAMETRI DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA

Considerate una terna cartesiana ortogonale G_{xyz} solidale con la sezione e assi x, y coincidenti coi principali d'inerzia della sezione, mentre z tangente all'asse della trave.

Le proiezioni delle azioni interne \vec{R} e \vec{M} sugli assi di tale terna definiscono i parametri della sollecitazione:

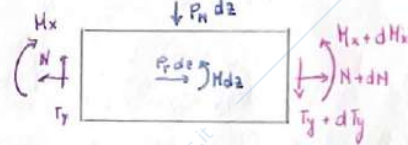
- $R_x = T_x$ sforzo di taglio
 - $R_y = T_y$ sforzo di taglio
 - $R_z = N$ sforzo normale
 - M_x momento flettente
 - M_y momento flettente
 - M_z momento torcente
- $\left. \begin{array}{l} \oplus \text{ rotazione oraria} \\ \oplus \text{ trazione} \\ \oplus \text{ } (\curvearrowright) \end{array} \right\}$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER TRAVI RETTILINEE

Presa una trave rettilinea caricata da:

- P_N carico distribuito verticale
- P_T carico distribuito orizzontale
- H coppia

Ne considero un elemento dz :



Valido il principio di azione-reazione, impongo

l'equilibrio:
$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

scomponendo lungo le direzioni:

\sum $-N + P_T dz + N + dN = 0 \quad \frac{dN}{dz} = -P_T$

\sum $-T_y + P_N dz + T_y + dT_y = 0 \quad \frac{dT_y}{dz} = -P_N$

\sum $M_x + P_N \frac{dz^2}{2} - M dz - M_x - dM_x + T_y dz + dT_y dz = 0 \quad \frac{dM_x}{dz} = T_y - H$

infinitesimo $\frac{dz^2}{2}$ parte a il polo momento distribuito altrimenti = 0

Nell'ipotesi in cui i carichi agenti siano solo normali all'asse della trave e non esistano coppie distribuite ($P_T=0, H=0$):

$N = \text{cost} \quad \frac{dT_y}{dz} = T_y \quad \frac{dT_y}{dz} = -P_N$ equazioni indefinite di equilibrio (c'è il resto)

170 cassegue :

	Trave scarica ($P=0$)	Trave caricata Uniformemente ($p = \text{cost}$)	Trave caricata linearmente
P			
$\frac{dT}{dz} = -P$	$T = \begin{cases} \text{cost} \\ \text{nullo} \end{cases}$	lineare	parabolica
$\frac{dM}{dz} = -T$	$M = \begin{cases} \text{lineare} \\ \text{cost} / \text{nullo} \end{cases}$	parabolico	parabolico

Convenzioni dei segni:

MOMENTO $\frac{-}{+}$ se tende le fibre inferiori

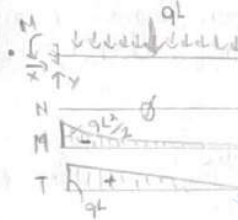
TAGLIO $\frac{+}{-}$ positivo se produce rotazione oraria

SF. NORMALE

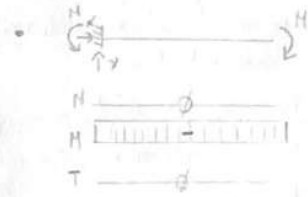
(casi notevoli :)



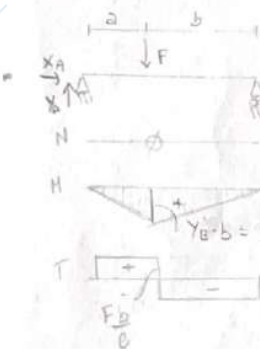
$$\begin{cases} x=0 \\ y=F \\ M=FL \end{cases}$$



$$\begin{cases} x=0 \\ y=qL \\ M = \frac{qL^2}{2} \end{cases}$$

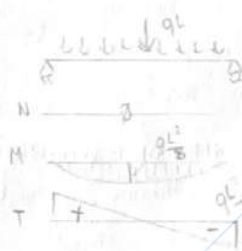


$$\begin{cases} x=a \\ y=F \\ M = Fa \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_A=0 \\ y_A+y_B=F \\ Fa - y_B l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=0 \\ y_A = F - \frac{Fb}{l} = F(1 - \frac{b}{l}) \\ y_B = \frac{Fa}{l} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A=0 \\ y_B = \frac{Fa}{l} \\ y_A = F(\frac{l-a}{l}) = \frac{Fb}{l} \end{cases}$$



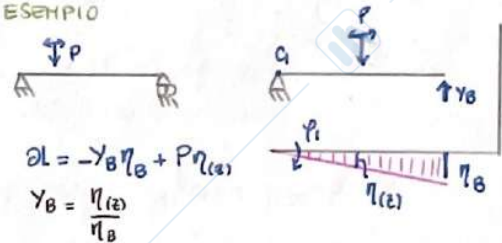
$$\begin{cases} x_A=0 \\ y_A+y_B=0 \\ -M - y_B l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y_B = -M/l \\ y_A = +M/l \end{cases}$$

LINEE D'INFLUENZA PER SISTEMI ISOSTATICI

Data una struttura soggetta a carico puntuale viaggiante unitario, si definisce linea d'influenza di uno specifico effetto (inteso come reazione vincolare o parametro di sollecitazione) in una specifica sezione trasversale della struttura, un diagramma in cui si legge in corrispondenza della posizione del carico, il valore dell'effetto alla specifica sezione data.

- Per determinarla utilizzo le PLV:
- Svincolo il parametro cercato
 - Otengo diagramma della componente di spostamento verticale
 - Applico le PLV alla struttura labile

ESEMPIO



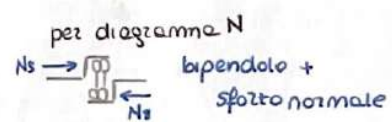
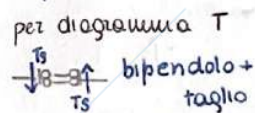
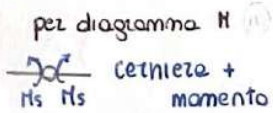
$$\partial L = -Y_B \eta_B + P \eta_{(x)}$$

$$Y_B = \frac{\eta_{(x)}}{\eta_B}$$

Grazie alla linea d'influenza posso leggere il valore di Y_B in qualsiasi punto si sposti il carico viaggiante P.

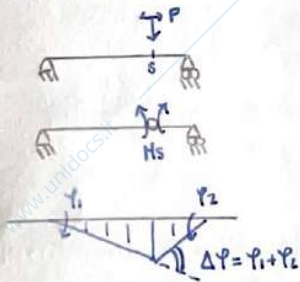
La sua determinazione necessita l'assunzione di tre condizioni:

1. L'effetto liberato deve essere positivo, da tutto incastro la struttura diventa:



2. Il lavoro prodotto dall'effetto cercato nella sezione d'interesse dev'essere un prodotto negativo.
3. La componente di spostamento relativa definita nella sezione d'interesse è unitaria.

ESEMPIO LINEA D'INFLUENZA PER IL MOMENTO



Richiesta linea d'influenza per M in s. libero il momento e aggiungo la cerniera. 1. Applico le PLV.

$$\partial L = -M_s \eta_1 - M_s \eta_2 + P \eta_{(x)}$$

$$= -M_s (\eta_1 + \eta_2) + \eta_{(x)}$$

2.

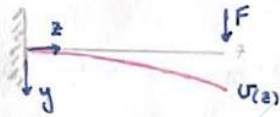
$$M_s = \frac{\eta_{(x)}}{\Delta Y} \quad 3.$$

EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA

→ Elimino l'ipotesi di corpo rigido dunque il sistema di travi diviene deformabile (= la distanza tra due punti qualunque della trave non si mantiene costante lungo il processo di carico).

ipotesi del problema:

- spostamenti \ll esimi
- comportamento elastico (deformazione recuperabile)
- materiale isotropo (stesso comportamento in tutte le direzioni)
- materiale omogeneo (densità costante)



Trave isotropicamente snodata, caricata da F concentrata.
 Assi $\downarrow y, z$ con $v(z)$ positivi se abbassamenti.

Linea elastica: funzione che rappresenta la deformata dell'asse geometrico della trave a seguito dei carichi applicati.
 (deformazione deve essere compatibile coi vincoli, positiva se abbassamento).

Relazioni geometriche

rotazione $\frac{\partial v}{\partial z} = -\gamma(z)$

la derivata di v rispetto a z sarebbe la tangente, ma in ipotesi di piccoli spostamenti posso confonderla con la rotazione.
 (positiva se antioraria)

curvatura $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} = \theta(z)$

la curvatura definisce come varia la rotazione lungo la linea elastica.

Relazione costitutiva

Bernoulli - Navier

$\theta(z) = \frac{M(z)}{EJ}$
 modulo di elasticità E (prop. elastica) e momento d'inerzia J

direttamente proporzionale al momento flettente e inversamente proporzionale alla rigidità flessionale.

Trascuro eventuali allungamenti e scorrimenti del taglio. La trave che si deforma solo per flessione è detta TRAVE DI BERNOULLI-NAVIER.

Mettendo assieme relazioni geometriche e relazione costitutiva:

$-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{M(z)}{EJ}$ equazione differenziale della linea elastica

una volta trovato il diagramma di momento, questo rappresenta l'andamento della curvatura a meno della rigidità flessionale (se M è variabile) che per noi è costante

↳ sezione della trave costante → inerzia costante

Procedimento:

- Prendo l'espressione di $M(z)$.
- da $-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{M(z)}{EJ}$ sostituisco con il valore di $M(z)$.
- Integro una volta e trovo γ (sostituendo $l=z$ e controllando costanti)
- Integro due volte e trovo v .

CASI NOTIEVOLI

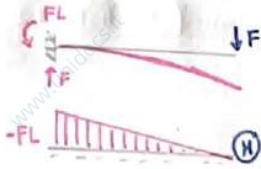


Diagramma di momento:

$$M(z) = ax + b$$

$$= Fz - FL$$

$$M(z=0) = -FL = b$$

$$M(z=L) = 0 = aL + b \rightarrow aL - FL = 0 \rightarrow d = F$$

$$\theta(z) = \frac{M(z)}{EJ} = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{Fz + FL}{EJ}$$

Integro una volta per la rotazione:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \int \frac{FL - Fz}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \int (FL - Fz) dz = \frac{FLz - Fz^2}{2EJ} + c$$

determino c sapendo che $\varphi = 0$ con l'incastro: $\frac{\partial v}{\partial z}(z=0) = 0 \rightarrow c = 0$

La rotazione all'estremità: $\varphi = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{FL^2}{2EJ} - \frac{FL^2}{2EJ} = \frac{FL^2}{2EJ} = \ominus \frac{FL^2}{2EJ}$

all'estremo libero è ossia dunque segno -

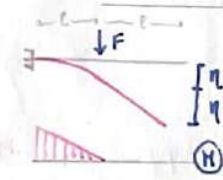
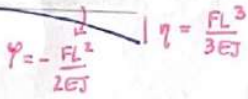
Integro la seconda volta per l'abbassamento

$$v(z) = \int \frac{FLz}{2EJ} - \frac{Fz^2}{2EJ} dz = \frac{FLz^2}{4EJ} - \frac{Fz^3}{6EJ}$$

equazione della linea elastica.

$$\eta(z=L) = \frac{FL^3}{4EJ} - \frac{FL^3}{6EJ} = \frac{FL^3}{6EJ}$$

positiva \rightarrow abbassamento



$$\eta_1 = \frac{FL^3}{3EJ} \text{ (caso precedente)}$$

$$\eta_2 = \varphi \cdot L \text{ perchè rotazione di un pezzo rigido (\varphi \text{ del caso precedente})}$$

$$= \frac{FL^3}{2EJ}$$

$$\eta_{tot} = \frac{FL^3}{3EJ} + \frac{FL^3}{2EJ} = \frac{5FL^3}{6EJ}$$

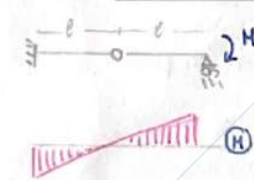


Diagramma di momento: $M(z) = -\frac{Mz}{L} + M$

$$M(z=0) = M = b$$

$$M(z=L) = -M = 2aL + b$$

$$2aL + M = -M \rightarrow a = -\frac{M}{L}$$

$$\theta(z) = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{M(z)}{EJ} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{M(z)}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(-M + \frac{Mz}{L} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Mz^2}{2L} - Mz \right) + c_1 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}(z=0) = 0 = c_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(z=L) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ML^2}{2L} - ML \right) = -\frac{ML}{2EJ}$$

rotazione autoraria sulle cerniere, dunque \oplus

$$\varphi(z) = \frac{ML}{2EJ}$$

$$v(z) = \frac{1}{EJ} \int \left(\frac{Mz^2}{2L} - Mz \right) dz + c_2 = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Mz^3}{6L} - \frac{Mz^2}{2} \right)$$

$$\eta = -\frac{ML^2}{3EJ} \text{ è innalzamento}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TEOREMA DI MOHR E COROLLARI

Strumento per determinare componenti di spostamento per sistemi isostatici sotto carico, in alternativa alla linea elastica.

L'unica restrizione è quella di considerare travi ad asse geometrico rettilineo.

Mohr dedusse l'analogie tra fenomeni statici e cinematici curvatura \leftrightarrow carico
abbassamenti \leftrightarrow momenti

PROFILO STATICO

$$\frac{dH}{dz} = T \quad H = \int T dz$$

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad T = \int -q dz$$

eq. indefinite di equilibrio soluzione statica

PROFILO CINEMATICO

$$\frac{d\psi}{dz} = -\rho \quad \psi = \int -\rho dz$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \theta \quad \theta = \int \theta dz$$

linea elastica soluzione cinematica

Gli operatori in gioco sono gli stessi. (dz)

Teorema

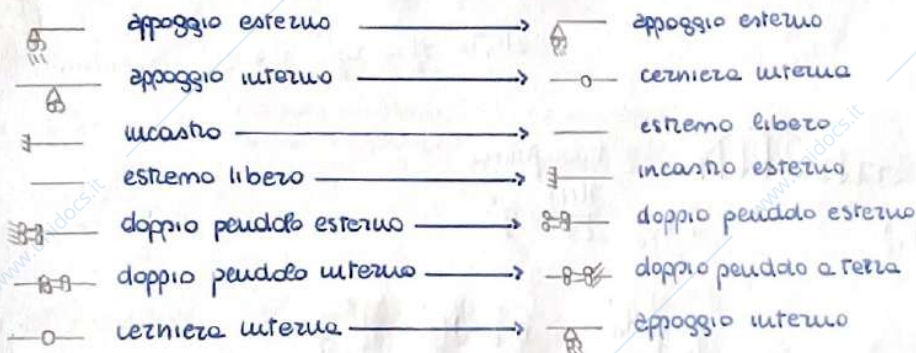
Gli abbassamenti della trave REALE sono equivalenti ai valori dei momenti M^* FITTEZI di una trave secondaria, detta AUSILIARIA, il cui carico è costituito dal diagramma di momento H della trave diviso per la rigidità EJ .

Corollario $q^* = \frac{H}{EJ}$ $M^* = \int T^* dz = \int -\rho dz = \psi$ $T^* = -\int q^* dz \Rightarrow -T^* = \rho$

1. Le rotazioni delle sezioni sono pari al taglio T^* della trave fittizia, diviso per EJ .
2. Le rotazioni terminali α, β sono uguali (in modulo) ai valori delle reazioni A^* e B^* della trave ausiliaria, divisi per EJ .

Per trasformare la trave reale a trave fittizia, sostituisco i vincoli e poi carico la trave ausiliaria col diagramma di momento rovesciato rispetto alla trave reale.

Sostituzioni:

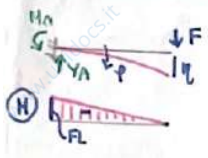


Osservazioni

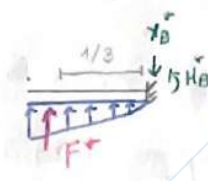
I corollari di Mohr sono direttamente applicabili se:

- la struttura isostatica considerata è costituita da un unico elemento } ed asse generico
} privo di sup. a sbalzo
- la struttura isostatica considerata è costituita da più elementi strutturali, tutti con asse geometrico appartenente alla stessa retta.

CASI APPLICATIVI



ausiliaria:



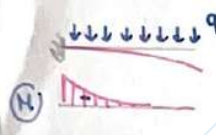
$M_A = FL$
 $Y_A = F$
 $F^* = \frac{FL \cdot L \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{FL^2}{2}$
 $\sum Y_B^* = F^* = \frac{FL^2}{2EI}$
 $\sum M_B^* = F^* \cdot \frac{2L}{3} = \frac{FL^3}{3EI}$
 $\eta = \frac{FL^2}{2EI}$ $\eta = \frac{FL^3}{3EI}$



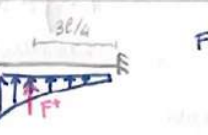
ausiliaria:



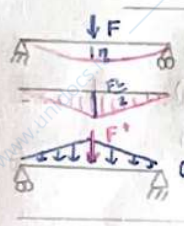
$F^* = \frac{H \cdot L}{EI}$
 $P = \frac{HL}{EI}$ $\eta = \frac{HL^2}{2EI}$
 $\sum Y_B^* = F^* = \frac{HL}{EI}$
 $\sum M_B^* = F^* \cdot \frac{L}{2} = \frac{HL^2}{2EI}$



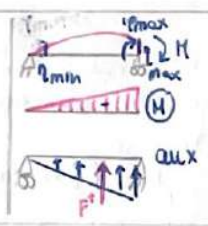
ausiliaria:



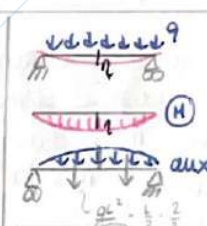
$F^* = \frac{qL^3}{6EI}$ $P = \frac{qL^3}{6EI}$
 $\eta = \frac{qL^4}{8EI}$



$\eta = \frac{FL^2}{16EI}$
 $\eta = \frac{FL^3}{48EI}$

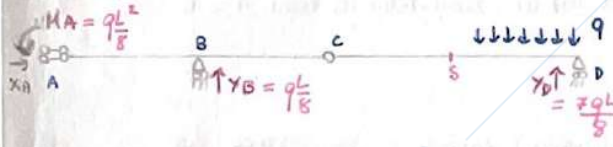


$\eta_{max} = \frac{HL}{3EI}$
 $\eta = \frac{HL}{3EI}$
 $\eta_{min} = \frac{HL}{6EI}$

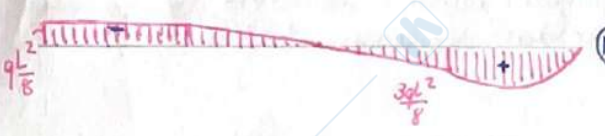


$\eta_{max} = \frac{qL^3}{24EI}$
 $\eta = \frac{5qL^4}{384EI}$

ESEMPIO

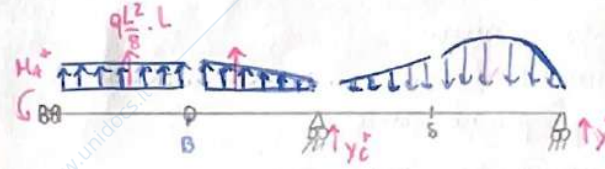


$\eta_A ?$
 $\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B + Y_D = qL \\ -H_A - Y_B \cdot L - Y_D \cdot 4L + qL(3L + \frac{1}{2}) \end{cases}$
 $\begin{cases} Y_B = H_A \end{cases}$



$\begin{cases} H_A = Y_B \cdot L \\ Y_D = qL \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}qL \\ Y_B = \frac{qL}{8} \end{cases} \begin{cases} H_A = \frac{qL^2}{8} \\ Y_D = \frac{3qL}{8} \\ Y_B = \frac{qL}{8} \end{cases}$
 $\sum M_s^{dx} = \frac{qL^2}{2} - \frac{3qL^2}{8} = -\frac{3qL^2}{8}$ *autorotazione*

ausiliaria:



trova altezza
 $\frac{H(z)}{EI} = q^*$

$\eta_A = H_A^+$
 $= \frac{qL^4}{16EI}$ $B \{ -H_A^+ + \frac{qL^3}{8} \cdot \frac{1}{2} = 0$
 positivo quindi abbassamento

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

METODO UNEMATICO

Posso applicare il teorema di Mohr e Castiglioni a strutture complesse (che non sono travi gherber) grazie al metodo unematico che utilizza il teorema in maniera indiretta.

Le componenti di spostamento sono identificabili considerando la somma dei contributi dovuti sui singoli corpi, presi uno alla volta deformabili (mentre considero il resto della struttura infinitamente rigida).

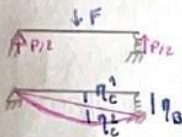
→ Una forza applicata sulla parte rigida, non ha alcun effetto, nemmeno sul corpo deformabile

Il metodo è utilizzabile anche per strutture iperstatiche, purché siano fisse.

