27 Febbraio 2025

scienze delle costruzioni

cinematica del corpo rigido

Lezione:

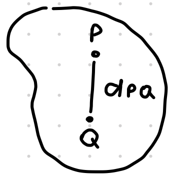
- ☐ FGSR (formula gen. dello spostamento rigido)
- ☐ " - inf
- ☐ FGSR - inf, - piano
- ☐ centro di rotazione
- ☐ Esempi

$\boxed{\text{Cos'è un corpo rigido?}}$

Def: (corpo rigido)

$\forall \; P, Q \in C$

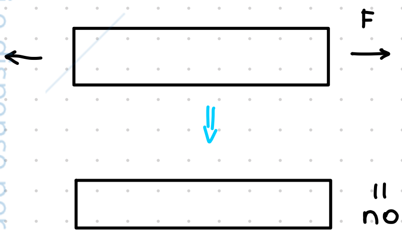
$d_{PQ} = \text{cost}$



La distanza rimane costante

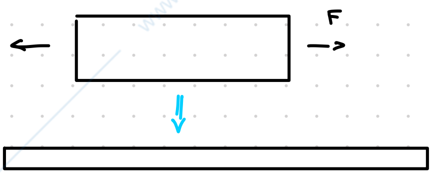
E' indeformabile

CR

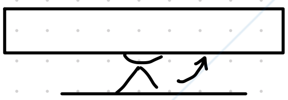


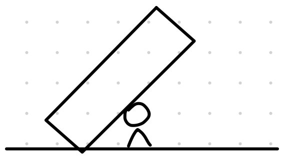
il corpo non cambia

C.E.



Moto Rigido
ogni coppia di punti mantiene la propria distanza





non riesco a capire se l'oggetto è un CROCE.

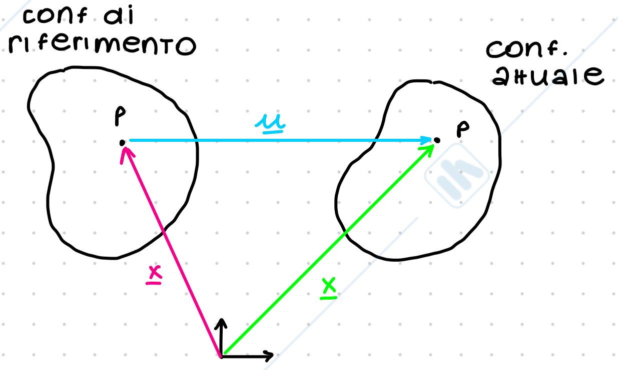
Uno spostamento è rigido se e solo se lo spostamento di un punto è dato da una costante:

$$\boxed{u(x) = u_0 + \underbrace{(\cos\theta - 1)\,\underline{CP} + \sin\theta\, e \wedge CP}_{\text{rotazione di } \theta \text{ rispetto asse } \underline{e} \text{ passante per O}}}$$

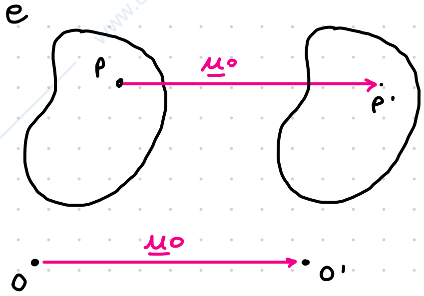
(u_0: traslazione)

FGSR

C: proiezione di P sull'asse di rotazione

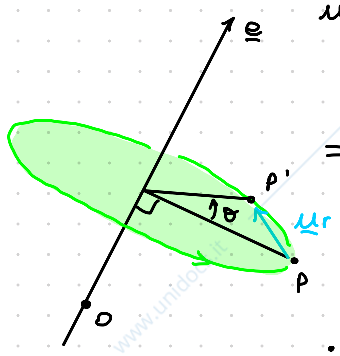


$\theta = 0$, $u_0 \neq 0$



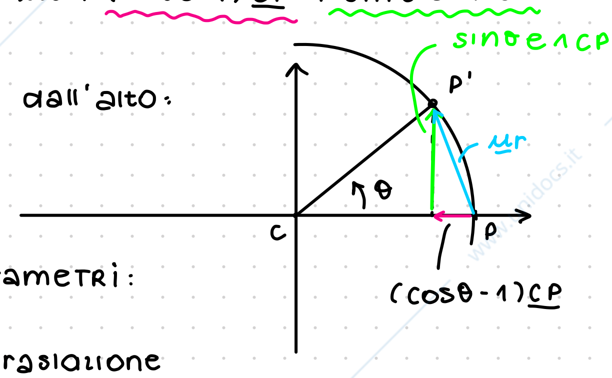
pura traslazione

$$u(x) = u_0 + (\cos\theta - 1)\,\underline{CP} + \sin\theta\, e \wedge CP$$



=

dall'alto:



parametri:

