



Sistemi a eventi discreti

a.a. 2018 - 2019

Prof. Luca Ferrarini

Reti di Petri

Samuele Disegna

samuele.disegna@polimi.it



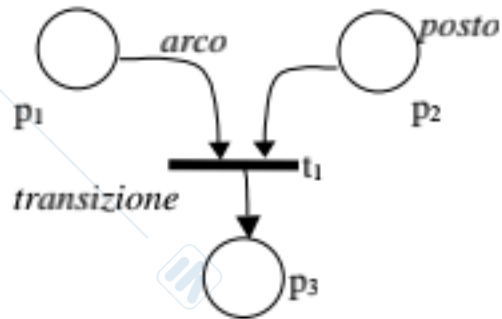
- **Formalismo per la modellazione e l'analisi del comportamento di sistemi dinamici soggetti ad eventi discreti**



→ Viene utilizzato per sistemi a eventi discreti
↳ Solo variabili discreti

ELEMENTI STRUTTURALI:

- Posti (p)
- Transizioni (t)
- Archi

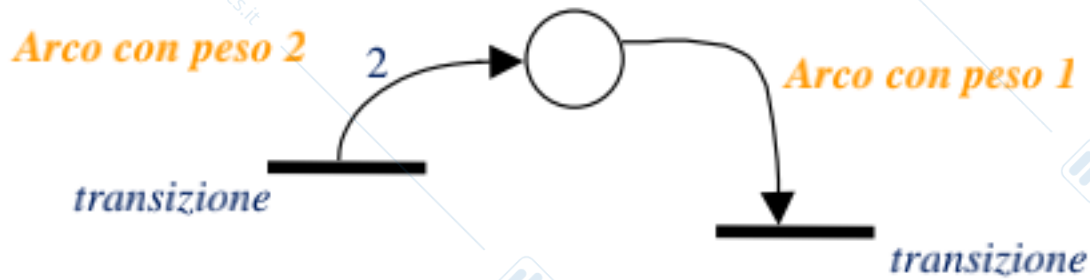


N.B: Gli archi sono tutti orientati e hanno forma libera

Reti di Petri - Introduzione (3)



Agli archi possono essere associati dei pesi, indicati con un numero intero positivo:

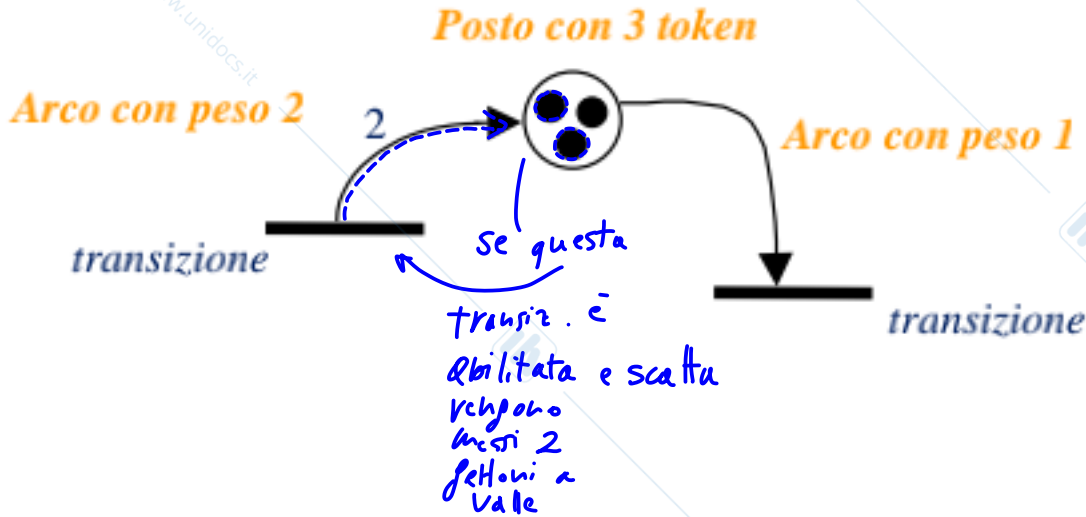


Reti di Petri - Introduzione (4)



I posti di una rete possono contenere 0 o più **gettoni** (chiamati anche "token")

i token è come se descrivessero lo stato del sistema

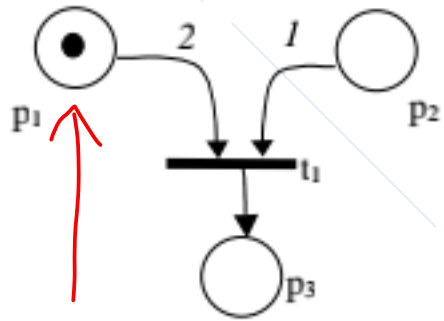


N.B Non c'è nessuna legge di conservazione dei token
↳ non deve rimanere fisso il numero di token durante l'evoluzione del sistema