VINCOLI CEDEVOLI ELASTICAMENTE

Possono essere di natura interna o esterna. Non sono perfetti / rigidi. Vengono definiti cedevoli in quanto rotazioni/spostamenti del vincolo non sono più nulli.

MOLLA TRASLAZIONALE



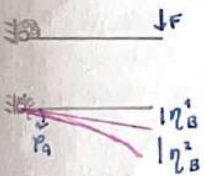
- Le reazioni vincolari sono confrontabili con il caso del cardellino
- MOLLA ↔ CARRELLO

- Per gli abbassamenti, vale la legge di Hooke:

$$F = k_m \cdot \delta \quad (k_m \text{ rigidità})$$

$$\eta_B = \frac{F/2}{k_m} \quad \eta_c = \eta_c^1 + \eta_c^2 = \frac{F/2}{2k_m} + \frac{FL^2}{48EI}$$

MOLLA ROTAZIONALE

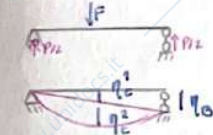


- Reazioni vincolari:
- MOLLA ↔ INCASTRO

- Abbassamenti, vale la legge $\eta = k_m \cdot \varphi$

$$\eta_B = \eta_B^1 + \eta_B^2 = \varphi_A \cdot L + \frac{FL^2}{3EI}$$

BIELLA



- Reazioni vincolari:
- BIELLA ↔ CARRELLO

- Abbassamenti:

$$\eta_B = \frac{F/2 \cdot h}{EA} \quad \eta_c = \eta_c^1 + \eta_c^2 = \frac{Fh}{4EA} + \frac{FL^2}{48EI}$$

DISTORSIONI TERMICHE

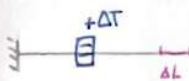
Se una struttura è isostatica, il carico termico non produce alcuna reazione vincolare.

CARICO TERMICO UNIFORME

un carico di trave calcolato da $+\Delta T$ o $-\Delta T$, subirà un allungamento o accorciamento di $\Delta l = \pm \alpha \cdot d_2 \cdot \Delta T$

coefficiente dilatazione termica del materiale

Per una trave di lunghezza L:



$$\Delta L = \alpha L \cdot \Delta T$$

CARICO TERMICO A FARFALLA

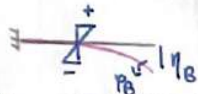


Il caso di trave subisce un'inflessione e rotazione delle estremità:

$$\Delta\varphi = \frac{2 \Delta t \alpha dz}{h}$$

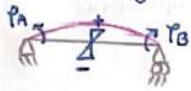
$\Delta t > 0$ setole fibre inferiori

Per travi di lunghezza L:



$$\eta_B = \Delta\varphi_{AB} = \int_0^L \frac{\alpha \Delta t}{h} dz = \frac{\alpha \Delta t}{h} \cdot L$$

$$\eta_B = \varphi_B \cdot \frac{L}{2}$$



$$P_A = P_B = \frac{\Delta P_{AB}}{2} = \frac{\alpha \Delta t L}{2h}$$

STRUTTURE IPERSTATICHE

Per i problemi iperstatici: il numero di incognite richiede la disposizione di equazioni sia della statica, sia **equazioni di congruenza** (tante quante le incognite iperstatiche).

esse esprimono $\left\{ \begin{array}{l} \text{rispetto delle condizioni statiche} \\ \text{dipendenza dalle caratteristiche di deformabilità} \end{array} \right.$

I metodi per la risoluzione sono due $\left\{ \begin{array}{l} \text{metodo delle forze} \\ \text{metodo delle deformazioni} \end{array} \right.$

METODO DELLE FORZE (il buono)

Assumo come incognite iperstatiche le azioni esercitate dai vincoli sovrabbondanti, si determinano imponendo che la struttura si deformi congruentemente ai vincoli, ottenendo l'unica configurazione congruente tra le ∞^n equilibrate.

Dal punto di vista pratico:

- Sopprimi i vincoli sovrabbondanti trovando il sistema statico equivalente
- Sostituisci ai vincoli le azioni che trasmettevano
- Calcolo le incognite iperstatiche tramite condizioni da imporre sui parametri di spostamento (normali = 0, cedevoli/termici $\neq 0$).

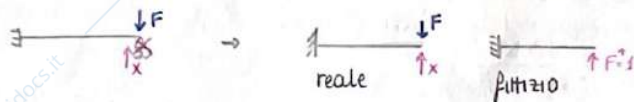
Utilizzo due metodi risolutivi: $\left\{ \begin{array}{l} \text{condizioni di Mohr (metodo cinematico)} \\ \text{TLV} \end{array} \right.$

METODO CINEMATICO

Applicabile in modo diretto se la struttura è un corpo singolo, altrimenti applicabile in maniera indiretta: considero un'asta alla volta di rigidità reale, mentre le altre di rigidità infinita. Sommo infine tutti i contributi tramite sovrapposizione degli effetti.

TLV

Applico una forza unitaria $F^* = 1$ ($0 \text{ M}^* = 1$) che compia lavoro sulla componente di spostamento (o rotazione) richiesta, risolvendo poi la struttura isostatica.



faccio i diagrammi, ricavo le funzioni e applico il TLV:

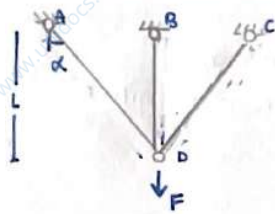
$$\left. \begin{array}{l} \Delta l_e = F^* \cdot \eta_B \\ \Delta l_i = \int_0^L H_{(z)}^* \frac{H(z)}{ES} dz \end{array} \right\} \Delta l_e = \Delta l_i$$

METODO DELLE DEFORMAZIONI (il elevato)

Assumo come incognite i parametri del moto (spostamenti e rotazioni) di alcune sezioni particolari. Calcolo le incognite imponendo il rispetto delle condizioni di equilibrio in corrispondenza di tali azioni, individuo dunque l'unica, tra le ∞^n , configurazione equilibrata equivalente congruente.

$$\text{Equazioni di equilibrio (n)} = \text{numero di incognite (n)} \quad (\text{sistema algebrico lineare})$$

IL PROBLEMA DEI TRE FILI

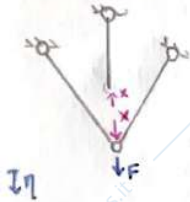


Tre aste di rigidità assiale EA, di lunghezza $L_B = L$, $L_A = L_C = \frac{L}{\cos \alpha}$

Classifico: $3n = 9$
 $V = 10$ (in D: $2(n-1) = 2(3-1)$)
 $V - 3n = 1$ iperstatica

Tramite teorema delle catene cinematiche, non c'è allineamento tra centri anolati $l = 0$ fissa

Risolveo con metodo delle forze. Considero l'asta b come una biella

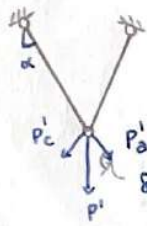


Condizione di congruenza $\eta_D(F, X) = -\frac{XL}{EA}$

Lo spostamento in D è pari allo spostamento subito dal punto B, appartenente all'asta soppressa su cui deve agire la forza che la restante parte della struttura applicava su di essa (X) in direzione verticale e opposta

Lo spostamento η è negativo, subirà a seguito dell'applicazione di X, in direzione opposta

Posso utilizzare un metodo grafico per la risoluzione:



considero $P' = P + X$ scomposto nelle direzioni dei fili

Teorema dei seni

$$\frac{P'}{\sin \alpha} = \frac{P'_a}{\sin \alpha} \rightarrow \frac{P'}{\sin(180-2\alpha)} = \frac{P'_a}{\sin \alpha}$$

$$\rightarrow \frac{P'}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{P'_a}{\sin \alpha}$$

$$P'_a = \frac{P'}{2 \cos \alpha} = P'_c$$

Trovo lo spostamento dell'asta in seguito all'applicazione dello sforzo:



$$\delta_a = \frac{P'_a \cdot L_a}{EA} = \frac{(P+X)L}{2EA \cos^2 \alpha}$$

Determino η_D : $\eta_D = \frac{\delta_a}{\cos \alpha} = \frac{(P+X)L}{2EA \cos^3 \alpha}$

Eguaglio all'equazione di congruenza:

$$\frac{(P+X)L}{2EA \cos^3 \alpha} = -\frac{XL}{EA}$$

$$X = -\frac{P}{1+2 \cos^3 \alpha}$$

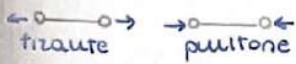
il verso assunto inizialmente è errato.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

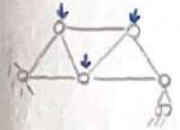
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

TRAVATURE RETICOLARI

Strutture ottenute tramite la compressione di aste con cerniere all'estremità.



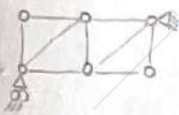
L'elemento di base della trave reticolare è il triangolo, ripetuto in maniera concatenata. Sono soggette a forze esterne ponanti per i nodi.



Agiscono carichi N , da trasporre al suolo, ma non flessioni perché trascurabili ($N \gg M$).

→ quando due aste sono compresse, il dimensionamento è tale da farle resistere alla compressione stessa, sia di non farle cadere in fenomeni di instabilità dell'equilibrio.

STRUTTURE RETICOLARI IPERSTATICHE



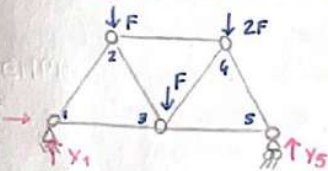
Classificare la struttura: $2n - a - a' = 12 - 9 - 3$
 n di nodi n di aste n di cond. elem. di vincolo esterne

{ se $2n - a = 3$ isostaticità
 se $2n - a < 3$ iperstaticità
 ulteriore

↓
 ho un'asta in più che devo tagliare

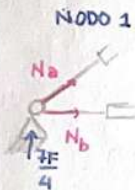
Per la risoluzione { metodo di Cullmann
 metodo di Ritter

Metodo di Cullmann → per determinare gli sforzi delle aste che concorrono allo stesso nodo.



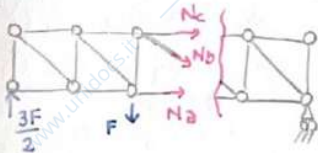
$$\begin{cases} X = 0 \\ Y_1 + Y_5 - 4F = 0 \\ \frac{FL}{2} + FL + 2F \cdot \frac{3L}{2} - Y_5 \cdot 2L = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y_5 = 9/4 F \\ Y_1 = 7/4 F \end{cases}$$

Impongo l'equilibrio nodo per nodo:



$$\begin{cases} x) N_a \cos \alpha + N_b = 0 \\ y) N_a \sin \alpha + \frac{7F}{4} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} N_b = \frac{7F}{4 \sin \alpha} \text{ trazione} \\ N_a = -\frac{7F}{4 \sin \alpha} \text{ compressione} \end{cases}$$

Metodo delle sezioni di Ritter → permette di calcolare lo sforzo di una determinata asta sezionando la struttura in due parti.



La sezione di Ritter deve tagliare le tre aste.

Se l'incognita è N_b , considero le altre due separate da taglio e impongo equilibrio alla rotazione.

(In questo caso all'0, diventa equilibrio alla traslazione verticale).

$$\frac{3F}{2} - F - \frac{\sqrt{2}}{2} N_b = 0 \rightarrow N_b = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

Abbandono le ipotesi di corpo rigido.

Studio i cambiamenti di forma e/o volume: problema cinematico ricondotto ad aspetto geometrico.

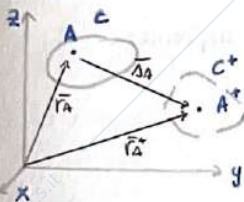
Ipotesi:

- assioma di continuità → volumi infinitesimi di materia hanno le stesse proprietà di volumi finiti.
- condizioni isoterme → a temperatura costante, ignorare le cause di deformazione.

Deformazione → processo di variazione di forma e/o volume

Configurazione → insieme delle posizioni di tutti i punti materiali appartenenti al corpo in relazione ad un sistema di riferimento fisso.

Qualifico le variabili:



C configurazione iniziale
 C^* configurazione deformata
 $\vec{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j} + z_A \hat{k}$
 $\vec{r}_A^* = x_A^* \hat{i} + y_A^* \hat{j} + z_A^* \hat{k}$ } Vettori posizione
 $\vec{\Delta}_A = \vec{r}_A^* - \vec{r}_A = u_A \hat{i} + v_A \hat{j} + w_A \hat{k}$ Vettore spostamento

Campo di spostamento
 essendo spostamenti ripetibili per tutti gli infinitesimi

identifica

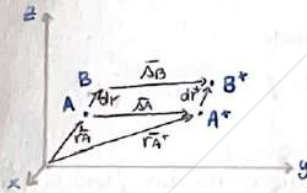
Restrizioni al processo di deformazione:

- processo cinematicamente ammissibile/congruente → ovvero NO fessurazioni (A si dispone su due A* trasformati diversi) e NO compenetrazioni (due punti diversi di C si trasformano nello stesso in C*)

Per far ciò, le funzioni u, v, w e le loro inverse devono essere monodrome, ovvero rispettare le posizioni univoche dei punti.

- funzioni di classe C_1 (anche le derivate $\partial u, \partial v, \partial w$ siano continue).

Presi ora due punti A, B appartenenti allo stesso elemento volumetrico dV , **conseguenza della congruenza:**



→ se A, B è stesso infinitesimo volumetrico dV , allora anche A*, B* è allo stesso infinitesimo volumetrico dV^* .

Dai vettori posizione:

$$\vec{r}_B^* = \vec{r}_A^* + d\vec{r}^*$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + d\vec{r}$$

sottraendo → $\vec{\Delta}_B = \vec{\Delta}_A + d\vec{\Delta}$ lo spostamento di un punto è pari allo spostamento del punto stesso vicino più un certo $d\vec{\Delta}$.

Gradiente di spostamento → **tensore** le cui componenti sono derivate.

↳ oggetto con proprietà indipendenti dal sistema di riferimento

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Divisibile in

SIMMETRICO

$$\epsilon = \frac{\bar{\Psi} + \bar{\Psi}^T}{2}$$

ANTISIMMETRICO

$$\theta = \frac{\bar{\Psi} - \bar{\Psi}^T}{2}$$

SIMMETRICO

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

TENSORE DELLE PICCOLE DEFORMAZIONI
 (misura di deformazione)

ANTISIMMETRICO

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}) & 0 \end{bmatrix}$$

TENSORE DI ROTAZIONE RIGIDA


↳ notazione ingegneristica

$$\begin{bmatrix} 0 & -w_x & w_y \\ w_x & 0 & -w_z \\ -w_y & w_z & 0 \end{bmatrix}$$

La relazione diventa: $\bar{\Delta}_B = \Delta_A + \Psi dx = \bar{\Delta}_A + \bar{\Theta} dx + \bar{\Xi} dx$

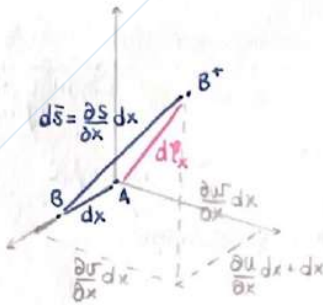
Significato geometrico dei termini:

$\bar{\Delta}_B = \Delta_A \rightarrow$ (primo addendo) identifica moto di traslazione rigida 

$\bar{\Delta}_B = \bar{\Theta} dx \rightarrow$ (data la proprietà algebrica $dx^T \bar{\Theta} dx = 0$ forma quadratica è nulla) comporta un moto di rotazione rigida 

$\bar{\Delta}_B = \bar{\Xi} dx \rightarrow$ termini diagonali ed extradiagonali con significati differenziati

TERMINI DIAGONALI



Suppongo un processo di deformazione, ma $A \equiv A'$

$d\bar{s}$ distanza $B-B'$

$d\bar{l}_x$ distanza $A-A'$ \rightarrow lunghezza fibra deformata

Le sue componenti:

$$d\bar{l}_x = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx$$

lungo x lungo y lungo z
in serie Mc-Laurin:

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) dx + O(2) \text{ tralascio all'ordine 2}$$

Definisco

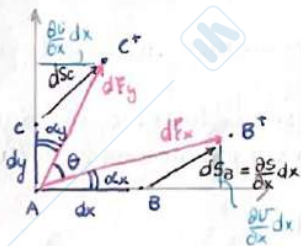
$$E_x = \frac{dE_x - dx}{dx} \text{ deformazione diretta (variazione di lunghezza rispetto lo stesso asse)}$$

\rightarrow Tutti gli elementi diagonali hanno il significato di deformazione diretta.

(- contrazioni)
(+ dilatazioni)

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad E_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad E_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

TERMINI EXTRADIAGONALI



Considerati i segmenti AB, AC, dopo il processo deformativo diventano $AB' = AC'$

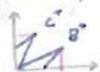
$d\bar{l}_x, d\bar{l}_y$ lunghezze fibre deformate

θ angolo tra lunghezze delle fibre deformate

Definisco:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ scorzimento angolare (variazione di angolo tra due fibre inizialmente ortogonali)}$$

Le componenti di $d\bar{s}_x$ e $d\bar{s}_y$ lungo gli assi sono:



$$\frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial v}{\partial x} dx, \text{ deve trovare una relazione con } d\bar{l}_x, d\bar{l}_y, \alpha_x, \alpha_y:$$

Sarebbe utile (x) ma caso, considero

$$\frac{d\bar{l}_x}{\alpha_x} = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\frac{d\bar{l}_y}{\alpha_y} = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

in ambito \infty posso confondere $d\bar{l}_x \rightarrow dx$ $d\bar{l}_y \rightarrow dy$

$$\alpha_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\alpha_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\text{sommando} \rightarrow \theta = \alpha_x + \alpha_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

scorzimenti angolari

\rightarrow Tutti i termini extradiagonali hanno significato di scorzimenti angolari.

EQUAZIONI DI CORRISPONDENZA

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$E_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Sono delle equazioni di **coerenza** tra campo di spostamento e deformazioni SE e SOLO SE il campo di partenza rispetta le restrizioni iniziali.

DEFORMAZIONI PRINCIPALI

Il tensore delle piccole deformazioni è riscrivibile come:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E_x & \frac{\delta_{yx}}{2} & \frac{\delta_{zx}}{2} \\ \frac{\delta_{xy}}{2} & E_y & \frac{\delta_{zy}}{2} \\ \frac{\delta_{xz}}{2} & \frac{\delta_{yz}}{2} & E_z \end{bmatrix} \sim \text{matrice: } \begin{cases} \text{simmetrica} \\ \text{diagonalizzabile} \\ \text{autovalori reali} \end{cases}$$

È possibile trovare una terna (1,2,3) tale per cui le tensioni \bar{E} diventi diagonale?
 Il problema è detto **problema agli autovalori**.

$$\bar{E}\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

direzioni principali di deformazione (autovettori)

e_1, e_2, e_3
 deformazioni principali (autovalori)

→ Nel sistema principale, \bar{E} presenta solo deformazioni dirette nelle diagonali.

→ **Direzione principale di deformazione**: è definita tale da non essere associata a rotture e allungamenti nulli contemporaneamente. $\delta_{ij} = 0$.

[direzione principale di deformazione ≠ direzione principale d'inerzia]

dipende dal processo di deformazione dipende dalla geometria della sezione

Il problema è riscrivibile come $(\bar{E} - e\bar{I})\bar{x} = 0$ ed ha soluzione per $\det(\bar{E} - e\bar{I}) = 0$

Si ricava l'equazione scalare $e^3 - eI_1 + eI_2 - I_3 = 0$ risolta dalle radici reali e_1, e_2, e_3 che corrispondono alle deformazioni principali (+ se dilatazioni, scalari).