- θ
- la traslazione

HP: piccole rotazioni e spostamenti

$\curvearrowright$ espandere fino al primo ordine

Bisogna linearizzare la funzione al prima

sat $\vartheta = 0$

$$\cos\vartheta - 1 = 0 + 0 + \frac{\vartheta^2}{2} + o(\vartheta^2)$$

$$\sin\vartheta = 0 + \vartheta + 0 + o(\vartheta^2)$$

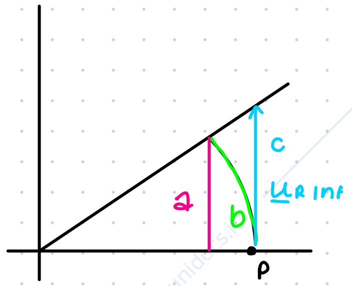
$\cos\vartheta - 1 \simeq 0$

$\sin\vartheta = \vartheta$

vettore di rotazione

$\underline{u}(P) = \underline{u}_0 + \underline{\vartheta} \wedge \underline{OP}$

FGSR - inf



$\vartheta \, \|CP\|$

$a = \sin\vartheta \, \|CP\|$

$c = \tan\vartheta \, \|CP\|$

b e' la luughezza d'arco

$\{\underbrace{e_1, e_2}_{\text{piano}}, e_3\}$

$\underline{u}_0 = u_0 \underline{e_1} \wedge v_0 \underline{e_2}$

$\underline{v} = \vartheta \, \underline{e_3}$ ($\circlearrowleft$)

$\underline{OP} = x e_1 + y e_2$

$\underline{u} = u \underline{e_1} + v \underline{e_2}$

$$\underline{\vartheta} \wedge \underline{OP} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cdot & \cdot & \vartheta \\ x & y & \cdot \end{vmatrix}$$

$x\vartheta e_2 - y\vartheta e_1$

$$\begin{cases} u = u_0 - \vartheta y \\ v = v_0 + \vartheta x \end{cases}$$

$\{u_0, v_0, \vartheta\}$ spostamenti generalizzati

- FGSR - inf è una rel. lineare (inf = infinitesimo)

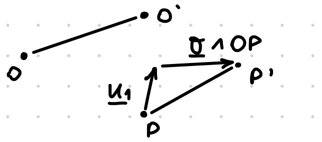
1. PdSE (Principio di sovrapposizione di effetti)

$$\left.\begin{array}{l}\{u_1, \theta_1\}\\ \{u_2, \theta_2\}\end{array}\right. \rightarrow \underline{u} = (u_1 + u_2) + (\theta_1 + \theta_2) e \wedge OP = u_0 + \theta e \wedge OP$$

- Conta l'ordine di applicazione degli spostamenti?

$$P \xrightarrow{\{u_1, \theta_1\}} P' \xrightarrow{\{u_2, \theta_2\}} P''$$

$\underline{u} \wedge \underline{u} \wedge \underline{v}$



$$\underline{u_P} = \underline{u_P}' + \underline{u_P}'' =$$

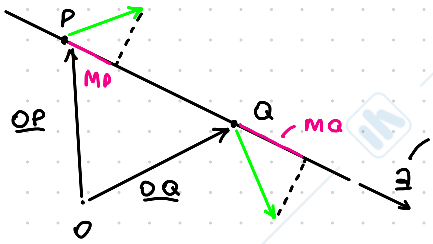
$$= (u_1 + \theta_1 \underline{e} \wedge \underline{OP} + u_2 + \theta_2 e \wedge \underline{O'P'} =$$

$$= \underline{u_1} + \underline{u_2} + \theta_1 \underline{e} \wedge \underline{OP} + \theta_2 \underline{e} \wedge (\underbrace{\underline{O'O}}_{-u_1} + \underline{OP} + \overbrace{\underline{PP'}}^{\cancel{u_1} + \theta_1 \wedge \underline{OP}})$$

$$= \underline{u_1} + \underline{u_2} + (\theta_1 + \theta_2) \underline{e} \wedge \underline{OP} + \underbrace{\theta_1 \theta_2}_{O(\theta)} (\underline{e} \wedge (\underline{e} \wedge \underline{OP}))$$

$$= \underline{u_1} + \underline{u_2} + (\theta_1 + \theta_2) \underline{e} \wedge \underline{OP} + \cancel{\theta_1 \theta_2 (\underline{e} \wedge (\underline{e} \wedge \underline{OP}))}$$