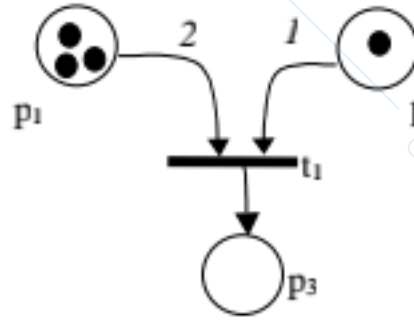
Abilitazione di una transizione



Una transizione si dice abilitata quando tutti i posti a monte della transizione contengono un numero di token maggiore o uguale al peso degli archi che li collegano alla transizione considerata:



Transizione non abilitata



Transizione abilitata

→ non ha abbastanza a token
↳ non può scattare

Scatto di una transizione(1)

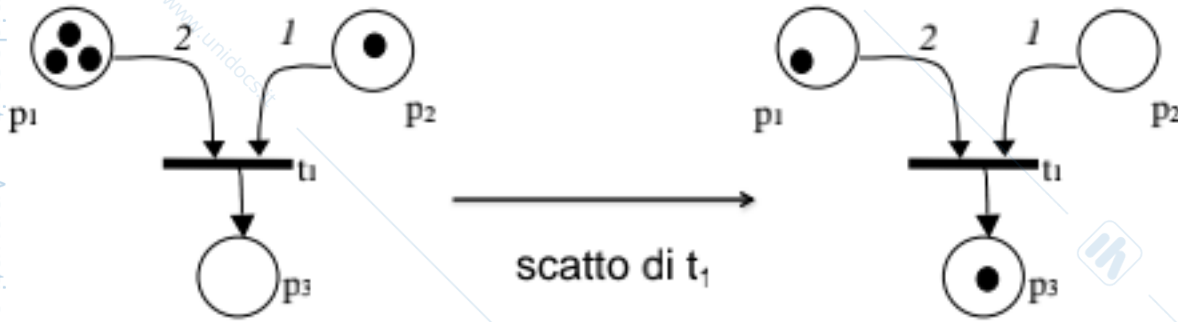


- Una transizione abilitata può **scattare**
- Dopo lo scatto di una transizione, si rimuovono dai posti a monte di essa un numero di gettoni pari al peso degli archi che collegano i posti alla transizione e si aggiungono nei posti a valle di essa un numero di gettoni pari al peso degli archi che collegano la transizione ai posti

Scatto di una transizione(2)



Esempio:



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Comportamento dinamico di una Rete di Petri



Per descrivere il comportamento dinamico di una rete di Petri occorre definire:

- **STATO (marcatura)**
- **EVOLUZIONE (regole di evoluzione-equazione di stato)**

→ corrispettivo delle matrici di un sistema (F.d.a) A, B, C, D



Rappresentazione delle RDP per mezzo di matrici e vettori:

- Utile per l'analisi delle proprietà strutturali
- Rappresenta sia la topologia che il comportamento dinamico della rete

Vettore delle marcature (1)



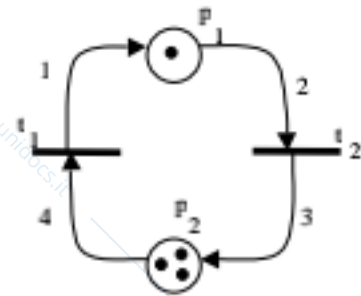
- La funzione di marcatura M associa ad ogni posto p della rete un numero intero positivo m che indica il numero di "token" presenti nel posto
- Il vettore delle marcature M è un vettore colonna i cui elementi rappresentano le marcature dei singoli posti della rete

$$M = \begin{pmatrix} M(p_1) \\ M(p_2) \\ M(p_3) \\ \dots \\ M(p_n) \end{pmatrix}$$

Vettore delle marcature (2)



Esempio:



marcatura iniziale

$$M_0 = \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

stato iniziale

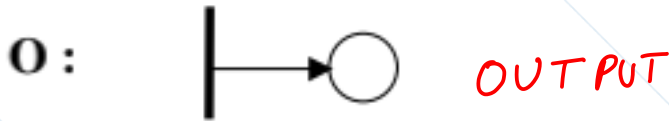
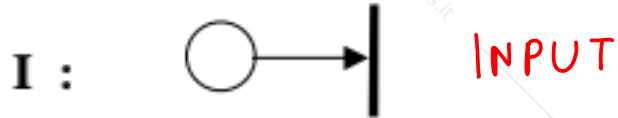
marcature = stato

- Con M_0 si indica la marcatura iniziale della rete
- Lo scatto della transizione determina un nuovo vettore delle marcature della rete