Invarianti di deformazione

$$I_1 = \text{tr}(\bar{E}) = E_x + E_y + E_z$$

$$I_2 = E_x E_y + E_y E_z + E_z E_x - \frac{1}{4}(\delta_{xy}^2 + \delta_{yz}^2 + \delta_{zx}^2)$$

$$I_3 = \det(\bar{E})$$

$$I_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

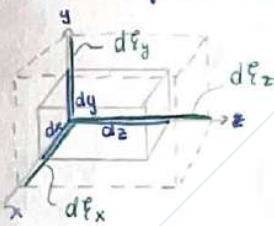
$$I_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$

$$I_3 = e_1 e_2 e_3$$

→ Sono indipendenti dal sistema di riferimento

→ In ambito di piccole deformazioni, risulta $I_1 \gg I_2 \gg I_3$ dunque I_3 trascurabile rispetto I_1

Studio il significato del 1° invariante:



Preso un volume $dV = dx dy dz$ con le facce sulle direzioni principali, applico il processo di deformazione: la forma sarà la stessa ma non il volume:

$$\begin{cases} d\epsilon_x = (E_1 + 1) dx \\ d\epsilon_y = (E_2 + 1) dy \\ d\epsilon_z = (E_3 + 1) dz \end{cases} \xrightarrow{\text{nuovo volume}} dV' = (E_1 + 1)(E_2 + 1)(E_3 + 1) dx dy dz$$

Faccio il rapporto tra deformato e indeformato: $\frac{dV'}{dV} = (E_1 + 1)(E_2 + 1)(E_3 + 1) = 1 + I_1 + I_2 + I_3$

→ Il processo avviene per sola variazione di forma, a volume costante.

$$\frac{dV' - dV}{dV} = I_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{porto 1 a sx e } I_1 \gg I_2 \gg I_3 \\ \text{coeff. di dilatazione cubica} \\ \text{ha significato di variazione relativa di volume.} \end{array} \right.$$

Riassumendo:

$$\bar{E} = \bar{\eta} + \theta' \bar{I} \quad \text{con } \theta' = \frac{I_1}{3}$$

$$\bar{\eta} = \begin{bmatrix} E_x - \theta' & \frac{\delta_{yx}}{2} & \frac{\delta_{zx}}{2} \\ \frac{\delta_{xy}}{2} & E_y - \theta' & \frac{\delta_{zy}}{2} \\ \frac{\delta_{xz}}{2} & \frac{\delta_{yz}}{2} & E_z - \theta' \end{bmatrix}$$

deviazione di deformazione

qualifica il processo per sola variazione di forma

$$\theta' \bar{I} = \begin{bmatrix} \theta' & 0 & 0 \\ 0 & \theta' & 0 \\ 0 & 0 & \theta' \end{bmatrix}$$

tensore idrostatico di deformazione

identifica il processo per sola variazione di volume

Domanda: tale deformazione è a volume costante?
 → Guardo la traccia del tensore, se $E_1 + E_2 + E_3 = 0$ allora sì e la variazione è solo di forma.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Dunque fin'ora abbiamo definito il campo di deformazione a partire da uno di spostamento, nel caso in cui questo fosse "fatto bene" $\bar{s} \rightarrow \bar{E}$.

Ma se partissi da un campo di deformazione generico e volessi il campo di spostamento, $\bar{E} \rightarrow \bar{s}$, devo introdurre particolari condizioni di integrabilità:

equazioni di congruenza interna/compatibilità

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

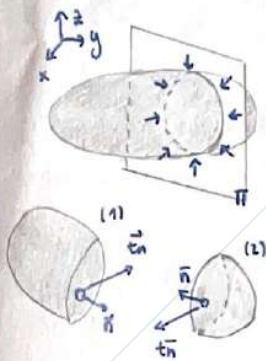
$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

ANALISI DELLA TENSIONE

Approccio statico (non più geometrico) di un corpo che interagisce con l'esterno tramite sistemi di forze. L'equilibrio postulabile sarà globale ma anche locale.

Il corpo è soggetto a forze di:

- VOLUME** \vec{F} (esercitate dall'ambiente sui punti interni del corpo).
- CONTATTO** (tutte le varie parti del corpo in cui è suddiviso, date dal taglio del continuo). \rightarrow tensione strettamente legata a queste
- SUPERFICIE** \vec{f} (esercitate dall'ambiente su porzioni o l'intera frontiera)



Prendo in considerazione un corpo in una generica configurazione (anche deformato), in un sistema di riferimento estrinseco fisso, soggetto ad un sistema equilibrato di forze di massa e superficie (equilibrato a rotazione e traslazione)

$$\begin{cases} \sum \vec{R} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{cases}$$

Taglio il corpo con un piano Π , suddividendolo in (1) e (2), le quali risulteranno nuovamente in equilibrio grazie alle forze mutue tra superfici.

\rightarrow Come per la deformazione, mi disinteresso delle cause di tensione.

Postulato delle sezioni di Eulero

L'azione che una porzione μ mosso, esercitata sulla porzione ν adiacente, equivale ad un sistema di forze che si esplica sulla superficie di separazione.

(Preso da superficie μ infinitesima, individuo \vec{n} normale alla giacitura che identifica il piano, detto vettore, di direzione uscente, definisco \vec{t}_n vettore tensione esercitato da (2) su (1) e viceversa).

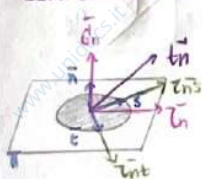
Postulato di Cauchy

Sull'areola dA , esiste finito il limite $\lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} = \frac{d\vec{R}}{dA} = \vec{t}_n$, con $\Delta \vec{R}$ risultante delle f di contatto.

La tensione così definita è una sorta di pressione $\frac{[F]}{[L^2]}$, tale vettore inoltre è funzione del punto e della giacitura.

I continui di Cauchy sono caratterizzati da $\lim_{dA \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{H}}{\Delta A} = 0$

COMPONENTI DI TENSIONE



La tensione è un campo vettoriale che dipende da punto e giacitura.

Si scompone in: \vec{t}_n TENSIONE NORMALE (proiettato \vec{t}_n su \vec{n} : $\vec{t}_n \cdot \vec{n} = \vec{n}^T \vec{t}_n = \sigma_n$)

\vec{t}_n TENSIONE TANGENZIALE (proiettato \vec{t}_n sul piano Π)

scomponibile ulteriormente in due componenti $\vec{t}_n = \sqrt{\tau_{nt}^2 + \tau_{ns}^2}$

Altre relazioni:

$$t_n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}$$

$$\vec{t}_n = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \tau_{nt} \\ \tau_{ns} \end{pmatrix}$$

Sono le componenti speciali di tensione, ovvero le componenti di tensione proiettate sulle componenti cartesiane locali, con una delle tre che coincide con la giacitura.

(n direzione \perp , s e t direzioni \parallel)

Le componenti speciali locali, ruotando, possono essere rappresentate come componenti cartesiane:

$$\sigma_n \rightarrow \sigma_z$$

$$\tau_{nt} \rightarrow \tau_{zx}$$

$$\tau_{ns} \rightarrow \tau_{zy}$$

(vale lo stesso per $n \rightarrow y, n \rightarrow x$)

Ripetendo poi $n \rightarrow y$ e $n \rightarrow x$ trova le altre componenti speciali nel sistema cartesiano.

Le 9 componenti che definiscono il **tenore delle tensioni**:

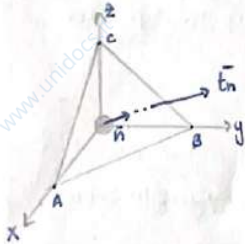
$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ misura la tensione a livello locale}$$

TEOREMA DI CAUCHY-POISSON

Il problema delle tensioni nei continui ha un numero finito di variabili. L'equilibrio del corpo $\begin{cases} \sum R = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$ ha anche forma locale: posso dunque trovare lo stato tensionale in un punto generico.

- CAUCHY $\bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \bar{t}_n$
- EQUILIBRIO $\text{div } \bar{\sigma} + \bar{F} = 0$
- RECIPROCA $\tau_{nm} = \tau_{mn}$

1. TEOREMA DI CAUCHY - ESISTENZA DEL TENORE DI TENSIONE



Considero una figura tetraedrica (come affettassi il continuo).

La faccia ABC ha la stessa inclinazione dell'area dA puntata in P , mentre le altre // agli assi.

Il tetraedro è infinitesimo, dunque gli spigoli sono lunghi dx, dy, dz .

- Agiscono:
- sulle facce \rightarrow forze di contatto \bar{t}_n scomponibili
 - sul volume \rightarrow forze di massa
 - trascurabili \rightarrow forze di volume (\propto di ordine superiore rispetto alle forze di equilibrio a traslazione)

Equilibrio:

$$\begin{cases} \sum R = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{t}_n dA = \bar{t}_x dA_x + \bar{t}_y dA_y + \bar{t}_z dA_z$$

scomponibile in:

$$\begin{cases} \bar{t}_{nx} dA = \sigma_x dA_x + \tau_{yx} dA_y + \tau_{zx} dA_z \\ \bar{t}_{ny} dA = \tau_{xy} dA_x + \sigma_y dA_y + \tau_{zy} dA_z \\ \bar{t}_{nz} dA = \tau_{xz} dA_x + \tau_{yz} dA_y + \sigma_z dA_z \end{cases}$$

cerco una relazione tra dA e le componenti:

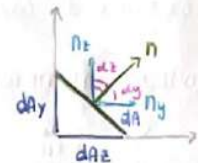
La relazione cercata $dA \rightarrow \begin{pmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix}$ è:

$$\begin{cases} \bar{t}_{nx} = \sigma_x \cos \alpha_x + \tau_{yx} \cos \alpha_y + \tau_{zx} \cos \alpha_z \\ \bar{t}_{ny} = \tau_{xy} \cos \alpha_x + \sigma_y \cos \alpha_y + \tau_{zy} \cos \alpha_z \\ \bar{t}_{nz} = \tau_{xz} \cos \alpha_x + \tau_{yz} \cos \alpha_y + \sigma_z \cos \alpha_z \end{cases}$$

prendendo una faccia del tetraedro caposta da dA_z, dA_y con le normali \bar{n}_z e \bar{n}_y :

α_x, α_y sono **coseni direzioni**.

$$\begin{cases} dA \cos \alpha_z = dA_z \\ dA \cos \alpha_y = dA_y \\ dA \cos \alpha_x = dA_x \end{cases}$$

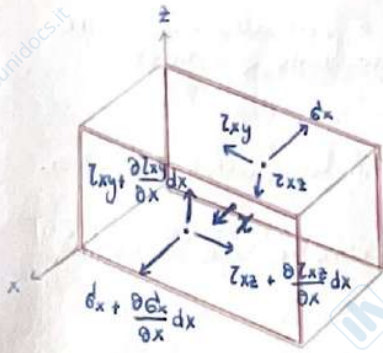


equazione di equilibrio alla traslazione di Cauchy: $\bar{t}_n = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$

in forma matriciale: $\begin{pmatrix} \bar{t}_{nx} \\ \bar{t}_{ny} \\ \bar{t}_{nz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$

\rightarrow Da informazioni su come varia la tensione fissato il punto, al variare della normale (= giacitura).

2. EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO



Preso un elemento prismatico che poggia sugli assi xyz .
 Applico le azioni di contatto sulle facce, partendo da quelle poggianti sugli assi verso quelle opposte, variate di un certo delta.

Agiscono: sulle facce \rightarrow forze di contatto
 sul volume \rightarrow forze di massa $F = (X \ Y \ Z)^T$

Equilibrio (lungo x): ma vale anche per tutte le altre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \cdot dx dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \cdot dx dy + X dV = 0$$

aree di spianezza

Dato che i termini non variati si elidono automaticamente, e che $dV = dx dy dz$:

Equazioni indefinite di equilibrio

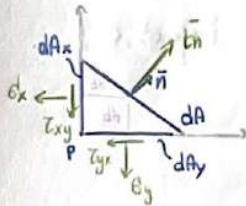
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

tramite l'operatore divergenza $\text{div} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \ \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$\rightarrow \text{div } \bar{\sigma} + \bar{F} = 0$$

\rightarrow Definiscono come varia la tensione al variare del punto, fissata la geometria.

Simmetria del tensore di tensione \rightarrow dalla deformazione \rightarrow nella deformazione, il tensore deriva dalla simmetria, nella tensione lo definisce la simmetria



Riprendendo il tetraedro di Cauchy su xy e considerando le forze uscenti da dAx e dAy . Impongo l'equilibrio:

$t_{xi}, t_{yj} \rightarrow$ braccio nullo

$$\tau_{yx} dAy dh = \tau_{xy} dAx dh$$

a meno di oesimi (posso confondere P con O)
 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

\rightarrow Il tensore di tensione è simmetrico, posso confondere τ_{yx} con τ_{xy}

3. TEOREMA DI RECIPROCAITÀ DELLE COMPONENTI DI TENSIONE

Dopo aver dimostrato la simmetria del tensore, prendo in considerazione il volume dV puntato in P , lo taglio con due piani di geometria \bar{m} e \bar{n} .

Sulle due aree agiscono \bar{t}_m e \bar{t}_n , accomunati dal tensore di tensione.

$$\bar{t}_n = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$$

$$\bar{t}_m = \bar{\sigma} \cdot \bar{m}$$

proietto \bar{t}_n su \bar{m} e \bar{t}_m su \bar{n} (ovvero faccio il prodotto scalare)

$$\bar{t}_n \cdot \bar{m} = \bar{m}^T \bar{t}_n = \bar{m}^T \bar{\sigma} \bar{n}$$

$$\bar{t}_m \cdot \bar{n} = \bar{n}^T \bar{t}_m = \bar{n}^T \bar{\sigma} \bar{m}$$

$\bar{\sigma}$ è lo stesso perché siamo nello stesso infinitesimo volumetrico di P .

Ho trovato delle quantità scalari (per definizione), se ne faccio il rapporto restano invariate:

$$t_{nm} = (\bar{\sigma} \bar{n})^T \bar{m} = \bar{n}^T \bar{\sigma} \bar{m}$$

Teorema

La proiezione del vettore \bar{t}_n lungo la generica direzione \bar{m} , è pari alla componente di tensione \bar{t}_m lungo la direzione \bar{n} (indipendentemente dalle giaciture).

Corollario

Prese $\bar{n} \perp \bar{m}$, facendo la proiezione di \bar{t}_n e \bar{t}_m , ho le componenti tangenziali Z_{nm} e Z_{mn} .

Proprietà

Le componenti tangenziali sviluppate a partire da uno spigolo comune, sono entrambe dirette entranti/uscenti dallo spigolo stesso.

CONDIZIONE AI LIMITI

→ Sulla superficie del continuo, vale l'equilibrio di Cauchy $\bar{t}_n = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$ e diventa equazione ai limiti perchè le vettore tensione sulla superficie è un vettore forza di superficie.

$$\bar{f} = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$$

cond. ai limiti → relazioni di Cauchy portate sulla superficie sostituendo \bar{t}_n con \bar{f}

TENSIONI PRINCIPALI

Per trovare tensioni e direzioni principali di tensione, devo cercare valori di $\bar{\sigma}$ e \bar{n} tali per cui in generico punto P abbia $\bar{\sigma} \bar{x} = \lambda \bar{x}$, ovvero un problema agli autovalori.

Cerco una terna (1,2,3) tale per cui $\bar{\sigma}$ sia diagonale $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

$$\bar{\sigma} \bar{x} = \lambda \bar{x}$$

direzioni principali di tensione / tensioni principali

(analogia con la deformazione)

Le tensioni max/min stanno nell'intervallo $\sigma_i = \{ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}$

→ la direzione \bar{i} è principale se entrambe le Z associate sono nulle

equazione secolare
$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

Invarianti:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - (Z_{xy}^2 + Z_{yz}^2 + Z_{zx}^2)$$

$$I_3 = \det \bar{\sigma}$$

rispetto al sistema principale

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

→ Differenza con tensioni e direzioni principali di deformazione: per gli invarianti di tensione, NON posso trascurare I_3 a favore di I_1 !

Quantifico lo stato di tensione del continuo nel punto dopo aver ottenuto le tensioni principali:

monoassiale $\sigma_i \neq 0, \sigma_j = \sigma_k = 0$

biaxiale $\sigma_i \neq 0, \sigma_j \neq 0, \sigma_k = 0$

triaxiale $\sigma_i \neq 0, \sigma_j \neq 0, \sigma_k \neq 0$ (eventualmente coincidenti → stato idrostatico)

Il tensore di tensione può essere scomposto in:

$$\bar{\sigma}_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & Z_{yx} & Z_{zx} \\ Z_{xy} & \sigma_y - \bar{\sigma} & Z_{zy} \\ Z_{xz} & Z_{yz} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

tensore deviatorico

varia in funzione della terna di riferimento

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

tensore idrostatico

Stato triassiale con radici coincidenti (qualunque direzione è principale)

Proprietà delle direzioni principali

Il teorema di reciprocità delle componenti di tensione dimostra che le direzioni principali di tensione sono tra loro perpendicolari.

Se prendo le direzioni principali a coppie e le proietto: $\sigma_1 \cos \alpha_{12} = \sigma_2 \cos \alpha_{12}$
 noto che esse porteranno tutte dalla stessa parte



$$(\sigma_i - \sigma_j) \cos \alpha_{ij} = 0$$

↳ • il prodotto è 0 quando uno dei due componenti è 0, ma se $\alpha_{ij} = 0$ le direzioni sono $i \perp j$.

• se $\sigma_i - \sigma_j = 0$ si verificano i casi particolari:

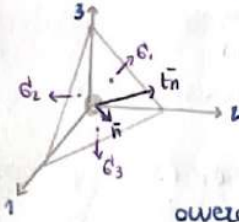
→ **IDROSTATICO** le tensioni sono tutte coincidenti, non trovo la tensione principale univocamente.

→ **MONOASSIALE** due direzioni ortogonali (due uguali tra loro e 0) che definiscono un piano principale di tensione scarico.

→ **BIASSIALE** detto piano perchè individua un piano di tensione.

CERCHI DI MOHR

Strumento grafico per rappresentare lo stato di tensione (3D) su un piano (2D) in cui il sistema d'assi è σ_n, τ_n detto piano di Mohr.



Individuo tensioni e direzioni principali 1,2,3.

Mi posiziona su P e determino la terza principale di tensione $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
(Lo stato di tensione è generalmente triassiale).

Costruisco il tetraedro di Cauchy. Il vettore tensione è: $\bar{t}_n = \bar{\sigma} \bar{n}$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

componenti della normale
è nel sistema di riferimento principale è diagonale

componenti vettore tensione rispetto gli assi principali 1,2,3

- Riscivo la componente normale, ovvero la componente speciale $\bar{\sigma}_n$:

$$\bar{\sigma}_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} = n^T \bar{t}_n = (n_1, n_2, n_3) \begin{pmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ t_{n3} \end{pmatrix} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

- Riscivo l'altra componente speciale, partendo da $\bar{t}_n^2 = \bar{\sigma}_n^2 + \tau_n^2$: $\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$

- Normalizzo le normali: $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Ricostruisco le tre equazioni ad un sistema di parametri σ_n, τ_n di incognita n:

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \bar{\sigma}_n \\ \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \tau_n^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1^2 = \frac{(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2})^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \\ n_3^2 = \frac{(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 + \tau_n^2 - (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \end{cases}$$

La soluzione è data dall'intersezione di tre cerchi, con $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Analizzo i denominatori e di conseguenza i numeratori: se $n_1, n_2, n_3 \geq 0$, dall'ordinamento delle σ , so a priori se un denominatore è + o -, dunque anche il numeratore avrà lo stesso segno:

$n_1^2 \geq 0 \rightarrow \frac{\geq 0}{\geq 0}$ fuori 1° cerchio

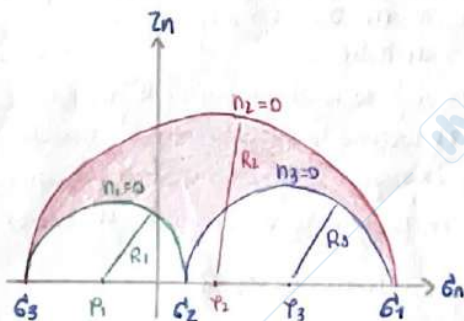
$n_2^2 \geq 0 \rightarrow \frac{\leq 0}{\leq 0}$ dentro 2° cerchio

$n_3^2 \geq 0 \rightarrow \frac{\geq 0}{\geq 0}$ fuori 3° cerchio

Raggi e centri delle circonferenze:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right) & R_1 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right) \\ P_2 &= \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right) & R_2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \\ P_3 &= \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}, 0\right) & R_3 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Studio ora la corrispondenza tra un generico punto $Q_1(n_1, n_2, n_3)$ appartenente ad una superficie sferica attorno a P, e un punto $Q'(\sigma_n, \tau_n)$ appartenente al piano di Mohr:

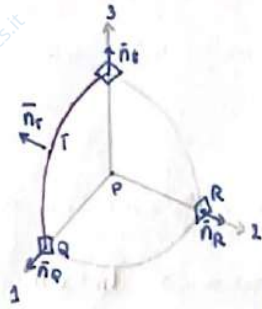


Preso il piano di Mohr σ_n, τ_n , disegno le tre semicirconferenze (tensioni negative non hanno senso fisico).

Essendo unica la soluzione, l'intersezione dei tre cerchi è una regione di piano detta **arco di Mohr**

tutti i punti al suo interno vedono $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ come tensioni principali

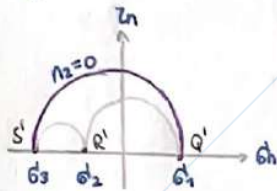
SPAZIO → PIANO DI MOHR



Partendo da P, costruisco un settore sferico, detto **ottante**, positivo. Considero Q, R, S in cui la sfera interseca gli assi e dai piani tangenti alla sfera nei punti citati. Essi hanno coseni direttori: $n_Q = (1, 0, 0)$ $n_R = (0, 1, 0)$ $n_S = (0, 0, 1)$

Sono sullo spazio delle tensioni perchè su un sistema di riferimento principale.

Il punto Q sul piano di Mohr diventa Q' e sta su σ_1 (analogamente $R' \rightarrow \sigma_2$ e $S \rightarrow \sigma_3$).