2. componente di spostamento lungo la medesima direzione sono uguali



$$MP = \underline{u_P} \cdot a \qquad MP = Ma \Rightarrow MP - MQ = 0$$
$$MQ = \underline{MQ} \cdot a$$

$$\underline{u_P} = \underline{u_0} + \underline{\theta} \wedge \underline{OP}$$
$$u_Q = \underline{u_0} + \underline{\theta} \wedge OQ$$

scalare a

$$(\underline{u_P} - \underline{u_Q}) \cdot \underline{a} =$$

$$\underline{OQ} = \underline{OP} + \underline{PQ}$$

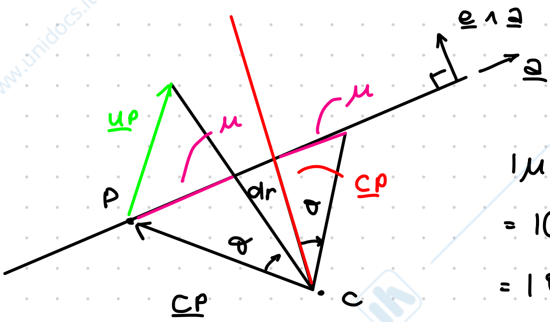
$$= (\underline{\theta} \wedge \underline{OP} - \theta \wedge \underline{OQ}) \cdot \underline{a}$$

$$= (\cancel{\underline{\theta} \wedge \underline{OP}} - \cancel{\underline{\theta} \wedge \underline{OP}} - \theta \wedge PQ) \cdot a$$

$$= 0$$

Tutte le M sono μ

3. In una rotazione rigida infinitesima ($u_0 = 0$)
La componente di spostamento μ_R rispetto ad una retta r e'
pari a θ per la distanza di O dalla retta



$$|\mu_R| = |\underline{u_P} \cdot \underline{a}|$$
$$= |(\underline{\theta} \wedge \underline{CP}) \cdot \underline{a}|$$
$$= |\theta (\underline{e} \wedge \underline{CP}) \underline{a}|$$
$$= |\theta (\underline{a} \wedge \underline{e}) \cdot \underline{CP}|$$
$$= \theta\, d_r$$

4. <u>FGSR - inf e' una rel. lineare</u>

in ogni spostamento rigido inf $\exists$ un centro di Rotazione

$$\underline{u_C} = \underline{0} = \underline{u_0} + \underline{\theta} \wedge \underline{OC}$$

$$\begin{cases} u_0 - \theta y_C = 0 \\ v_0 + \theta x_C = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= -\frac{v_0}{\theta} \\ y_C &= \frac{u_0}{\theta} \end{aligned}}$$

centro di ROTAZIONE

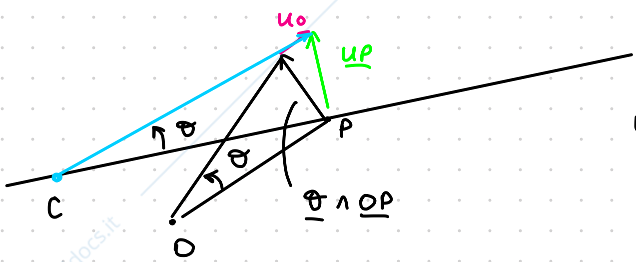
se $\theta \neq 0$

se $\theta = 0$?