Similmente preso un generico T di giacitura $n_T = (n_1, 0, n_3)$ che sta sull'arco dell'ottante, si trasformerà in T' sulla semicirconferenza $n_2 = 0$ del piano di Mohr.

Per determinare gli angoli, prendo in considerazione solo due piani dell'ottante. Il punto è identificato da \bar{n} di componenti $\begin{cases} n_1 = \cos \alpha \\ n_2 = \sin \alpha \end{cases}$

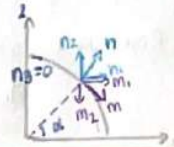
Prendo in considerazione \bar{m} di componenti $\begin{cases} m_1 = \sin \alpha \\ m_2 = -\cos \alpha \end{cases}$

Esprimo le componenti speciali di tensione:

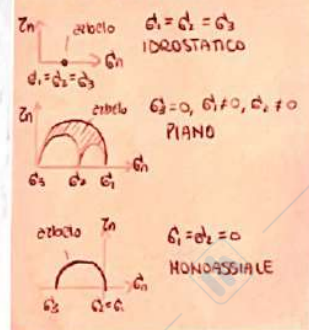
$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_n = \sigma_1 n_1 m_1 + \sigma_2 n_2 m_2 = \sigma_1 \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_2 \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

Equazione parametrica di una circonferenza

L'angolo α dell'ottante corrisponde a 2α sul piano di Mohr.



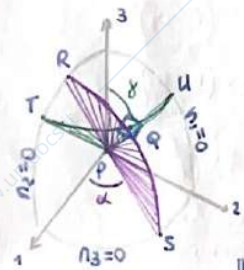
STATI DI TENSIONE



Osservazioni

- PUNTI (nello spazio delle tensioni) → PUNTI (sul piano di Mohr)
- ARCHI DI CIRCONFERENZA (nello spazio delle tensioni) → SEMICIRCONFERENZE (sul piano di Mohr)
- ANGOLI (nello spazio delle tensioni) → ANGOLI DOPPI (sul piano di Mohr)

PUNTO GENERICO SUL PIANO DI MOHR



Individuare la posizione di Q significa conoscere la giacitura. È un metodo grafico. Idealmente taglio l'ottante in due piani // passanti per Q e paralleli ai piani principali 1-2, 2-3, individuando R, S, T, U.

Rispetto a P, gli archi \widehat{RS} e \widehat{TU} hanno angoli 2α tra i propri raggi e le direzioni 1, 3.

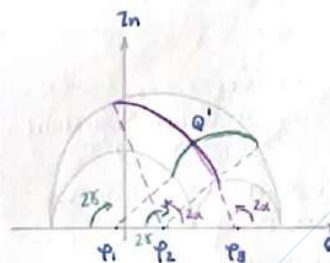
Le normali dei punti: $\bar{n}_R = \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ n_3 \end{pmatrix}$ $\bar{n}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ $\bar{n}_T = \begin{pmatrix} n_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{n}_U = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Il piano di circonferenza \widehat{RS} è **omotetico** (stessa origine, ≠ raggio) alla circonferenza $n_3 = 0$, analogamente \widehat{TU} **omotetico** a $n_1 = 0$

Per trovare R' e S' sul piano di Mohr:

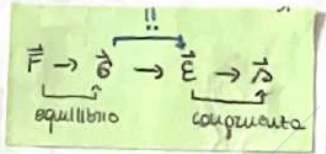
- Da P₂ stacco un raggio di 2α rispetto la direzione 3: R' trovato.
- Da P₁ stacco un raggio di 2α rispetto la direzione 3: S' trovato.
- Da P₂ stacco un raggio di 2α rispetto la direzione 1: T' trovato.
- Da P₃ stacco un raggio di 2α rispetto la direzione 1: U' trovato.

Dall'intersezione tra le omotetiche trovo Q'



LEGAME COSTITUTIVO

Descrive le modalità di comportamento del materiale soggetto a certe azioni, al fine di descrivere il legame tra tensione e deformazione.



- Il materiale deve essere:
- 1 omogeneo
 - 2 elastico
 - 3 isotropo
 - 4 lineare

- 1 **Omogeneità** distribuzione coerente delle proprietà del materiale (no penetrazioni o fratture).
- 2 **Isotropia** indipendenza dalla direzione di applicazione del carico.
- 3 **Elasticità** un materiale è definito elastico se esiste al suo interno una certa energia detta potenziale di deformazione/elastico.

Durante il processo di deformazione vi è un immagazzinamento di energia, a spesa della quale posso recuperare le deformazioni una volta eliminata la causa del processo.

$$W(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \sigma^T d\epsilon \quad \text{potenziale elastico} \quad (\text{Notazione di Voigt: componenti di } \epsilon^T \text{ ed } \epsilon \text{ a meno di un fattore } \frac{1}{2})$$

$$= \int_0^{\epsilon} dW \quad \text{è un potenziale esatto}$$

Ho ammesso che $\sigma = \sigma(\epsilon)$, ora devo trovare la relazione che mi permette di dare anche la relazione inversa.

Espresso in differenziale:

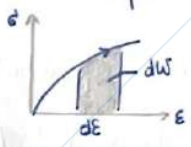
$$dW = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \dots + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{zx}} d\epsilon_{zx}$$

ma anche

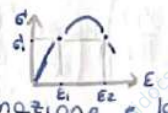
$$dW = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \dots + \tau_{zx} d\epsilon_{zx}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} & \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \\ \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} & \tau_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \\ \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_z} & \tau_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \end{aligned} \right\}$$

→ ciascuna componente di tensione si determina derivando il potenziale rispetto la componente di deformazione corrispondente: $\sigma = \sigma(\epsilon)$



Rappresentando il legame elastico sul grafico, il potenziale è definito dall'area sottesa dalla curva.



Se il legame elastico fosse iperelastico allora alla stessa tensione corrisponderebbero due stati di deformazione ϵ_1 e ϵ_2 e la relazione non sarebbe invertibile.

Introduco delle **restizioni** (che sono coincidenti):

- $\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{ik}}$ è \mathbb{C}^0 derivata 2° del potenziale fatta rispetto deformazioni generiche devono essere continue
- $\det(\bar{H}) \neq 0$ in P_0 con $\bar{H} = \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{ik}} \right]$

La condizione per il rispetto delle restizioni è l'esistenza dell'energia complementare a quella di deformazione:

$$\Psi(\sigma) = \sigma^T \bar{\epsilon} - W(\epsilon) \quad \text{potenziale complementare}$$

forma espresa

$$= \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx} - W(\epsilon)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Derivando rispetto le componenti di tensione:

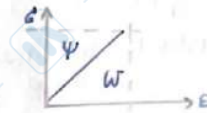
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} = 1 \cdot \epsilon_x + \sigma_x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial \sigma_x} + \dots = \frac{\partial W}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} \frac{\partial \epsilon_y}{\partial \sigma_x}$$

$$= \epsilon_x + \sigma_x \frac{\partial \epsilon_x}{\partial \sigma_x} + \dots - \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \right) \frac{\partial \epsilon_x}{\partial \sigma_x} + \dots = \epsilon_x$$

diventa differenza di termini uguali

→ L'esistenza di Ψ assicura l'invertibilità del materiale: $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{\sigma})$

4 **Linearità** Non vi è bisogno di restrizioni: se vale la proprietà allora il potenziale e il suo complementare coincidono nel punto:



$$W = \Psi = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\epsilon}$$

Preso il potenziale come funzione della deformazione, in ipotesi di deformazioni infinitesime, sviluppo in serie di McLaurin nell'intorno dello stato indeformato

$$W(\epsilon_x, \dots, \gamma_{zx}) = \underbrace{\psi_0}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \right)}_{=\sigma_x} \epsilon_x + \underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} \right)}_{=\sigma_y} \epsilon_y + \dots + \underbrace{\left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \right)}_{=\tau_{zx}} \gamma_{zx} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x^2} \epsilon_x^2 + \dots + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{zx}^2} \gamma_{zx}^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} \epsilon_x \epsilon_y + \dots + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{zx}} \epsilon_x \gamma_{zx} + \dots + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{zx} \partial \gamma_{zy}} \gamma_{zx} \gamma_{zy} \right] + O(2)$$

o **Autotensione**

↓
tensioni nel continuo in stato indeformato

stato naturale → stato eventualmente deformato, NON TENSIONATO.

Se ipotizzo STATO NATURALE ≡ STATO INDEFORMATO allora autotensioni nulle:

$$W(\epsilon_x, \dots, \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x^2} \epsilon_x^2 + \dots + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{zx}^2} \gamma_{zx}^2 \right] + \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} \epsilon_x \epsilon_y + \dots + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{zx} \partial \gamma_{zy}} \gamma_{zx} \gamma_{zy} \right]$$

> 0 forma quadratica strettamente positiva (condizione per la linearità)

In forma matriciale: $W = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T \bar{H} \bar{\epsilon} > 0$

Preso ora il potenziale e derivato rispetto ϵ_x (e poi tutte le componenti) trovo:

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} = \sigma_x = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x^2} \right) \epsilon_x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} \right) \epsilon_y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_z} \right) \epsilon_z + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{xy}} \right) \gamma_{xy} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}} \right) \gamma_{yz} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{zx}} \right) \gamma_{zx}$$

Espressione linearizzata che deriva dall'aver troncato gli infinitesimi di ordine superiore al 2° del potenziale.

→ **Conclusione:** tensioni e deformazioni sono legate linearmente:

$$\bar{\sigma} = \bar{H} \bar{\epsilon}$$

$$\bar{\epsilon} = \bar{H}^{-1} \bar{\sigma} \quad \text{ovvero}$$

$$W = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T \bar{H} \bar{\epsilon}$$

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x^2} & \dots & \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{zx}} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{zx}} & \dots & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{zx}^2} \end{bmatrix}$$

se $W = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T \bar{H} \bar{\epsilon} > 0$ allora $\det(\bar{H}) \neq 0$ dunque \bar{H} è invertibile

matrice \bar{H} :

materiale generico → 6x6 componenti

• isotropo → 21 componenti

• elastico → 13 componenti

• elastico-lineare → 2 componenti

$$\Psi = \bar{\sigma}^T \bar{\epsilon} - W(\bar{\epsilon})$$

$$= \bar{\epsilon}^T \bar{H} \bar{\epsilon} - \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T \bar{H} \bar{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^T \bar{H} \bar{\epsilon}$$

Aggiungo le ipotesi dell' **2. isotropia**: sfrutto gli invarianti di ~~tensione~~ per le informazioni sulla direzione.

$$W(E_1, \dots) = W(I_1^{(E)}, I_2^{(E)}, I_3^{(E)})$$

= 0 perchè $W(E)$ forma quadratica mentre I_3 cubico

una possibile formula:

$$= a I_1^2 + b I_2$$

a, b dipendono dal materiale, determinate con λ, G costanti di Lamé

$$= \frac{\lambda + 2G}{2} I_1^2 - 2G I_2$$

$$I_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$I_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

Dal punto di vista fisico non trovo uscenti con le costanti di Lamé, dunque utilizzo delle **costanti elastiche** (2, la 3° deriva dalle altre)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$G \rightarrow$ modulo di elasticità tangenziale

$E \rightarrow$ modulo di elasticità longitudinale (Young)

$\nu \rightarrow$ coefficiente di Poisson

Grande alle costanti elastiche definitisco:

Leggi di Hooke generalizzate \rightarrow qualificano le legami elastico lineare omogeneo isotropo tra tensioni e deformazioni.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

notazione di Voigt

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

matrice delle costanti elastiche

$$H^{-1} = D$$

\rightarrow Anche se lo stato di tensione è monoassiale, lo stato di deformazione risulta triassiale. (conseguenza dell'isotropia: se zero σ_y e σ_z , avrò $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \neq 0$).

\rightarrow In un sistema principale di tensione o deformazione, τ o γ sono nulle dunque un sistema principale di tensione \equiv sistema principale di deformazione.

\rightarrow Le costanti non sono più 21, ma 3 (conseguenza dell'isotropia)

Il potenziale elastico nel caso isotropo:

$$W = \frac{G(1-\nu)}{1-2\nu} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) > 0$$

essendo definita positiva, il determinante della matrice delle costanti $\det(D) > 0$,

molte dalle sottomatrici $\frac{1}{E} > 0 \quad \frac{1-\nu^2}{E^2} > 0 \quad \frac{(1+\nu)^2(1-2\nu)}{E^3} > 0$

Unendo queste relazioni e \star , ottengo:

$E > 0 \rightarrow$ in una prova monoassiale, E identifica la pendenza della retta

$\frac{E}{2} < G < \frac{E}{2} \rightarrow G$ non può avere valori qualunque

$-1 < \nu < 0,5 \rightarrow$ analiticamente. Fisicamente $0 < \nu < 0,5$ tramite una prova di tiro monoassiale trovo una deformazione triassiale



traziando, le provino si restringe.

LEGATE ELASTICO-LINEARE NEL SISTEMA PRINCIPALE

Risolvo le leggi di Hooke:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1 & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

osservazione

→ Ad uno stato di tensione monoassiale ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) corrisponde uno stato di deformazione triassiale

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sigma_1/E \\ \varepsilon_2 &= -\nu\sigma_1/E \\ \varepsilon_3 &= -\nu\sigma_1/E \end{aligned}$$

→ Collegamento con gli invarianti di deformazione:

$$\begin{aligned} I_1^{(\varepsilon)} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \frac{2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2\nu}{E} I_1^{(\sigma)} \quad \text{legge di Hooke volumetrica} \end{aligned}$$

se mi metto nel caso idrostatico ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)

$$I_1^{(\varepsilon)} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma$$

modulo di Bulk
elasticità volumetrica

IL PROBLEMA ELASTICO

Metto assieme equilibrio, congruenza e legame costitutivo.

- Ipotesi del problema:
- piccoli spostamenti / deformazioni
 - processi di carico / scarico quasi statici
 - comportamenti elastico-lineari



Considero un corpo vincolato ad una superficie S , in equilibrio.

- Agiscano:
- forze di massa \bar{F}
 - forze di superficie F
 - spostamenti impressi \bar{s}

Equazioni del sistema:

- * $\text{div } \bar{\sigma} + \bar{F} = 0$ indefinite di equilibrio
- * $\bar{\sigma} \bar{n} = \bar{f}_n$ equazioni ai limiti (Cauchy sul bordo)
- * $\bar{\sigma} \bar{n} = \bar{t}_n$ Cauchy nel continuo

Aggiungo le relazioni di corrispondenza, che sono anche relazioni di congruenza interna nel momento in cui il campo di spostamento sia fatto bene:

corrispondenza

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ &\vdots \\ &\text{(6 equazioni)} \end{aligned} \quad \text{congruenza}$$

le riscrivo per avere una notazione più compatta:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

ho scritto la congruenza in forma vettoriale

L^T matrice di operatori differenziali

In notazione di Voigt: $\bar{\epsilon} = L^T \bar{s}$

Leggi di Hooke nella forma diretta: $\bar{\epsilon} = D^{-1} \bar{\sigma}$

* $D^{-1} \bar{\sigma} = \bar{\epsilon} = L^T \bar{s}$

Unicità della soluzione:

- Suppongo per assurdo esistano due soluzioni $\begin{cases} \bar{s}_1 & \epsilon_1 & \sigma_1 \\ \bar{s}_2 & \epsilon_2 & \sigma_2 \end{cases}$
- Ne considero le differenze:
- $$\begin{aligned} \Delta \bar{s} &= \bar{s}_1 - \bar{s}_2 \\ \Delta \bar{\epsilon} &= \bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2 \\ \Delta \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2 \end{aligned}$$

ho le stesse forze, sotto le quali forzando la differenza si va a zero

Per ipotesi valgono le equazioni indefinite e di Cauchy: $\begin{cases} \text{div}(\Delta \bar{\sigma}) = 0 \\ \Delta \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = 0 \end{cases}$ per definizione di soluzione

→ il sistema $\Delta \bar{\sigma}$ è di autotensioni: tensioni che equilibrano un carico nullo. È autoequilibrato.

Applico il TLV per la soluzione esatta:

$$\begin{aligned} \partial L_{\text{ext}} &= 0 \\ \partial L_{\text{int}} &= \int_V \Delta \bar{\epsilon}^T \Delta \bar{\epsilon} dV = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{i due sistemi sono reali; alle forze corrispondono tensioni} \\ &\text{a cui sono associate deformazioni grazie al legame costitutivo} \\ &\text{(+ materiale elastico lineare omogeneo isotropo)} \\ &\text{È come fosse un teorema energetico.} \end{aligned}$$

$$= 2 \int_V w(\Delta \bar{\epsilon}) dV = 0$$

Essendo il potenziale forma quadratica definita positiva > 0 , se il suo integrale è 0, allora $\Delta \bar{\epsilon} = 0$, ovvero non vi è differenza tra le soluzioni !!!

→ SE LA SOLUZIONE ESISTE ALLORA È UNICA: TEOREMA DI KIRCHOFF

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Ora devo trovare l'esistenza della soluzione. Due formulazioni \leftarrow agli spostamenti alle tensioni

FORTULAZIONE AGLI SPOSTAMENTI

Parto dal legame costitutivo con le costanti di Lamé espresse nel legame di corrispondenza.

$$\sigma_x = (\lambda + 2G) \epsilon_x + \lambda (\epsilon_y + \epsilon_z) = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

(fatto per le x, ma vale per tutto)

Le sostituisco alle equazioni di equilibrio $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$ diventa:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{G} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{X}{G} = 0$$

ottengo le Laplaciane: $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

$$\nabla^2 u + \left(1 + \frac{\lambda}{G}\right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0$$

$$\nabla^2 u + \frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{X}{G} = 0$$

Ho ottenuto il primo invariante delle deformazioni $I_1^{(E)}$

$$\nabla^2 u + \frac{\lambda + G}{G} \frac{\partial}{\partial x} I_1^{(E)} + \frac{X}{G} = 0$$

L'approccio agli spostamenti è formulato partendo dall'equilibrio e inserendo le relazioni del problema elastico, identificando un'eq. di equilibrio in termini di spostamenti (avrei dovuto aggiungere l'eq. ai limiti ma non dà molte info).

Equazioni di Lamé-Navier (o eq. dell'elastostà)

FORTULAZIONE ALLE TENSIONI

È il duale però più complesso. Si formula per un continuo non vincolato.

Parto dalla congruenza interna, inserisco il legame costitutivo e aggiungo l'equilibrio:

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_1^{(E)} = 0 \quad (\text{vale per tutte}) \quad \text{con forze di massa costanti}$$

Relazioni di Mitchell-Bellazzoni

(relazioni di congruenza interne in termini di tensioni)

→ Se volessi formularle per forze di massa non costanti, a destra avrei le derivate delle forze di massa.

Tra invariante di tensione e deformazione c'è un legame: legge di Hooke in forma volumetrica.

$$\text{Rimaneggiando le equazioni trovo: } \nabla^2 u \cdot I_1^{(E)} = 0$$

↓
quando il Laplaciano di una funzione è nullo, allora la funzione è armonica

↓
la soluzione che sto cercando è una funzione armonica.

TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI

Ha validità generale: non dipende dal materiale del continuo.

Utilizzato per determinare le componenti di spostamento e/o rotazioni per sistemi deformabili, alternativamente alla linea elastica o Mohr e cordolati.

(Rimangono valide le ipotesi iniziali \leftarrow sovrapposizione degli effetti
 campo virtuale (= spostamenti infinitesimi + compatibile vincoli)
 dal teorema è che soddisfa Cauchy ed equilibrio

Ipotesi:

- sistema equilibrato \Leftrightarrow staticamente ammissibile (A)



Su un corpo di volume V e superficie \bar{S} , sono applicate forze di massa \bar{F}^A e forze di superficie \bar{f}^A .

All'interno del corpo agisce la tensione $\bar{\sigma}$ che soddisfa:

$$\text{div } \bar{\sigma} + \bar{F}^A = 0 \quad (\text{indefinite di Equilibrio})$$

$$\bar{\sigma} \bar{n} = \bar{f}^A \quad (\text{Cauchy})$$

sistema congruente \Leftrightarrow cinematicamente ammissibile (B)

Preso in considerazione un continuo a cui applico lo spostamento \bar{u} , ne determino il campo di deformazione tramite equazioni di corrispondenza:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

I sistemi A e B sono indipendenti tra loro.

Enunciato

Il lavoro virtuale esterno compiuto dalle forze di volume e superficie, è pari al lavoro interno compiuto dalle componenti di tensione:

$$\int_V \bar{F}^A \cdot d\bar{u} \, dV + \int_S \bar{f}^A \cdot d\bar{u} \, dS = \int_V \bar{\sigma}^A : d\bar{\epsilon} \, dV$$

lavoro esterno delle forze del sistema
lavoro interno delle forze del sistema

Ricordo secondo Voigt: $\bar{f} \cdot \bar{u} = \bar{f}^T \bar{u} = (f_1 \ f_2 \ f_3) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 u_3$

Proprietà

\rightarrow Il TLV è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio.

Dimostro l'equilibrio utilizzando poi il TLV:

$$\int_S \bar{f} \cdot \bar{u} \, dS = \int_S \bar{f}^T \bar{u} \, dS = \int_S (f_x u + f_y v + f_z w) \, dS$$

per Cauchy:

$$\begin{aligned} f_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ f_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ f_z &= \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{aligned}$$

$$= \int_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) u + (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z) v + (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) w \, dS$$

raggruppo i termini normali alla giacitura:

$$= \int_S (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) n_x + (\tau_{yx} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w) n_y + (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z w) n_z \, dS$$

dal teorema della divergenza:

$$\int_V \text{div } \bar{g} \, dV = \int_S \bar{g}^T \bar{n} \, dS$$

assimilo a \bar{g} le funzioni:

$$\begin{aligned} g_x &= \sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w \\ g_y &= \tau_{yx} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w \\ g_z &= \tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z w \end{aligned}$$

Posso abbassare di grado la funzione grazie al teorema della divergenza:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} v + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} w + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} u + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} v + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} w + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} u + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} v + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} w + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z}$$

Raccogliendo u, v, z, le parti corrispondono a:

• $\text{div}(\vec{\sigma}) \cdot \vec{\delta}$ ma se $\text{div} \vec{\sigma} + \vec{F} = 0$ allora $\text{div}(\vec{\sigma}) = -\vec{F}$

• raccolgo a due a due $\tau_{xy} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = \tau_{xy} \gamma_{xy}$ ovvero $\vec{\sigma}^T \vec{\epsilon}$

$$= \int_V -\vec{F} \cdot \vec{\delta} dV + \int_V \vec{\sigma}^T \vec{\epsilon} dV$$

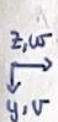
Esattamente il teorema.

Ho dimostrato la condizione necessaria per l'equilibrio, se dimostrassi quella sufficiente ridurrei il problema al PLV: $\int_V \vec{\sigma} \cdot \vec{\delta} = 0$

→ Dire che la TLV è condizione sufficiente di equilibrio, equivale ad avere un materiale rigido.

TLV PER SISTEMI DI TRAVI

Passando dal 3D al 2D, il sistema di equazioni prende il nome di equazioni di Muller-Breslau. (Assieme a linea elastica e Mohr e corollari) è un metodo di risoluzione per la determinazione delle componenti di spostamento e rotazione.



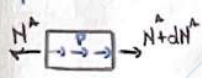
Pseudo in considerazione una trave appoggiata, soggetta a carichi distribuiti applicati uno per volta.

Per passare dal continuo ad un sistema di travi, considero i due sistemi:

A staticamente ammissibile \vec{F}, \vec{f} congruenti ai parametri di sollecitazione M, N, T

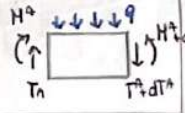
B cinematicamente ammissibile $\vec{\delta}$ congruente a deformazioni generalizzate Δ, θ, γ

• Equilibrio del sistema A: (due relazioni c'è tra carichi e parametri)



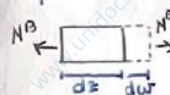
$$\frac{dN^A}{dz} = -q^A$$

il carico q^A lungo dz è equilibrato da sforzo normale



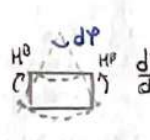
$$\frac{dT^A}{dz} = -q^A$$

• Equilibrio del sistema B:



$$dN^B = \epsilon_z dz$$

o.k. $\epsilon_z = \frac{N^B}{EA}$



$$\frac{dM^B}{dz} = \theta^B = \frac{M^B}{EI}$$

dalla linea elastica relazione costitutiva



$$\frac{dT^B}{dz} = \gamma^B = \alpha \frac{T^B}{GA}$$

legame costitutivo (dipende dal materiale)

Lavoro interno per carichi infinitesimi: $\delta Li = \int N^A (\frac{N^B}{EA} + \lambda^B) dz + M^A (\theta^B + \mu^B) dz + T^A (\gamma^B + \eta^B) dz$

In generale per le travi:

$$L_{int} = \int_0^L [N^A (\frac{N^B}{EA} + \lambda^B) + M^A (\frac{M^B}{EI} + \mu^B) + T^A (\frac{T^B}{GA} + \eta^B)] dz$$

$$L_{ext} = \sum F_i^A \eta_i^B + \int_0^L (p^A w^B + q^A v^B + m^A \varphi^B) dz + \sum R_j^A (\eta_j^B - \epsilon_j^B R_j^B)$$

trascurabili

Equazioni di Muller-Breslau:

$$\sum F^A \eta^B + \sum R^A (\eta^B - \epsilon^B R^B) = \sum \int_0^L [N^A (\frac{N^B}{EA} + \lambda^B) + M^A (\frac{M^B}{EI} + \mu^B)] dz$$

$$F^A \eta^B = \sum \int_0^L (N^A \frac{N^B}{EA} + M^A \frac{M^B}{EI}) dz$$

parametro reale sconosciuto

Azienda staticamente reale + cinematicamente

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESEMPI APPLICATIVI TLV

1

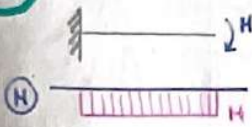
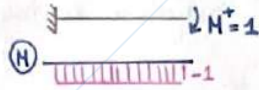


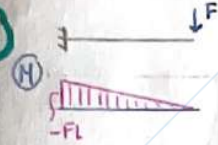
Diagramma di momento costante.

sistema fittizio → ipotizzo sia richiesta la rotazione all'estremità.



$$M^* \cdot \varphi = \int_{L_{ext}}^{L_{int}} M^*(z) \cdot \frac{M(z)}{EJ} dz = \int_{L_{ext}}^{L_{int}} (-1) \cdot (-H) dz = \frac{HL}{EJ}$$

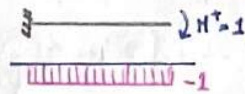
2



Sistema fittizio → richiesta rotazione all'estremità.

$$\begin{aligned} M(z) &= az + b & M(0) &= -FL = b \\ & & M(L) &= 0 = aL + b \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} aL - FL &= 0 \\ a &= F \end{aligned} \right\}$$

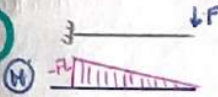
$$= Fz - FL$$



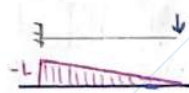
$$M^* \cdot \varphi = \int_0^L M^*(z) \cdot \frac{M(z)}{EJ} dz$$

$$\varphi = \int_0^L (-1) \left(\frac{Fz - FL}{EJ} \right) dz = \frac{1}{EJ} \left(-\frac{FL^2}{2} + FL^2 \right) = \frac{FL^2}{2EJ}$$

3



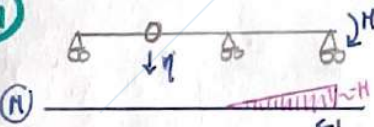
Sistema fittizio → voglio determinare la fleccia all'estremità.



$$F^* \cdot \eta = \int M^*(z) \frac{M(z)}{EJ} dz$$

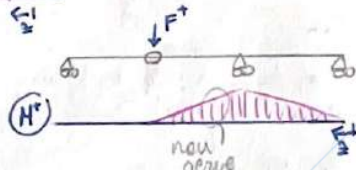
$$\eta = \frac{1}{EJ} \int_0^L (z-L) (Fz - FL) dz = \frac{1}{EJ} \int_0^L (Fz^2 - FLz - FLz + FL^2) dz = \frac{1}{EJ} \left(\frac{FL^3}{3} - FL^3 + FL^3 \right) = \frac{FL^3}{3EJ} \downarrow$$

4



Richiesta la componente di spostamento verticale. Ne ipotizzo il verso.

Sistema fittizio →



$$M(z) = \frac{H}{L} z - H$$

$$M^*(z) = -z$$

$$\eta = \frac{1}{EJ} \int_0^L (-z) \left(\frac{Hz}{L} - H \right) dz = \frac{1}{EJ} \left(\frac{H}{L} \cdot \frac{L^3}{3} + \frac{HL^2}{2} \right) = \frac{HL^2}{6EJ} \downarrow$$

è positiva dunque concorde col verso di F^*
 ↓
 abbassamento

TEOREMI ENERGETICI

Derivano dal TLV e ognuno dal precedente

? So prendere TLV e moltiplico per $\frac{1}{2}$, ottengo Clapeyron?
 → No ← Le ipotesi, i materiali sono diversi!

TEOREMA DI CLAPEYRON

- ipotesi:
- continuo vincolato e soggetto a \bar{f}, \bar{F}
 - materiale elastico, lineare, omogeneo, isotropo.
 - Soggetto a campo di deformazione e spostamento derivanti dalle forze esterne.

Differenze con il TLV:

- Definizione tipo di materiale
- sistema reale: spostamenti e deformazioni derivanti dalle forze applicate (sistemi cinematicamente e staticamente ammissibili correlati)
- Campo di forze applicato con processo quasi statico: valori finali delle forze raggiunti gradualmente.

Teorema:

Il lavoro di deformazione delle forze esterne agenti sul continuo è pari alla metà del lavoro che le stesse forze compirebbero se gli spostamenti fossero applicati con intensità finale.

$$\frac{1}{2} \int_V \bar{F}^T \bar{\eta} dV + \frac{1}{2} \int_S \bar{F}^T \bar{\eta} ds = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma}^T \bar{\epsilon} dV = \int_V w(\epsilon) dV$$

Lavoro di deformazione delle forze esterne Lavoro di deformazione

APPLICAZIONE



Determino Ψ_S derivante da Π :

$$L_{ext} = \frac{1}{2} H \Psi_S \quad L_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L H \frac{H}{ES} dz = \frac{1}{2ES} \cdot \frac{H^2}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{H^2 L}{6ES}$$

$$L_{ext} = L_{int} \rightarrow \Psi_S = \frac{HL}{3ES}$$

TEOREMA DI RECIPROCA DI BETTY

Valgono le ipotesi di Clapeyron. Applico al corpo un sistema di forze (1) e (2) in quattro fasi:

- Carico scarico, applico (1) quasi staticamente. Lavoro di deformazione:
 $L_{ext}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \bar{F}^{(1)T} \bar{\eta}^{(1)} dV + \frac{1}{2} \int_S \bar{F}^{(1)T} \bar{\eta}^{(1)} ds$
- Scarico il corpo e poi applico (2) quasi staticamente. Lavoro di deformazione:
 $L_{ext}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \bar{F}^{(2)T} \bar{\eta}^{(2)} dV + \frac{1}{2} \int_S \bar{F}^{(2)T} \bar{\eta}^{(2)} ds$
- Scarico il corpo e applico prima (1) e poi (2) quasi staticamente. Lavoro di deformazione:
 $L_{ext}^{(1)+(2)} = L_{ext}^{(1)} + L_{ext}^{(2)} + \underbrace{\int_V \bar{F}^{(1)T} \bar{\eta}^{(2)} dV + \int_S \bar{F}^{(1)T} \bar{\eta}^{(2)} ds}_{\text{Lavoro mutuo delle forze (1) sugli spostamenti (2) che conseguono dalle forze (2)}}$
- Scarico il corpo e applico prima (2) poi (1) quasi staticamente. Lavoro di deformazione:
 $L_{ext}^{(2)+(1)} = L_{ext}^{(2)} + L_{ext}^{(1)} + \int_V \bar{F}^{(2)T} \bar{\eta}^{(1)} dV + \int_S \bar{F}^{(2)T} \bar{\eta}^{(1)} ds$

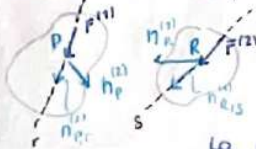
Teorema:

Il lavoro mutuo di un sistema di forze (1) applicato al corpo, per effetto degli spostamenti dovuti ad un altro sistema (2), è uguale al lavoro mutuo delle forze (2) sul corpo, per effetto degli spostamenti (1).

$$L^{(1)+(2)} = L^{(2)+(1)} \quad \text{reciprocità dei lavori di deformazione}$$

TEOREMA DI MAXWELL

Prese $F^{(2)} = F^{(1)} = 1$, l'uguaglianza tra lavori mutui diventa uguaglianza tra componenti di spostamento:



$$F^{(1)} \eta_{s,p}^{(2)} = F^{(2)} \eta_{r,e}^{(1)} \rightarrow \eta_{s,p}^{(2)} = \eta_{r,e}^{(1)}$$

teorema:

La componente di spostamento P del sistema (1), generata dall'applicazione del sistema (2), è uguale alla componente di spostamento di R del sistema (2) generata dall'applicazione del sistema (1).

TEOREMA DI CASTIGLIANO → è Maxwell con tutte le forze

Prese le ipotesi di Clapeyron, assoggetto il corpo a forze concentrate F_h (con $h=1, \dots, n$) da cui nascono spostamenti dei punti di applicazione delle forze η_h .

Lavoro di deformazione: $L = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n F_h \eta_h$

Essendo il problema lineare, le componenti di spostamento sono comb. lineari dei carichi applicati:

$$\eta_h = \alpha_{hk} F_k$$

coefficiente di influenza
definisce lo spostamento in direzione di F_h causato da F_k del punto di applicazione.

Lavori mutui:

$$\left. \begin{aligned} L_{hk} &= F_h \eta_k = \alpha_{hk} F_h F_k \\ L_{kh} &= F_k \eta_h = \alpha_{kh} F_k F_h \end{aligned} \right\} \alpha_{hk} = \alpha_{kh}$$

Lavoro di deformazione in forma quadratica dei carichi: $L = L(F) = \frac{1}{2} \sum \sum \alpha_{hk} F_h F_k$

teorema sugli spostamenti

In un corpo elastico, lineare, a vincoli fissi, soggetto a forze concentrate, la derivata del lavoro di deformazione $L(F)$ rispetto la generica forza F_i è uguale alle componenti di spostamento nel punto di applicazione in direzione della forza stessa.

$$\frac{\partial L(F)}{\partial F_h} = \sum \alpha_{hk} F_k = \eta_h$$

teorema sulle forze

Scrivo la forza come $F_h = \sum \beta_{hk} \eta_k$ con $\beta_{hk} = \beta_{kh}$

Il lavoro di deformazione in forma quadratica risulta: $L = L(\eta) = \frac{1}{2} \sum \sum \beta_{hk} \eta_h \eta_k$

Il teorema: $\frac{\partial L(\eta)}{\partial \eta_h} = \sum \beta_{hk} \eta_k = F_h$

TEOREMA DI MENABREA

Considero una struttura n volte iperstatica, soggetta ad un sistema di forze equilibrato.

Vincoli rigidi e distorsioni assenti.

Sopprimo i vincoli sovrabbondanti e aggiungo le reazioni incognite x_i che soddisfanno l'equilibrio.

Dato il lavoro di deformazione $L = L(F, X)$ associato a F ed X indipendenti tra loro:

teorema

Fra tutti i possibili insiemi di valori attribuibili alle incognite iperstatiche x_i , l'insieme reale che corrisponde al valor minimo assoluto del valore del lavoro di deformazione

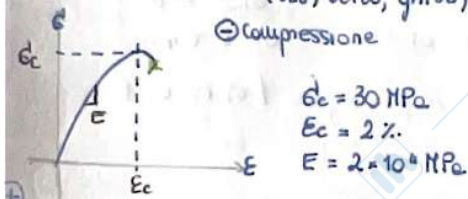
$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i} = 0$$

dato che lavoro di def. è forma quadratica non negativa,
le reazioni vincolari reali sono quelle che rendono il lavoro di def. minimo.

CRITERI DI RESISTENZA

I materiali reali non sono infinitamente elastici: la loro resistenza è legata alla capacità del materiale stesso di sopportare carichi fino a certo limite.

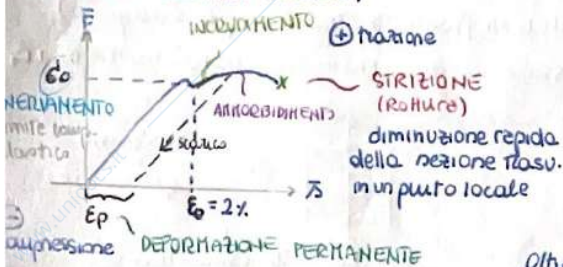
MATERIALI FRAGILI (CLS, vetro, ghisa)



Sul provino vengono condotte prove di carico monoassiali, la risposta deformativa è triassiale.

La rottura del materiale avviene a fine comportamento elastico, anche per deformazioni molto piccole.

MATERIALI DUTILI (acciaio)



La prima caratteristica del materiale è la simmetria: stesso comportamento a trazione e compressione.

Dopo le limite di resistenza elastica (INCRUDIMENTO), crescono le deformazioni fino a diventare molto grandi (2%) ed entro un campo plastico

Oltre le limite troviamo INCRUDIMENTO (carico e deformazioni aumentano) e AMMORBIDIMENTO (carico scende ma deformazioni aumentano). Non verrà considerato il campo plastico, ma solo quello elastico.

I materiali duttili sono più resistenti, ovvero maggior capacità di sviluppare deformazioni oltre al campo elastico, prima della rottura.

CRITERI

Le prove di laboratorio sono in regime monoassiale, mentre la progettazione è fatta in bi/tri assiale. Nascono i criteri di resistenza per correlare gli stati di progettazione con le prove di laboratorio.

Devo verificare che lo stato tensionale sia entro certi limiti $\sigma_c < \sigma < \sigma_t$.

I criteri definiscono la misura globale del livello di sollecitazione, ovvero la relazione cercata.

Prende il nome di GIP **grandezza indice del pericolo** (misura che assume ugual valore per stati di tensione che seppur diversi tra loro, sono ugualmente distanti dal limite elastico).

Ogni GIP identifica un criterio diverso, ovvero una diversa modalità di confrontare stati pluriassiali con prove monoassiali.

CRITERI PER MATERIALI FRAGILI

1. GALILEO - RANKINE - NAVIER

Assume come GIP le tensioni σ_{max} e σ_{min} definite nei punti critici in esame.

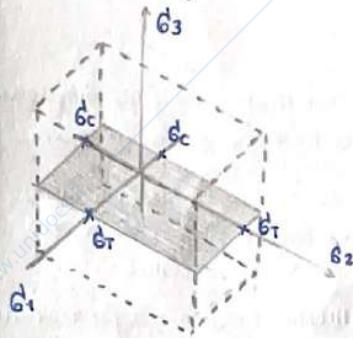
σ_{max} e σ_{min} risultano dai calcoli di progetto e vanno poi a confrontarle con le σ di trazione e compressione del laboratorio

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &\leq \sigma_t \\ \sigma_c &\leq \sigma_{min} \end{aligned}$$

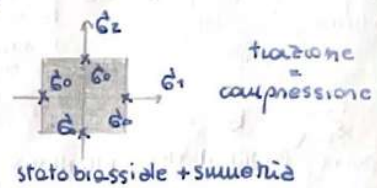
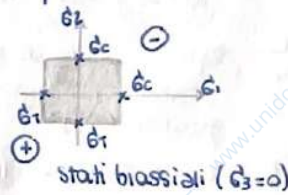
I valori di σ_{max} e σ_{min} si trovano all'interno delle tensioni principali $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

critero: $\sigma_c \leq \sigma_i \leq \sigma_t$ con $i=1,2,3$

tramite metodo grafico:



Nello spazio delle tensioni, il dominio è chiuso (deriva dalla natura dei materiali fragili \rightarrow oltre le esatte si rompono) sul piano risulta essere un quadrato con valori limite σ_c e σ_t



2. GRASHOUF - DE SAINT VENANT

Assume come GIP le deformazioni dirette ϵ_{max} e ϵ_{min} all'interno dell'intervallo (ϵ_c, ϵ_t)

critero: $\epsilon_c \leq \epsilon_i \leq \epsilon_t$ con $i=1,2,3$

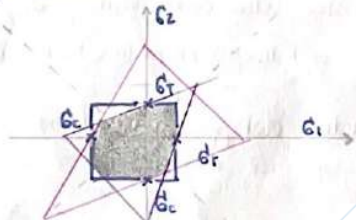
Essendo all'interno del campo elastico, uscirò tramite legge di Hooke:

$$\frac{\sigma_c}{E} \leq \frac{\sigma_i}{E} - \nu \frac{(\sigma_j + \sigma_k)}{E} \leq \frac{\sigma_t}{E} \Rightarrow \sigma_c \leq \sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k) \leq \sigma_t$$

Equazione di una retta, indipendente da E ma dipendente da ν .

Nel caso biassiale ($\sigma_3=0$) le equazioni si riducono e la forma grafica è una intersezione di triangoli isosceli.

$$\begin{cases} \sigma_c \leq \sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq \sigma_t \\ \sigma_c \leq \sigma_2 - \nu\sigma_1 \leq \sigma_t \\ \sigma_c \leq -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_t \end{cases}$$



Parto dal critero di Rankine - Navier \square e ne traccio le diagonali \rightarrow

Il primo triangolo passa per le σ_c , con vertice del lato sulla diagonale e sulle direzioni σ_1, σ_2 .