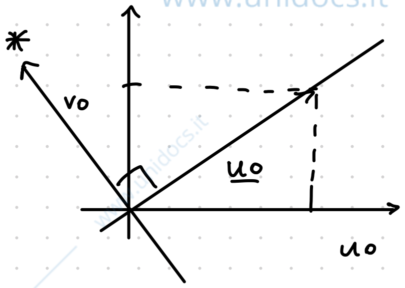
$$\|OC\| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2}$$
$$= \frac{\|u_0\|}{\theta} = +\infty$$

*

Traslazione u_0



$$u = \underline{\theta} \wedge \underline{CP}$$



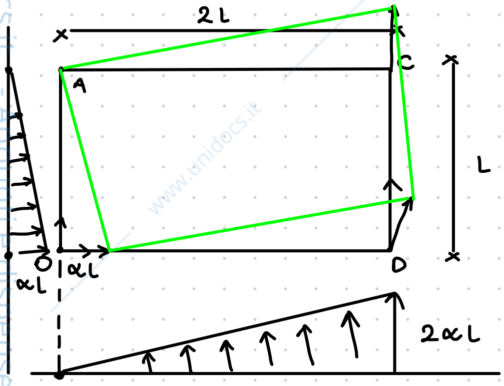
Assegnati

$$\begin{cases} u_0 = \alpha L \\ v_0 = 0 \\ \vartheta = \alpha \end{cases}$$

con $\alpha \leq 1$

a. Tracciare i diagrammi di spostamento e rapp. la configurazione variata

b. Determinare C



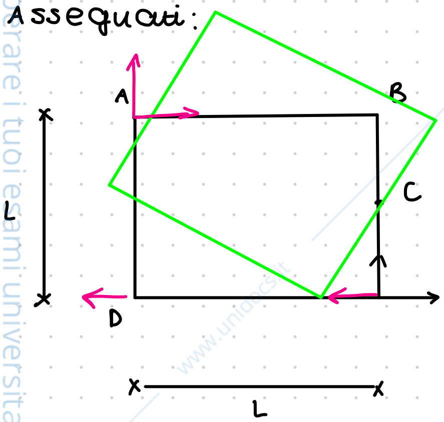
$$\begin{aligned} u &= \alpha L - \alpha y = \\ v &= \quad\quad + \alpha x = \end{aligned} \boxed{\begin{matrix} u(y) \\ v(x) \end{matrix}}$$

campi di spostamento

Il centro di rotazione è A perché rimane fermo.

Esercizio numero 2

Assegnati:



Determinare:

1. $\{\underline{u}_0, \vartheta\}$ rispetto ad O
2. C per via analitica e grafica
3. Tracciare $\{u, v\}$ e conf. variata

Dati:

$$\begin{cases} \underline{u}_a \cdot \underline{e}_1 = a \\ \underline{u}_B \cdot \underline{e}_2 = 0 \\ \underline{u}_d \cdot \underline{e}_1 = -a \end{cases}$$

1. $\begin{cases} u_0 = \\ v_0 = 0 \\ \theta = \end{cases}$

Chi è u_A scalare e_1?

$\theta = -\frac{2a}{L}$

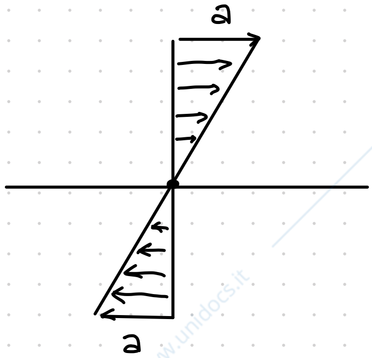
$\underline{u_A} = u_0 - \theta L = a$ componente orizzontale degli u_A

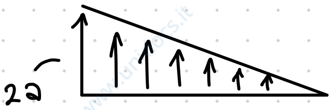
$v_B = v_0 = 0 \rightarrow v_0 = 0$

$u_d = u_0 = -a \rightarrow u_0 = -a$

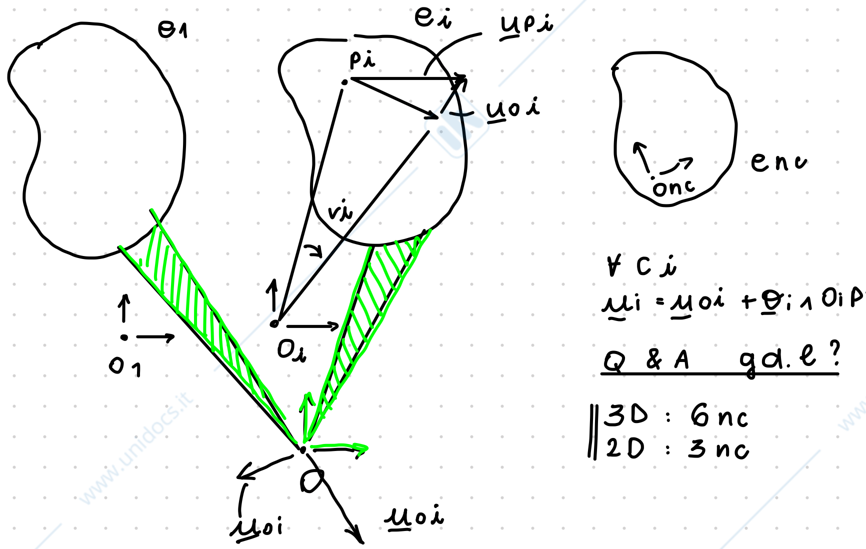
Dov'è c?

Dalle formule ottengo: $(0, \frac{L}{2})$





cinematica di corpi rigidi:



$\forall$ ci

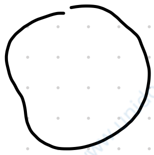
$\underline{u}_i = \underline{u}_{oi} + \underline{\theta}_i \wedge O_iP_i$

Q & A g.d.l?

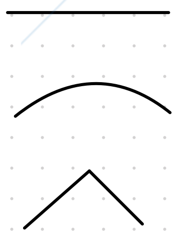
3D : 6 nc

2D : 3 nc

2D



corpi rigidi compatti



travi rigide

---

cos'è un vincolo?

Un vincolo e' un dispositivo meccanico atto a limitare la possibilita' di movimento del corpo (corpi) cui e' applicato.

1. vincoli puntuali
2. esterni e interni
3. olonomi
   anolonomi
4. autonomi
   non autonomi
5. bilateri
   unilateri
6. lisci
   non lisci
7. perfetti
   non perfetti

$$\begin{cases} f(\underline{u}_P, \dots) = 0 \\ g(\underline{u}_{P_i}, \underline{u}_{Q_J}, \dots) = 0 \end{cases}$$

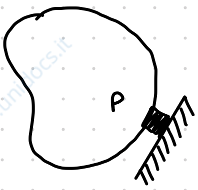
generiche cdv

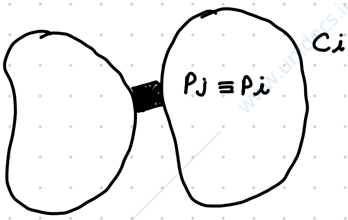
condizioni di vincolo (cdv)

$f(\underline{u}_P) = 0$ (est) $P \in C$

$g(\underline{u}_{P_i}, \underline{u}_{P_j}) = 0$ (int) $P_i \in C_i$, $P_j \in C_J$
$\underline{OP_i} = \underline{OP'_J}$

est.





vincoli

Nell'ipotesi di corpi rigidi

$$\begin{cases} f(u_P(u_0, v_0, \vartheta)) = f(u_0, v_0, \vartheta) = 0 \\ g(u_{0i}, v_{0i}, \vartheta_i, u_{0j}, v_{0j}, \vartheta_j) = 0 \end{cases}$$

numero di condizioni scalari applicati in quel punto

molteplicità m

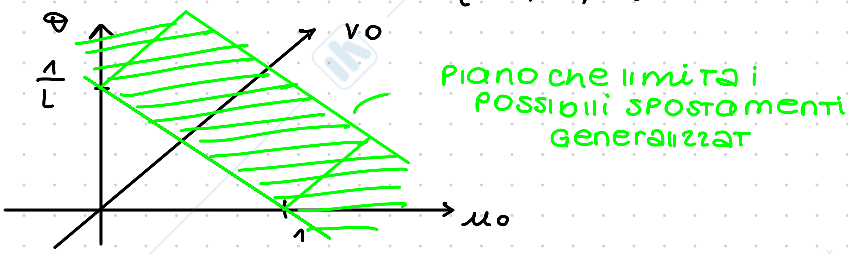
8. semplici

molteplici $\to m \begin{cases} f_k = 0 & \text{in } P_i \quad k = 1, \dots, m \\ g_k = 0 & \text{in } P_i, P_j \end{cases}$

ciascuna (*) descrive una superficie nello spazio degli spostamenti generalizzati

$f = u_0 + \vartheta L - 1 = 0$

$\{u_0, v_0, \vartheta\}$



molteplicità vincolare globale: $m = \sum_{i=1}^{nv} m_i$