Analogamente il secondo con le σ_t

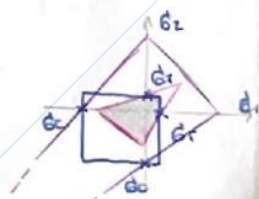
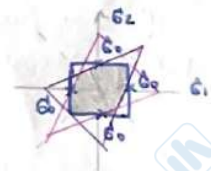
Il dominio è chiuso, generalmente un pentagono.

Per il caso simmetrico ($\sigma_t \equiv \sigma_c$) e $\nu=1/3$ il dominio risulta un esagono \rightarrow

\rightarrow Nel caso generale risulta più restrittivo Grashouf - De Saint Venant, mentre per quello simmetrico Galileo - Rankine - Navier.

Caso limite: $|\frac{\sigma_t}{\sigma_c}| \neq 1$

per valori molto diversi tra loro, i triangoli risultano uno interno all'altro: il valore massimo di compressione non è raggiungibile nemmeno in situazione mono assiale (impossibile nella realtà).



3. CRITERIO BELTRAMI

Assumo come GIP l'energia di deformazione $w = \frac{1}{2E} (I_1^{(d)^2} - 2(1-\nu)I_2^{(d)})$

Essendo forma quadratica, è insensibile alle variazioni di segno delle tensioni: il criterio può essere utilizzato solo per materiali simmetrici.

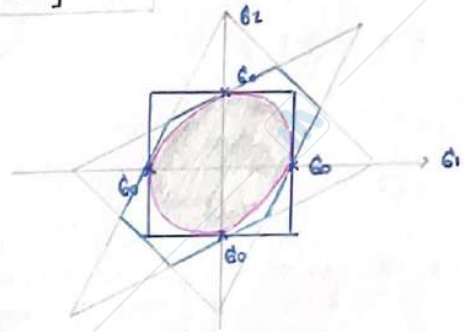
criterio: $w = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \leq w_0$ da laboratorio

Per il caso biassiale ($\sigma_3 = 0$): $\sigma_1 = \sigma_2$

$$\frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2) \leq \frac{\sigma_0^2}{2E}$$

sul piano delle tensioni risulta l'equazione di un'ellisse reale che passa per σ_0 e $-\sigma_0$.

- Rankine - Navier
- ◇ Tresca - De Saint Venant
- dominio ellissoidale



Nel caso simmetrico, il criterio di Beltrami è il più restrittivo.

CRITERI PER MATERIALI DUTILI

Devono rispettare caratteristiche di:

- Simmetria (la tensione non è più a rottura ma a snervamento)
- deformazioni permanenti hanno natura deviatorica e avvengono a volume costante (limiti invariati all'applicare uno stato di tensione idrostatico)

Le conseguenze si notano sui domini: solo tutti i domini aperti lungo una specifica direzione (asse idrostatico).

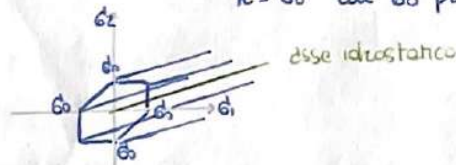
1. CRITERIO TRESCA-GUEST

Assumo come GIP la tensione tangenziale τ_{max} .

Grazie ai cerchi di Mohr: $2\tau_{max} = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$ è il massimo tra i raggi dei cerchi.

criterio: $-k \leq \sigma_i - \sigma_j \leq k$ con $k = 2\tau_0$ e τ_0 proveniente dal test di torsione pura.
 $k = \sigma_0$ con σ_0 proveniente dal test di trazione uniaxiale.

Il dominio è esagonale.



2. CRITERIO HUBER-HENKY-VON MISES

Prendo come GIP il secondo invariante del tensore deviatorico: $3J_2' = I_1^2 - 3I_2$

Sviluppando $3J_2' = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1 + 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$

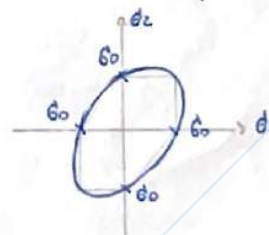
avendo $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2$ (e lo stesso per $(\sigma_1 - \sigma_3)^2$ e $(\sigma_2 - \sigma_3)^2$)

$$= \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2$$

criterio: $3J_2' \leq \sigma_0^2$

dalle prove a trazione (caso biassiale $\sigma_3 = 0$)

è l'equazione di un'ellisse arrotondata:



STABILITA' DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Fenomeno di instabilità dell'equilibrio che nasce anche se la sollecitazione agente si mantiene al di sotto del limite di resistenza. Il fenomeno si verifica per elementi snelli e compressi.

Nella realtà non avvengono più solo infinitesimi accorciamenti, ma si generano notevoli inflessioni date dal fatto che la struttura abbandona istantaneamente la configurazione di partenza e sbanda.

Lo sbandamento avviene dunque per $\delta \ll \delta_{ammessibile}$. Vado a calcolare il carico critico euleriano P che porta allo sbandamento.

→ Abbandono l'ipotesi di piccoli spostamenti ←

Il problema è divisibile in:

PROBLEMI EULERIANI

Esiste una configurazione basale (non necessariamente indeformata) ma linearmente legata al carico.

Al crescere del carico, con raggiungimento del carico critico euleriano, la configurazione basale di eq. stabile diventa di eq. indifferente e la struttura definisce un punto di biforcazione ovvero ha idealmente possibilità di scelta tra configurazioni diverse.

SISTEMI DISCRETI

Semplificazione della realtà: concentro in singoli punti tutte le caratteristiche di deformabilità.

- Instabilità di 1° specie prendo in considerazione un'asta vincolata alla base, caricata di punta.

Soluzione al 1° ordine



Vale ancora l'ipotesi di piccoli spostamenti: configurazione indeformata coincide con quella deformata (carico critico non definibile)

rotazione $\theta = 0$ soluzione basale

Soluzione esatta



Abbandono l'ipotesi di piccoli spostamenti: configurazione indeformata diversa dalla deformata.

Sull'elemento agisce la coppia $P\delta$ che lo fa ruotare di θ . La molla agisce con una forza equilibrante $K\theta$

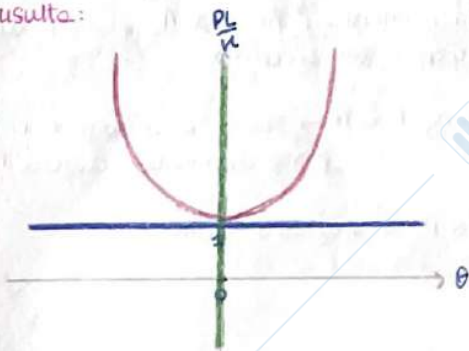
Equilibrio: $PL \sin \theta = K\theta$ — soluzioni — $\frac{\theta = 0}{\frac{PL}{K} = \frac{\theta}{\sin \theta}}$

Linearizzare \rightarrow Tommaso piccoli spostamenti dare $\sin \theta = \theta$

Soluzione al 2° ordine

Linearizzando la soluzione esatta trovo: $PL\theta = K\theta$ — soluzioni — $\frac{\theta = 0}{\frac{PL}{K} = 1}$

Ne risulta:



Per sistemi perfetti si delinea un punto di biforcazione rispetto al quale la struttura "sceglie" tra diverse configurazioni equilibrate.

$P < P_{cr}$ $\theta = 0$ soluzione stabile

$P > P_{cr}$ configurazione indeformata diventa di equilibrio stabile

$P = P_{cr}$ si genera la biforcazione con perdita totale di rigidità

• Instabilità di II° specie

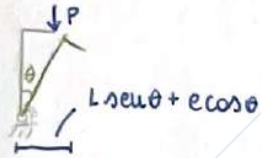
Nella realtà il carico P non è mai perfettamente centrato, ma presenta eccentricità $e = \eta l$

Soluzione al 1° ordine



Intuitivamente l'equazione $P \cdot e = k\theta$ ha come soluzione $\frac{PL}{k} = \frac{\theta}{\eta}$

Soluzione esatta



Equilibrio ha deformata e indeformata: $PL(\sin\theta + \eta \cos\theta) = k\theta$

ha come soluzione $\frac{PL}{k} = \frac{\theta}{\sin\theta + \eta \cos\theta}$

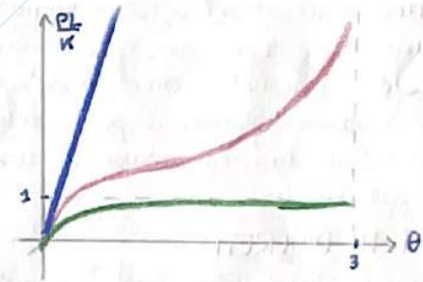
Soluzione al 2° ordine

Linearizzo la soluzione esatta ($\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$) e trovo: $\frac{PL}{k} = \frac{\theta}{\theta + \eta}$ con asintoto $\frac{PL}{k} = 1$

Ne risulta:

Le deformate si manifestano progressivamente all'aumentare del carico, linearizzando torno a ∞ con $P \rightarrow P_{cr}$.

È un paradosso: si verifica per strutture duttili (che "avisano" della rottura) ma qui siamo lontani dalla rottura.



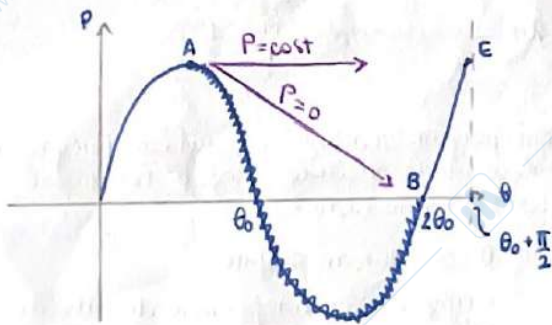
• Instabilità di III° specie

Si verifica per sistemi non euleriani, oppure per euleriani in cui si presenta un punto di biforcazione o passaggio per equilibrio indifferente.



È l'instabilità caratteristica degli archi fortemente ribassati. Definita **instabilità per scatto / SNAP TROUGH BUCKLING** nella quale scesura precritica e postcritica sono separate da una serie di configurazioni non percorribili.

Nel grafico della rotazione, man mano che il carico cresce, l'unica possibilità reale è che la configurazione "scatti" a quella simmetricamente opposta in quanto l'altra alternativa sarebbe che le aste si accorciassero.



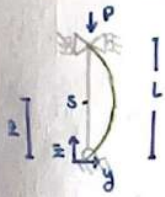
Nella realtà, il tratto mn è di equilibrio instabile. Quando aumento P fino ad A , si verificano le soluzioni alternative:

- mantengo $P = cost \rightarrow$ struttura scatta in E e posso aumentare ancora P .
- azzero $P \rightarrow$ struttura scatta in B .

SISTEMI CONTINUI - Trave di Eulero

Studio di sistema continuo, con rigidità distribuita, avere una trave che la deformabilità è distribuita lungo l'asse geometrico.

Considero la trave di Eulero (= incernata al nudo più doppio appoggio) soggetta a carico centrato rispetto l'asse della trave, in grado di attivare deformazioni flessionali.



Equilibrio della configurazione deformata:

$M_{instab.} = M_{stab.}$ La trave si oppone grazie alle sue caratteristiche formali.

$EJ \cdot \theta = P \cdot y$

Utilizzo Bernoulli
curvatura della linea elastica: $\theta = -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

$-EJ \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} =$
 $-EJ y'' =$

equazione differenziale omogenea del 2° ordine

$$P y = -EJ y''$$

$$y'' + \left(\frac{P}{EJ}\right) y = 0$$

$$\alpha^2 y = 0$$

La funzione che risolve l'equazione è di tipo sinusoidale:

$y(z) = A \sin(\alpha z)$
ampiezza

Sfrutto le condizioni al contorno per trovare un legame con il carico

$\begin{cases} z=0 \\ y''=0 \end{cases}$ A indeterminata con spostamento nullo

$\begin{cases} z=L \\ y=0 \end{cases}$ $y(z=L) = A \sin(\alpha L) = 0$ equazione nulla per $\sin(\alpha L) = 0$ verificata per ogni αL multiplo di π :

A non interessa solo $n=1$, ovvero deformata con solo 1 pancia

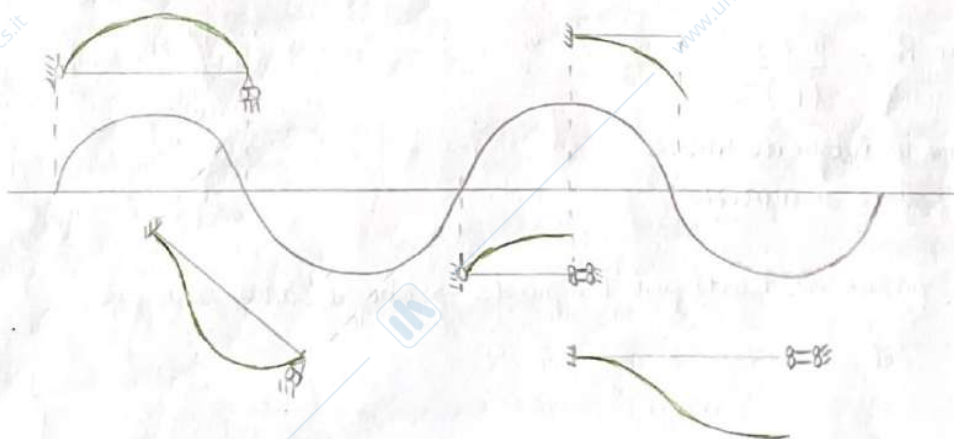
$\alpha L = n\pi$
 $\sqrt{\frac{P}{EJ}} L = n\pi$ elevo al quadrato e riscrivo:

carico critico euleriano $P_E = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$

→ carico per il quale si innesca la deformata.

Grazie ad Eulero, per condizioni di vincolo diverse, la forma delle soluzioni rimane la stessa in quanto l'equazione differenziale rimane la stessa.

Vado a sostituire L con L_0 lunghezza libera d'inflessione corrispondente alla distanza tra due punti di flesso successivi. (detta anche lunghezza della semionda d'inflessione).



IL PROBLEMA DI DE SAINT VENANT

Determino la soluzione del problema dell'equilibrio elastico, in termini di tensioni, di un cilindro retto, ovvero il caso in cui la trave non coincide più solo con le sue asse geometriche.

Ipotesi del problema:

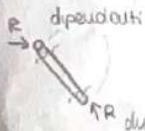
- | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>geometriche</p> <ul style="list-style-type: none"> • corpo continuo in 3D • asse rettilineo • corpo libero da vincoli esterni • sezione trasversale compatta • sistema d'assi principale d'inerzia e baricentrico. | <p>reologiche</p> <ul style="list-style-type: none"> • corpo omogeneo • materiale isotropo • comp. elastico-lineare | <p>azioni esterne</p> <ul style="list-style-type: none"> • superficie laterale scarica $f_x = f_y = f_z = 0$ • forze di volume nulle $x = y = z = 0$
 $\rightarrow \text{div } \vec{\sigma} = 0$ • forze di superficie di base tali da lasciare il corpo in equilibrio
 $\begin{cases} \sum R = 0 \\ \sum H = 0 \end{cases}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

data una sezione trasversale, prima. Dato il baricentro, tra gli infiniti assi baricentrici, prendo i principali d'inerzia.

DSV parla di sistemi **meccanicamente equivalenti**, ovvero con carichi che possono essere distribuiti diversamente sulle basi, ma con risultanti uguali.

Principio di Bousinesque: disponendomi ad una certa distanza detta distanza di estinzione, la diversa distribuzione di carico non ha più alcun effetto sullo stato di deformazione del continuo.

Qual'è l'influenza della distr. di carichi alla base della trave di DSV?
 Nessuna, purché mi disponga ad una certa distanza e dalle tensioni, detta distanza di estinzione.

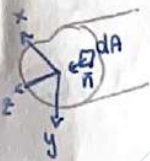


diunque a parte che per una porzione attorno alle teste, la soluzione di DSV è indipendente dalle distribuzioni di carico.

Equazioni del problema:

$\text{div } \vec{\sigma} = 0$ equazioni indefinite di equilibrio
 $\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{f}_n$ condizioni ai limiti (Cauchy), con $\vec{f}_n = 0$ sulle laterali
 $\vec{\epsilon} = \vec{D}^{-1} \vec{\sigma}$ legame elastico, con $\vec{\epsilon} = \vec{T}^T \vec{s}$ e \vec{T} operatore $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$

Superficie di base



Prendo una superficieesima dA con normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ diretta come \vec{z} , le equazioni ai limiti:

$$\vec{\sigma} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = f_{nx} \\ \tau_{zy} = f_{ny} \\ \sigma_{zz} = f_{nz} \end{cases}$$

Le forze di superficie dunque sono equilibrate da $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}$

Superficie laterale

Prendo l'elemento infinitesimo dA e la normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix}$ con n_x, n_y variabili rispetto la posizione della superficie. Le equazioni ai limiti:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y = 0 \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \end{cases}$$

corrisponde a $\vec{0} \cdot \vec{n} = 0$
 prodotto scalare tra i vettori $\vec{z} = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$ e $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$ nullo!

conseguente:

L'eventuale vettore tensione tangenziale totale è SEMPRE tangente al bordo della sezione con $\vec{z} \perp \vec{n}$.

Riservo l'equilibrio globale esprimendolo risultante e momento risultante:

$$R_x = \int_{S_0} f_{nx} dS = T_x \text{ taglio}$$

$$M_x = \int_{S_0} f_{nz} \cdot y dS = M_x \text{ momento flettente}$$

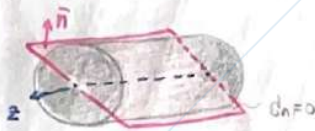
$$R_y = \int_{S_0} f_{ny} dS = T_y \text{ taglio}$$

$$M_y = - \int_{S_0} f_{nz} \cdot x dS = M_y \text{ momento flettente}$$

$$R_z = \int_{S_0} f_{nz} dS = N_z \text{ sforzo normale}$$

$$M_z = \int_{S_0} (z_{zy} \cdot x - z_{zx} \cdot y) dS = M_T \text{ momento torcente}$$

Interno del solido



Metodo seminverso (Kirchhoff): se determino una soluzione semplificata del problema, allora questa è unica.

DSV dunque applica una restrizione al problema.

ipotesi di DSV del metodo seminverso: prendo le continue trave, ipotizzo che su tutti gli elementi con giacitura // z (ovvero $\vec{n} \perp \vec{z}$) la tensione sia nulla $\sigma_n = 0$.

Dunque:

$$\begin{cases} \sigma_n = 0 \\ \vec{\sigma}_n = \vec{t}_n \cdot \vec{n} = \vec{n}^T \cdot \vec{\sigma} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n}^T \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$$

In forma estesa:

$$(n_x \ n_y \ 0) \begin{cases} \sigma_x n_x + z_{yx} n_y \\ z_{xy} n_x + \sigma_y n_y \\ z_{xz} n_x + z_{yz} n_y \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \sigma_x n_x^2 + 2 z_{yx} n_x n_y + \sigma_y n_y^2 = 0$$

Espressione quadratica: n_x e n_y non possono essere nulle contemporaneamente.

Conseguenze dell'ipotesi semplificativa:

L'uguaglianza a zero dell'ipotesi è garantita se e solo se $\sigma_x = \sigma_y = z_{yx} = 0$

Il tensore alla DSV: $\vec{\sigma}_{DSV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_{zx} \\ 0 & 0 & z_{zy} \\ z_{xz} & z_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ con $\det \vec{\sigma}_{DSV} = 0$ dunque lo stato di

tensione è al più biassiale, ma mai triassiale.

ma dato σ è nulla, deformazione invece triassiale

Riservo l'equilibrio globale all'interno del solido (Cauchy):

$$\vec{t}_n = \vec{\sigma}_{DSV} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z_{zx} \\ 0 & 0 & z_{zy} \\ z_{xz} & z_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{nx} = z_{zx} n_z \\ t_{ny} = z_{zy} n_z \\ t_{nz} = z_{xz} n_x + z_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases}$$

ma posizionandomi sulla superficie $\perp z$ risulta:

(conseguenza del tensore alla DSV)

$$n_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_{nx} = 0 \\ t_{ny} = 0 \\ t_{nz} = z_{zx} n_x + z_{zy} n_y \end{cases}$$

il vettore tensione ha solo componente lungo z con significato di tensione tangenziale

→ Idealmente assimilo la trave di DSV come costituita da un insieme di fili // z, tali per cui essi si scambiano sole tensioni tangenziali.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DSV

Riprendo la trattazione alle tensioni del problema elastico (Mitchell-Beltrami) e ne ricordo le proprietà:

1. tensione // z è solo tangenziale
2. le componenti tangenziali sono indipendenti da z
3. lo stato di tensione è al più biassiale (tensore di tensione mai pieno)
4. vettore tensione tangenziale totale $\vec{\tau}$ è punto per punto tangente al contorno.

Aggiungo le ipotesi del metodo seminverso alle equazioni indefinite di equilibrio e alle Mitchell-Beltrami

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} I_1(\sigma) \rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} I_1(\sigma) \rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} I_1(\sigma) \rightarrow (1+\nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_z \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sigma_z = 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} I_1(\sigma) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sigma_z = 0 \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} I_1(\sigma) \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} I_1(\sigma) \end{cases}$$

Si ottiene che per la funzione σ_z ne soddisfa $\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} = 0$ allora è funzione bilineare: una soluzione armonica.

Crea una forma bilineare per σ_z soluzione: $\sigma_z = a + bx + cy - z(a_1 + b_1x + c_1y)$

Ne determino le costanti:

- prendo in considerazione il teorema della divergenza e per funzione \vec{g} il vettore $\vec{z} = (\tau_{zx}, \tau_{zy})$. Applico l'integrale alla superficie per porre al bordo:

$$\int_{\text{sup}} \text{div}(\vec{z}) dS = \int_{\text{bordo}} \vec{z} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \text{ per DSV perché } \vec{z} \perp \text{bordo}$$

$$\int_{\text{sup}} \left(\frac{\tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\tau_{zy}}{\partial x} \right) dS = 0 \text{ per le eq. indefinite}$$

$$\int_{\text{sup}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dS = 0 \text{ momento statico rispetto } x$$

$$\int_{\text{sup}} (a_1 + b_1x + c_1y) dS = 0 \text{ momento statico rispetto } y \text{ nulli perché riferiti ad assi baricentrici}$$

$$\text{ma se } A \text{ è l'area della sezione trasversale, non sarà mai nulla} \\ \text{duque } \underline{a_1 = 0}$$

data una funzione \vec{g} :
 $\int_{\text{volume}} \text{div} \vec{g} dV = \int_{\text{superficie}} \vec{g} \cdot \vec{n} dS$
 alza di grado l'argomento e abbassa quello dell'integrale

Ora prendo in considerazione le espressioni di sforzo normale e momento:

- Aggiungo l'espressione di σ_z a $N = \int_S \sigma_z dS$

$$N = \int_S (a + b_1x + c_1y - z(a_1 + b_1x + c_1y)) dS = aA \rightarrow \underline{a = \frac{N}{A}}$$

Se conosco N , il valore di σ_z è dato da questa espressione qui

- Aggiungo l'espressione di σ_z a $M_x = \int_S \sigma_z \cdot y dS = M_{x0} + T_y \cdot z$

$$M_{x0} + T_y \cdot z = \int_S (a_1y + b_1xy + c_1y^2 - z(a_1y + b_1xy + c_1y^2)) dS = c I_x - z c I_x \rightarrow \underline{c = \frac{M_{x0}}{I_x}} \quad \underline{c_1 = -\frac{T_y}{I_x}}$$

- Aggiungo l'espressione di σ_z a $M_y = \int_S \sigma_z \cdot x dS = M_{y0} - T_x \cdot z$

$$M_{y0} - T_x \cdot z = \int_S (-a_1x - b_1x^2 - c_1xy + z(b_1x^2 + c_1xy)) dS = -b I_y + z b I_y \rightarrow \underline{b = -\frac{M_{y0}}{I_y}} \quad \underline{b_1 = \frac{T_x}{I_y}}$$

Dunque in generale per l'espressione di σ_z :

$$\rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{z0}}{I_x} y + z y \frac{I_y}{I_x} - \frac{M_{y0}}{I_y} x + z x \frac{I_x}{I_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad \text{formula di Navier}$$

Per l'espressione delle τ_{zy} e τ_{zx} derivano sempre dalle Mitchell-Beltrami (cangueuze in termini di tensioni):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = -\bar{\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = \bar{\nu} a$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = \bar{\nu} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = -\bar{\nu} b_1$$

con $\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$

derivando due volte l'espressione di σ_z trovo: $a = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z}$, $-b_1 = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}$

Dunque in generale l'espressione per ϵ_z sarà:

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \bar{\nu} a + \bar{\nu} b_1 y + d \quad \text{costante d'integrazione}$$

ma risulta difficile trovarne la soluzione.

La **soluzione** in termini di z si riduce alla determinazione delle tre funzioni $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ che prendono il nome di **funzione ingobbamento**.

funzione che dipende solamente dalla sezione trasversale.

Proprietà:

PROBLEMA DI NEUMANN-DINI $\begin{cases} \nabla^2 \theta_i = 0 & \text{(sono funzioni armoniche)} \\ \oint \frac{\partial \theta}{\partial n} ds = 0 & \text{(circolazione)} \end{cases}$

la funzione risulta antisimmetrica sul piano della sezione trasversale.

L'ingobbamento è un moto rigido, ovvero lo spostamento di punti fuori dal piano della sezione trasversale.

ogni volta che ho delle z , (da taglio o torsione), esse producono ingobbamento (che verrà torsionato).

Trovare la soluzione di DSV in termini di tensione tangenziale significa risolvere il problema di Neumann-Dini.

La forma delle z diventa:

$$\tau_{zx} = \beta G \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial x} - y \right) - \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\frac{I_x}{I_y} \left(x^2 - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) + \frac{I_y}{I_x} \left(2\nu xy - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) \right]$$

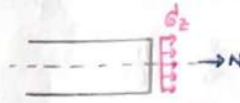
$$\tau_{zy} = \beta G \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} + x \right) - \frac{1}{2(1+\nu)} \left[\frac{I_x}{I_y} \left(2\nu xy - \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) + \frac{I_y}{I_x} \left(y^2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \right]$$

CASI DELLA SOLLECITAZIONE

Procedimento: Parto dalla soluzione generale, particolare con la costante $\neq 0$.
 Trovo ϵ tramite d, z con ϵ legame elastico.
 Per integrazione trovo le componenti di spostamento u, v, w .

SFORZO NORMALE $a \neq 0$

Anullo le costanti:
$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \frac{N}{A} \end{cases}$$

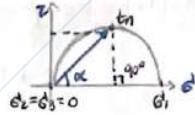


Lo stato di tensione corrispondente alla sollecitazione N è una distribuzione costante sulla sezione trasversale.

Stato di sollecitazione: sforzo normale centrato.

Stato di tensione: monoassiale, con tensione di tensione $\sigma_{bsv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$ il piano (xy) ha qualunque direzione principale

Cerchi di Mohr:



sulla trave c'è tensione a 45° se tagliassi una porzione avrèi



Asse neutro: (= luogo dei punti con $\sigma_z = 0$) all' ∞ , grazie alla distribuzione costante non nulla.

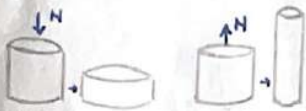
Deformazioni:
$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} = -\frac{\nu N}{EA} \\ \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \end{cases} \xrightarrow{\text{leggi di Hook}} \begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu N}{EA} \\ \epsilon_z = \frac{N}{EA} \end{cases}$$
 (la seconda è la dilatazione assiale)

Componenti di spostamento:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu N}{EA}$$

$$\partial u = -\frac{\nu N}{EA} \partial x$$

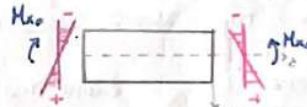
$$\xrightarrow{\text{integro}} \begin{cases} u = -\frac{\nu N}{EA} x + c \\ v = -\frac{\nu N}{EA} y + d \\ w = \frac{N}{EA} z + e \end{cases}$$
 le costanti hanno significato di moto arbitrario rigido



Il processo è una variazione di forma ma non di volume. ($\nu = 0$ perchè $\epsilon = 0$).

FLESSIONE RETTA $b \neq 0$

Anullo le costanti:
$$\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \frac{M_{x0}}{I_x} y \text{ oppure } -\frac{M_{y0}}{I_y} x \end{cases}$$



Momento flettente costante, σ_z varia con y , ha andamento a farfalla.

Stato di tensione: monoassiale, con tensione delle tensioni $\sigma_{bsv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$

Cerchi di Mohr: come sforzo normale

Asse neutro: coincide con il baricentro.

Deformazioni: (twassiali)
$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \frac{M_{x0}}{I_x} y \\ \epsilon_z = \frac{M_{x0}}{EI_x} y \end{cases}$$
 variano linearmente con y (deformazione aumenta quanto più mi allontano da y)

Componenti di spostamento:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\nu M_{x0}}{EI_x} y \rightarrow \partial u = -\frac{\nu M_{x0}}{EI_x} y \partial x \xrightarrow{\text{integro}} u = -\frac{\nu M_{x0}}{EI_x} y x + c$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_{x0}}{EI_x} y \xrightarrow{\text{integro}} w = \frac{M_{x0}}{EI_x} y z + c$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu M_{x0}}{EI_x} y \xrightarrow{\text{integro}} v = -\frac{\nu M_{x0}}{EI_x} \frac{y^2}{2} + c$$

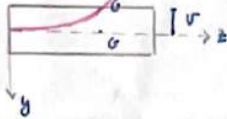
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \xrightarrow{\text{integro}} v = \frac{\nu M_{x0}}{EI_x} \frac{x^2}{2} + c$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \xrightarrow{\text{integro}} v = -\frac{M_{x0}}{EI_x} \frac{z^2}{2} + c$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$
 non interessa, cerco correlazione tra v e x .

la trave inflessa vede tre contributi * e si comporta come una curva di 2° grado.

Pseudo infatti la deformazione associata al baricentro: per l'equazione della linea elastica:



$$v = -\frac{M_{kz}}{2EI_x} z^2 \quad (\text{deformata parabolica})$$

Nota v , derivo e trovo l'espressione di φ , derivo e trovo θ :

$$\varphi = -\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{M_{kz}}{EI_x} z$$

$$\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{M_x}{EI_x}$$

curvatura **Legge di Bernoulli-Navier**

è una legge costitutiva perché determina modulo elastico e lega parametri statici a cinematici

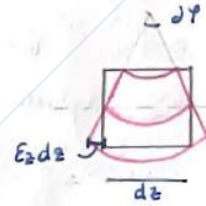
Legando i tre contributi *:

$$v = -\frac{\varphi M_x}{EI_x} \left[\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right]$$

Un altro modo per arrivare alla deformata è geometrico:

individuata la deformata, le due facce rimangono piane e ortogonali all'asse geometrico.

Il bordo inferiore e superiore della sezione seguono la deformata.

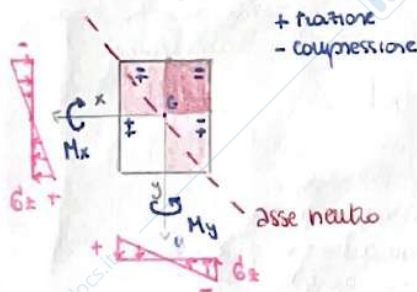


FLESSIONE DEVIATA $b \neq 0, c \neq 0$ due contributi

Annulando le costanti:
$$\begin{cases} z_{xz} = z_{yz} = 0 \\ G_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \end{cases}$$

Stato di tensione: monoassiale.

Asse neutro: non coincide più con uno dei piani principali: se la sezione è simmetrica e agiscono M_x e M_y , allora sarà metà tesa e metà compressa.



l'asse neutro è orientato a seconda delle azioni in gioco.

→ la sezione sarà sempre un po' tesa e un po' compressa.

Equazione dell'asse neutro

$$(G_z =) \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

$$y = \frac{M_y}{I_y} x \frac{I_x}{M_x}$$

PRESSO (-TENSO) FLESSIONE DEVIATA $a \neq 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$

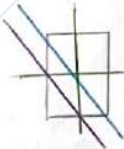
Annulla le costanti:
$$\begin{cases} I_{xz} = I_{yz} = 0 \\ G_z = \frac{N}{A} + \frac{H_{x0}}{I_x} y - \frac{H_{y0}}{I_y} x \end{cases}$$

Stato di tensione: monoassiale

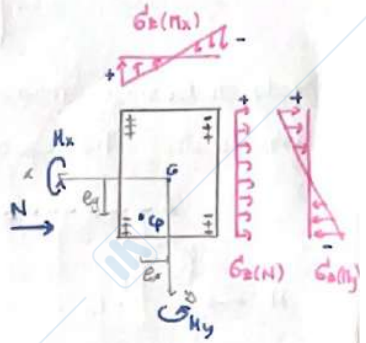
Asse neutro: definito da una retta che NON passa più per il baricentro, ma attraverso un altro punto.

Lo sforzo normale è applicato in q detto **centro di pressione**.

Nel caso di sollecitazione \lll , l'asse neutro si trova:



- flessione retta
- flessione deviata
- presso (-tenso) flessione deviata



Per trovare l'equazione dell'asse neutro, so che N è eccentrico e applicato in q .

Nasce dunque:

$$G_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_x} y + \frac{N e_x}{I_y} x$$

dati $H_x = N e_y$
 $H_y = -N e_x$

ponendo: $p_x^2 = \frac{I_x}{A}$ raggi d'inerzia dell'ellisse centrale
 $p_y^2 = \frac{I_y}{A}$ raggi d'inerzia dell'ellisse centrale

$e_x = \frac{H_x}{N}$ eccentricità
 $e_y = \frac{H_y}{N}$ eccentricità

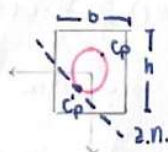
$$= \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{A p_x^2} y + \frac{N e_x}{A p_y^2} x$$

Raccordo $\frac{N}{A}$ e trovo equazione di un'ellisse: $1 + \frac{e_y}{p_x^2} y + \frac{e_x}{p_y^2} x = 0$

Proprietà asse neutro e centro di pressione:

- $q \notin$ asse neutro **CONDIZIONE DI POLARITÀ**:
se per assurdo imponessi il contrario, l'equazione sarebbe quella di un'ellisse immaginaria (la soluzione solo nel campo dei complessi).
- C_p può \in asse neutro **CONDIZIONE DI ANTIPOLARITÀ**:
è simmetrico del centro di pressione è dato da $(-e_x, -e_y)$, se ne impongo il passaggio per l'asse neutro trovo l'equazione $\frac{e_y^2}{p_x^2} + \frac{e_x^2}{p_y^2} = 1$ **ellisse di Lullmann** (o principale d'inerzia).

ESEMPIO



$A = bh$

$I_x = \frac{bh^3}{12} \rightarrow p_x^2 = \frac{h^2}{12}$

$I_y = \frac{hb^3}{12} \rightarrow p_y^2 = \frac{b^2}{12}$

preso q e il suo simmetrico, l'asse neutro passa per q ed è tangente all'ellisse centrale d'inerzia per antipolarità!

- $q \notin$ asse neutro **CASO DELLA PRESSO/TENSO FLESSIONE RETTA**

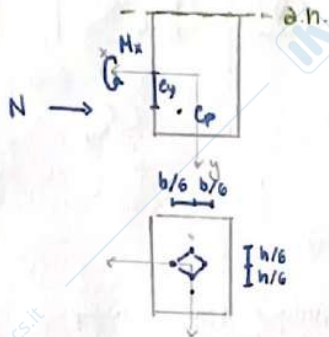
PRESSO (TENSO) FLESSIONE RETTA $a \neq 0, b \neq 0$

Annullo le costanti:
$$\begin{cases} T_{zx} = T_{zy} = 0 \\ \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y \quad M_x = N e_y \end{cases}$$

Stato di tensione: monoassiale

Asse neutro: ha equazione $1 + \frac{e_y}{\rho_z} y = 0$ avendo applicati N eccentrico e M_x .

Devo trovare e_y tale per cui l'asse neutro è tangente alla sezione:

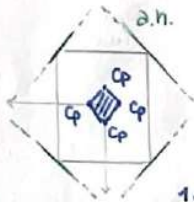


$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_x} y = 0 \rightarrow \frac{1}{bh} + \frac{e_y}{\frac{1}{2} b h^3} \left(-\frac{h}{2}\right) = 0 \rightarrow 1 + \frac{6 e_y}{h} = 0$$

$$e_y = \frac{h}{6}$$

Vale lo stesso ragionamento se prendessi c_p dall'altro lato o ne considerassi i semiasse opposti: trapezi degli altri punti di asse $b/6$.

→ I centri di pressione tali per cui gli assi neutri siano disposti ai vertici della sezione, si trovano anch'essi ai vertici di un rombo.



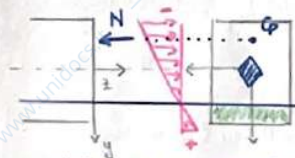
NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA

Luogo dei punti che contiene tutti i c_p per i quali lo stato di tensione risulta omogeneo (fibre tutte tese/compresse) e gli assi neutri tangenti al bordo o passanti per gli spigoli.

Proprietà:

1. Num. di lati della sezione PARI → sarà pari anche il num. dei lati del nocciolo, ma con i vertici al lato opposto dei lati della sezione (simmetricamente invertito).
2. Num. lati della sezione DISPARI → la figura della sezione è omotetica senza ruotare.
3. Se c_p è ellisse di Cullmann → l'asse neutro sarà tangente e opposto.
4. Se c_p interno al nocciolo → la sezione sarà tutta tesa o tutta compressa.

FENOMENO DELLA PARZIALE TENSIONE



Rimuovendo l'ipotesi di materiale resistente a trazione, il comportamento non è più simmetrico.

Applicato N eccentrico (presso flessione retta) fuori dal nocciolo, è l'asse neutro taglia la sezione.

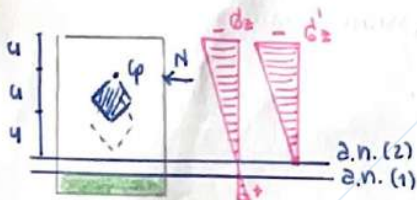
Nella zona \blacksquare il materiale NON risponde allo sforzo di N a causa della parziale trazione, ovvero il materiale è un po' teso e un po' compresso e si fessura.

Devo ricalcolare la sezione togliendo \blacksquare e riposizionando l'asse neutro per una certa G'_z più grande della precedente.

La nuova sezione è omogeneamente compressa, con un nuovo nocciolo e asse neutro al bordo.

Nocciolo nuova sezione: $u = \frac{h}{2} - e_y$

Trovo G'_z : $N = G'_z \cdot 3u \frac{b}{2} \rightarrow G'_z = \frac{2N}{3ub}$



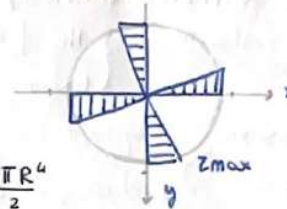
Indipendentemente dallo sforzo normale, sono costanti le dimensioni della sez. reagente.

SEZIONE CIRCOLARE

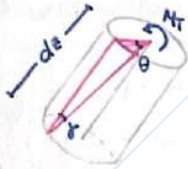
Caso particolare della sezione ellittica con $a=b$, ma ricavabile anche tramite la trattazione della trave di Coulomb.

Caso di simmetria polare con $\theta_0 = 0$, in particolare $J = I_G = \frac{\pi R^4}{2}$

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \frac{2 M_T}{\pi R^3}$$



La soluzione tramite trave di Coulomb è ricavata partendo da una trave allungata di simmetria radiale (e ingobbamento sempre nullo $\theta_0 = 0$), soggetta a torsione.



Considero una fibra longitudinale soggetta a scorzimento ed equaglio, determinando la stessa soluzione.

$$\gamma dz = R \theta_0$$

SEZIONI NON SIMMETRICHE

Osservazione:

È possibile arrivare ad una soluzione anche con un centro di rotazione diverso dal baricentro, detto **centro di torsione** G_T . Ciò avviene perché la soluzione di Kirchhoff agli spostamenti è data a meno di un moto rigido!

centro di torsione → punto attorno al quale si riducono le rotazioni medie della sezione trasversale.

Per trovarne la posizione:

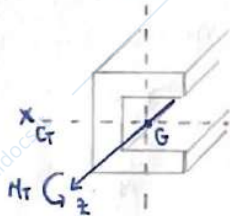
coordinate:

$$x_{G_T} = -\frac{1}{I_x} \int_S \theta_0 y \, dS$$

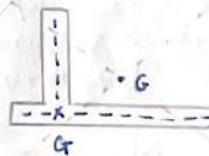
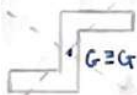
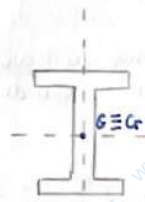
$$y_{G_T} = \frac{1}{I_y} \int_S \theta_0 x \, dS$$

- $G_T \equiv G$ se $\theta_0 = 0$ ovvero in sezioni a simmetria polare o in sezioni doppie simmetriche.
- G_T è asse di simmetria se la sezione è a simmetria semplice

ESEMPLI



G_T sta su un'asse principale d'inertia che diventa di simmetria



se la sezione è costituita da più rettangoli, G_T sta all'intersezione tra le linee medie

TORSIONE SEMPLICE (PURA)

Annullo le costanti:
$$\begin{cases} M_T = \int_S (\tau_{zx} x - \tau_{zy} y) ds \\ G \theta_z = 0 \end{cases}$$

Stato di tensione: biassiale, con tensore delle tensioni
$$G_{DSV} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

Cerchi di Mohr: simmetrici, con $G_1 = -G_2$

Equazioni del problema: $\text{div } \vec{\tau} = 0 \iff \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$ equilibrio

$\text{rot } \vec{\tau} = \text{cost} \iff \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \text{cost}$ congruenza

$\vec{\tau} \cdot \vec{n} = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ tangente al bordo.

deriva dalle Mitchell-B. sviluppando le derivate seconde della 3^a eq. e inserendo in $\nabla^2(\tau_{zx} + \tau_{zy}) = 0$

Il problema è definibile solo per sezioni piane, partendo dalla formulazione agli

Spostamenti:

$$\begin{cases} u = \beta z y \\ v = -\beta z x \\ w = \beta \theta_0(x, y) \end{cases}$$

Ipotesi un campo che si può differenziare da un altro di un certo moto rigido.

- β angolo unitario di torsione tra due sezioni

- $\theta_0(x, y)$ funzione ingobbamento che risolve il problema di Neuman-Dini

Trovo le deformazioni derivando gli spostamenti:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x & \gamma_{xy} &= 0 \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y & \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ \epsilon_z &= \partial w / \partial z & \gamma_{zx} &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \end{aligned}$$

confronto con la funzione ingobbamento

$$\begin{cases} \epsilon_x = 0 \\ \epsilon_y = 0 \\ \epsilon_z = 0 \end{cases}$$

DSV
$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= \beta \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial x} + y \right) = \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \beta \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} - x \right) = \frac{\tau_{zy}}{G} \end{aligned}$$

sezioni trasversale non si deforma lungo z

momenti inerzia polare

In termini di τ , il problema:

$$\begin{cases} G \theta_z = 0 \\ \tau_{zx} = G \beta \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial x} + y \right) \\ \tau_{zy} = G \beta \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} - x \right) \end{cases}$$

sostituisco all' espressione di M_T

$$\begin{aligned} M_T &= G \beta \int_S \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} x - x^2 - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} y - y^2 \right) ds \\ &= G \beta \int_S \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} x - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} y - I_p \right) ds \\ &= G \beta J \end{aligned}$$

con $\beta = \frac{M_T}{G J}$ parametro cinematico

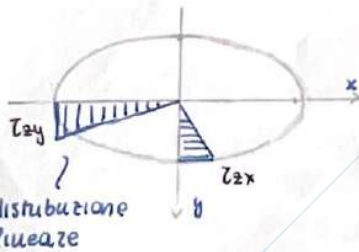
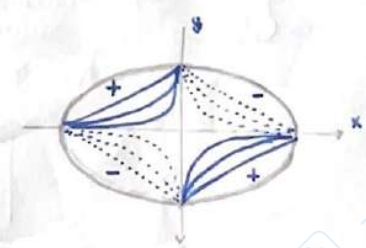
fattore di rigidità torsionale $J = \frac{I_p}{9}$

θ però non è una funzione semplice da trovare. Considereremo solo sezioni con θ_0 assegnata e che rispetta le condizioni.

SEZIONE ELLITTICA

$$\theta_0 = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x y \quad \text{con } J = \frac{\pi a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

L'asimmetria della sezione fa sì che si deformi seguendo le curve di livello, anche se poi globalmente l'ingobbamento risulta nullo: $\int_S \theta_0 ds = 0$



distribuzione lineare

Calcolo le τ_{max} della sezione:

$$\tau_{zx \max} = - \frac{2 M_T}{\pi a b^2}$$

con $y_{max} = b$ posto prendere solo questa perché $a \gg b$.

$$\left(\tau_{zy \max} = \frac{2 M_T}{\pi b a^2} \right)$$

SOLUZIONI APPROSSIMATE PER PROFILI NON SIMMETRICI

Le soluzioni iniziano a diventare complesse, dunque ricorro all'

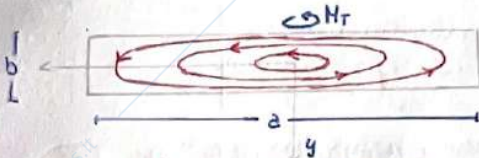
ANALOGIA IDRODINAMICA → le componenti tangenziali di tensione da torsione (τ), corrispondono alle velocità di un fluido a densità costante che ruota all'interno di un contenitore della forma della sezione trasversale.

Equazioni analoghe per l'idraulica:

$$\begin{cases} \text{div } \vec{v} = 0 \\ \text{rot } \vec{v} = \text{cost} \\ v_x n_x + v_y n_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \text{cost} \\ v_x n_x + v_y n_y = 0 \end{cases}$$

PROFILI APERTI IN PARETE SOTTILE

- Prendo una sezione rettangolare con uno spessore minore di circa un ordine di grandezza ($a \gg b$).



isolinee (di velocità) di trazione o compressione, sulle quali ho tensione max o min.

Approssimazioni per b molto piccolo: $\theta_0 = 0$ dunque

- $\tau_{zy} = 0$ non trovo una soluzione equilibrata, ma è accettabile

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \text{ (divergenza)} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = \text{cost} \text{ (rotazione)} \end{cases}$$

τ_{zx} costanti su x τ_{zx} lineari su y

L'incognita è sempre $\tau_{zx, \text{max}}$, mi aiuto con la soluzione esatta per trovare quella approssimata:

$$\tau_{zx} = \frac{M_T}{J} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial x} - y \right) \text{ (esatta) con } \theta_0(x, y) = -xy \text{ paraboloidale}$$

derivando θ_0 rispetto a x

$$\text{costante} = -\frac{2 M_T}{J} y$$

Ho trovato la soluzione: l'andamento lineare in y necessitava di trovare la costante, ed è proprio $\frac{2 M_T}{J}$

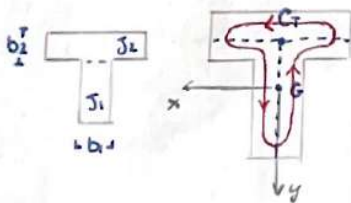
$$\tau_{zx, \text{max}} = \frac{M_T}{J} \cdot b \text{ (approssimata)}$$

le τ sono massima sul bordo, ovvero quando $y = -\frac{b}{2}$ o $y = \frac{b}{2}$

$$J = \frac{1}{3} a b^3 \text{ fattore di rigidità torsionale}$$

per sezioni di forma "composta":

→ l'ingobbamento non è più nullo. Torqua in esame le centro di torsione (che a volte coincide con il baricentro, ma non sempre).



→ L'ingobbamento è zero sulla linea media ←

Trovo il centro di taglio all'intersezione tra le linee medie.

$$J_{\text{tot}} = \sum \frac{1}{3} a_i b_i^3$$

maximale

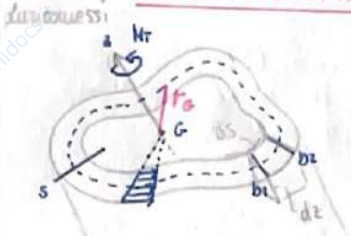
$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_T}{J_{\text{tot}}} b \text{ con } b \text{ quella del rettangolo più spesso}$$

L'andamento delle τ da torsione è lineare.



l'accortezza è di mettere "s" al posto di x o y quando calcolo le τ (→ $\tau_{zs} = \tau_{zx} = \tau_{zy}$) perchè avendo rettangoli disposti in modo diverso □ □ potrei pensare siano τ diverse, ma non è così.

PROFILI CHIUSI IN PARETE SOTTILE



Studio le tensioni per una trave pensandola come un recipiente ad anello (domini pluricamerali).

Considero un infinitesimo dz lungo ds .

• Equilibrio a traslazione:

$$\tau_{sz} \cdot b_1 dz = \tau_{sz} \cdot b_2 dz$$

le risultanti delle τ sono uguali, anche se τ_{sz1} fosse diversa da τ_{sz2}

↓
flusso costante

• Equilibrio a rotazione:

$$M_T = \int_0^a \tau_{sz(s)} \cdot b(s) \cdot r_G(s) ds =$$

approssimazioni:

- flusso costante sulla linea media
- spessore $b(s)$ piccolo e poco variabile

$$= \bar{\tau}_{sz} \cdot b \int_0^a r_G(s) ds$$

integrale totale = somma tri angolini

$$= \bar{\tau}_{sz} \cdot b \cdot 2\Omega$$

area nettona = area sottesa dalla linea media

Ricavo:

$$\tau_{sz} = \frac{M_T}{2\Omega b}$$

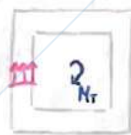
formula di Bredt

$$J = 4\Omega^2 \frac{b}{a}$$

2° formula di Bredt

osservazione:

A parità di M_T momento torcente, resiste meglio a torsione un profilo chiuso rispetto ad uno aperto in quanto più rigido



$$G \equiv G$$

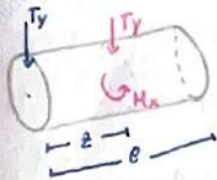


$$G \neq G$$

confronto J : a quella più alta corrisponde τ minore e meglio resiste il profilo.

TAGLIO (RETTO per T_x , DEVIATO per T_y, T_x)

Premesse:

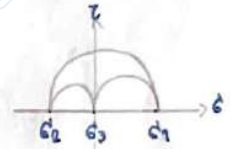


Applico un taglio T_y non sul baricentro, ma a distanza $l-z$.
 Nasce dunque $M_x = -T_y(l-z)$, diverso dal momento del caso della flessione retta in quanto quello era costante lungo z .

Stato di tensione: biassiale con $\sigma_{\text{dev}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ (localmente può essere monoassiale)

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

Cerchi di Mohr: con taglio puro, solo gli stress della torsione, ma entrando in gioco σ_z i cerchi si spostano (non si ha più $\sigma_1 = \sigma_2$)



$$M_x = \int \sigma_z y dA \quad T_y = \int \tau_{zy} dA$$

Quando agisce il taglio sulla sezione, viene indotta una torsione causata dalle τ_{zy} che hanno braccio rispetto al baricentro in quanto applicate al centro di torsione

$$M_T = \int (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \quad \text{taglio composto}$$

Per far sì che il taglio non induca torsione (dunque taglio retto), il lavoro mutuo deve risultare nullo:

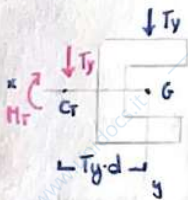
$$L = \int (\tau_{zx}^{(T)} \gamma_{zx}^{(M)} \pm \tau_{zy}^{(T)} \gamma_{zy}^{(M)}) dS = 0 \quad \begin{matrix} (T) \text{ indotte dal taglio} \\ (M) \text{ indotte dalla torsione} \end{matrix}$$

ciò avviene in un punto detto **punto di Cicala-Tieffé**

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{I_x} \int \theta_0 y dS \\ y_c = \frac{1}{I_y} \int \theta_0 x dS \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{centro di taglio} \equiv \text{centro di torsione} \\ \text{dove la sezione si inflette ma non ruota} \end{matrix}$$

Ricapitolando dunque, il momento M_T nasce quando il taglio non è applicato sul centro di taglio e deriva dalla combinazione $T_x \cdot y_T - T_y \cdot x_T$

ESERPIO

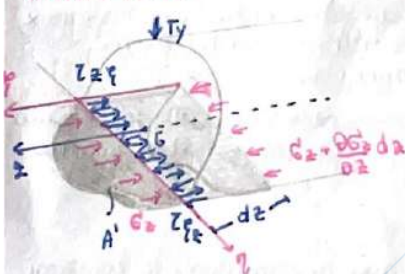


Per una sezione generica, trasporto T_y sul centro di taglio, nasce dunque M_T .
 ($\rightarrow M_T = 0$ quando $G \equiv G'$)

La sezione si inflette ma non ruota: i profili aperti resistono male a torsione

Per trazione $G_T \rightarrow$ equilibrio alla rotazione delle z da taglio

TAGLIO RETTO



Prendo una sezione trasversale, ipotizzo che T_y passi per G .
 Taglio la sezione con una corda e considero un carico lungo dz .

Scavo l'equilibrio lungo z :

$$\int_0^b \tau_{z\eta} d\eta dz = \int_{A'} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz dA'$$

risultante σ

$$\tau_{z\eta} \Big|_0^b d\eta = \int_{A'} \frac{\tau_y}{J_x} y dA'$$

1° approssimazione: prendo il valore medio delle $z\eta$

$$\bar{\tau}_{z\eta} \cdot b = \frac{\tau_y}{J_x} S_x'$$

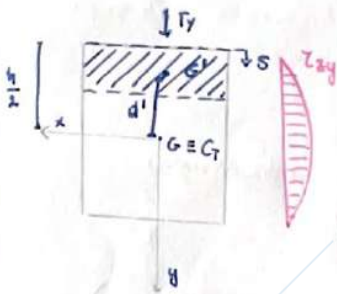
2° approssimazione: dilatazione della sezione trasversale costante

Soluzione approssimata di Jourdain

$$\tau_{zs} = \frac{T_y \cdot S_x'}{J_x \cdot b}$$

area x distanza (bas = d' con d' = $\frac{h}{2} - s$)
momento d'inerzia

SEZIONE RETANGOLARE



Andamento delle τ da taglio

Molto biconcavo o e assi d'inerzia

Taglio con una corda (di spessore b) \perp alla linea media

Le τ variano come varia il momento statico

$$\tau_{zs} = \frac{T_y \cdot S_x'}{J_x \cdot b}$$

$$S_x' = A \cdot d' = b \cdot s \cdot \left(\frac{h}{2} - s \right)$$

Se ho T_y allora S_x' , se ho T_x allora S_y'

per trovare dove la funzione ha massimo:

$$\frac{\partial S_x'}{\partial s} = 0 = b \left(\frac{h}{2} - s \right) - bs = \frac{b}{2}$$

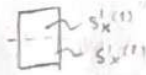
$s = 0$

τ_{zy} andamento parabolico perché è parabolico l'andamento del momento statico.

τ_{zx} non considerate nei profili in parete sottile.

S_x' ha segno: non userà mai in cambio improvviso, ma una diminuzione/aumento fino allo zero.

$$S_x' = S_x'^{(1)} + S_x'^{(2)}$$

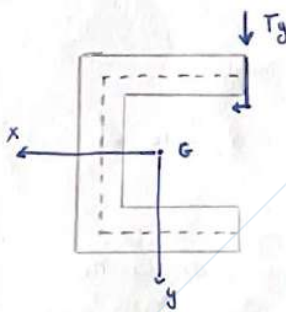


importante per definire il verso delle τ

$$\tau_{zs} = \frac{T_y \cdot S_x'}{J_x \cdot b}$$

⊖ uscenti
⊕ entranti

SEZIONE A C



Posizione biconcavo G e assi d'inerzia.

La sezione è simmetrica dunque C_T starà sull'asse x, ma non so ancora la posizione precisa dunque non so se induce torsione.

$$\tau_{zs} = \frac{T_y \cdot S_x'}{J_x \cdot b}$$

Taglio ortogonalmente con la corda: nelle due sezioni \equiv solo τ_{zx} , mentre in quelle II solo τ_{zy} .

→ Dato che non ho T_x e ricordo la formula $0 = \int \tau_{zx} ds$, significa che le τ_{zx} si devono equilibrare e quindi sul profilo saranno uguali e contrarie.

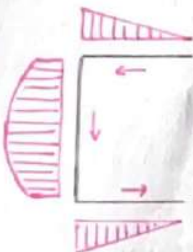
→ Su tutte le porzioni di sezione // alla direzione del taglio T, le τ hanno direzione del taglio.

Andamento momento statico alla superiore:

$$S_x' = A \cdot d$$

costante

→ andamento lineare rispetto x, con max dove ho l'area massima.



Andamento costa: varia in area che distanza → andamento parabolico con max sul biconcavo

Verso delle τ : uscenti ($S_x' \ominus$)

Dove sta C_T : è il centro di rotazione ovvero dove si annullano le rotazioni medie della sezione rispetto gli assi principali

↓ equilibrio alla rotazione:

dopo aver fatto i diagrammi delle Z da taglio, il taglio T_x dà la coordinata lungo x mentre T_y la coordinata lungo y .

non sarà da fare al pretost, ma può divedere all'orale

$$J_x = \frac{7}{12} d^3 b$$

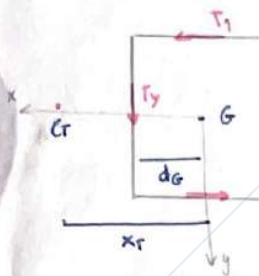
Risultante nulle ali $S'_x = b \cdot s \cdot \frac{d}{2}$

$$S'_{x_{max}} = \frac{b \cdot d^2}{2}$$

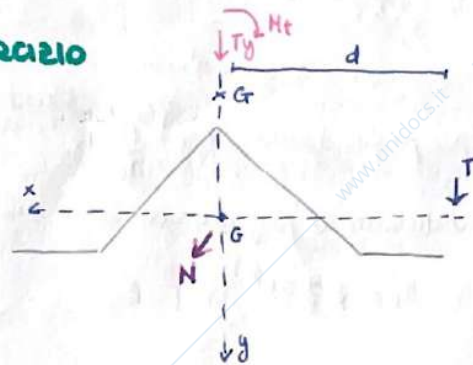
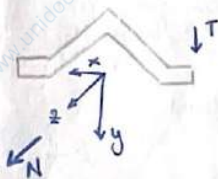
$$\text{risultante } Z: z_{max} = \frac{bd^2}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{bd^3}{4}$$

equilibrio alla rotazione: $J_y (x_r - d_G) - I_1 \cdot d = 0$

$$\hookrightarrow \frac{bd^3}{4} \cdot \frac{12}{7} \frac{1}{d^3 b} = \frac{3}{7}$$



IMPOSTARE UN ESERCIZIO



- Stato di sollecitazione
- Stato di tensione
- andamento Z da taglio
- andamento Z da torsione

- Determinare **baricentro**, centro di taglio e **assi principali d'inerzia**:

se c'è esse di simmetria \rightarrow di certo è uno degli assi principali e vi appartiene il baricentro.

Per trovare la posizione precisa (quindi l'altra coordinata) impongo che S_x e S_y dell'intera sezione siano nulli.

se non c'è esse di simmetria \rightarrow devo determinare gli assi principali imponendo che il momento centrifugo sia nullo (I_{xy}).

- Una volta definiti gli assi principali d'inerzia, definisco lo **stato di sollecitazione**:

* taglio retto (T_y)

* momento flettente indotto da T_y ($M_x = T_y \cdot z$)

} flessione camporota

* sforzo normale (N) centrato (trazione)

↓
sarebbe flessione retta se agisse solo un momento costante lungo z .

↓
se non fosse applicato al baricentro, avrò sforzo normale eccentrico che genera presso-flessione

* momento torcente se T_y non è applicato nel centro di taglio \equiv centro di torsione

centro di torsione C_T

\equiv baricentro per doppia simmetria della sezione

E' asse principale per simmetria sezione

punto in cui convergono le linee medie di più rettangoli (>2)

$$M_T = T_y \cdot d \quad \text{trasporto } T_y \text{ sul centro di taglio}$$

• Stato di tensione:

$$\sigma_{biv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

dati ipotesi del metodo semimessa
 $\sigma_n = 0$ Componente normale nulla

• biassiale (quando $\sigma_1, \sigma_2 \neq 0$) o stato piano (= intero piano su cui qualunque coppia di direzioni è principale)

monoassiale per

- sforto normale
- sforto normale eccentrico (N)
- flessione retta
- flessione deviata (M_x, M_y)
- presso-flessione oppure nei punti di estremità

• determinazione

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

(+) trazione

nel caso in esame
 saper calcolare i momenti d'inerzia

• determinazione z da torsione

→ per profilo aperto

approccio idrodinamico: come se fossero velocità del fluido nel contenitore

z distribuite a farfalla con valore max sul bordo

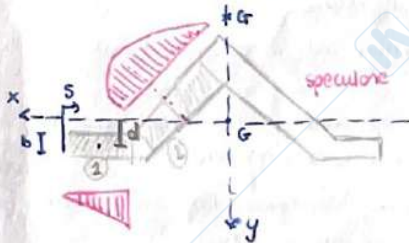
$$J_t = \frac{1}{3} a b^3$$

• determinazione z da taglio

→ Jourzaski

$$\bar{z}_{zs} = \frac{T_y S_x^1}{I_x \cdot b}$$

è l'unico parametro che cambia e' il momento statico S_x



$$S_x^{(1)} = A \cdot d = s b d$$

costante

lineare perchè d resta costante, con max quando ho area minima.

$$S_x^{(2)} = A \cdot d = s b d(s)$$

parabolico perchè d varia con s

per le sezioni I azione del taglio: S_x lineare

→ per le sezioni oblique o // azione del taglio: S_x parabolico

il max lo trovo nelle fibre baricentriche
 ↓
 in corrispondenza dell'asse y trovo asse neutro e quindi $z=0$

- $\frac{\partial S_x}{\partial s} = 0$ e trovo il punto
 - quando le segni di "d" in $S_x = A \cdot d$
- d sarà negativo perchè semipiano (-)
 d sarà positivo perchè semipiano (+)

per il verso delle z da taglio parto dalla nota citazione applicata: sulle porzioni di sezione // all'azione del taglio, il verso è lo stesso



+ → entranti
 - → uscenti