Matrici di Input e di Output (1)



I termini input e output fanno riferimento alle transizioni:



- La matrice di input **I** descrive le connessioni in ingresso alle transizioni → *archi entranti nella transiz.*
- La matrice di output **O** descrive le connessioni in uscita alle transizioni → *archi uscenti dalla transiz.*

→ La transizione viene considerata come 1 funzione (poiché è l'elemento che si attiva nel nostro sistema)

Matrici di Input e di Output (2)



- Le matrici I e O sono rettangolari con dimensione $|P| \times |T|$
- Una riga contiene le informazioni topologiche relative ad un posto
- Una colonna contiene le informazioni topologiche relative ad una transizione
- Il generico elemento (i,j) rappresenta il peso dell'arco considerato

Matrici di Input e di Output (3)



- Nella matrice I , l'elemento (i,j) rappresenta il peso dell'arco entrante nella transizione j dal posto i
- Nella matrice O , l'elemento (i,j) rappresenta il peso dell'arco uscente dalla transizione j e entrante nel posto i
- In entrambi i casi, se non vi è nessun arco tra la transizione j e il posto i allora l'elemento $(i,j)=0$

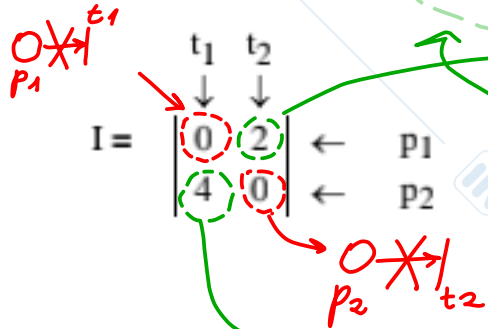
Matrici di Input e di Output (4)



Esempio:

potremmo anche non separarlo

*arco entrante
↓
non esiste*



$$I = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$O = \begin{matrix} & \begin{matrix} t_1 & t_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Le matrici I e O traducono in forma matriciale tutte le informazioni riguardo a:

- posti
- transizioni
- archi



riusciamo a disegnare la rete dalla matrice

Matrice di incidenza (1)



La matrice di incidenza C è data da:

$$C = O - I$$

Nell'esempio precedente:

$$\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} - \begin{array}{c|c} I & C \\ \hline 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} C & \\ \hline 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{array}$$

t_1 scatta \rightarrow P_1 guadagna 1 token
 P_2 perde 4 token

t_2 scatta \rightarrow P_1 perde 2 token
 P_2 guadagna 3 token

Matrice di incidenza (2)



Attenzione con **autoanello**:

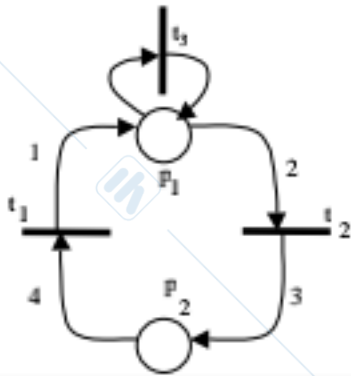
La matrice C
di incidenza non
riassuma correttamente

la topologia delle

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

reti con autoanello

↓
dette reti NON PURI



Equazione di stato



$$M_1 = M_0 + C s$$

Equazione di stato



$$M_1 = M_0 + C s$$

Dove M_1 è il vettore delle marcature raggiunto a partire dal vettore delle marcature iniziale M_0 dopo l'applicazione di una sequenza di scatto S a cui è associato il vettore di scatto s in una rete di Petri con matrice di incidenza C .

equivalente al vettore di input u (tempo continuo)

\rightarrow (equiv. matrice B nel tempo cont.)

Un vettore di scatto s è un vettore colonna di dimensione $|T|$ il cui generico elemento s_i è pari al numero di occorrenze della transizione t_i nella sequenza di scatto S .

Esempio: $S=t_1t_4t_1t_2t_2t_1$, in una rete con quattro transizioni.
allora:
 $s=[3 \ 2 \ 0 \ 1]'$

Proprietà delle reti di Petri



- **Reversibilità**
- **Limitatezza**
- **Vivezza**



Definizione di raggiungibilità:

Una marcatura M_1 si dice raggiungibile da una marcatura M se esiste una sequenza di scatti S tale che sia possibile ottenere la marcatura M_1 a partire dalla marcatura M applicando S

Notazione:

$$M [S > M_1$$

•

$$M_1 \in [M >$$

↑ Usiamo questa

significa le
marcature
raggiungibili da M

Reversibilità



Una rete di Petri con marcatura iniziale M_0 si dice reversibile se la marcatura iniziale è raggiungibile da ogni marcatura $M \in [M_0>$

se da qualsiasi marcatura che è raggiungibile da M_0 , posso ritornare a M_0 la rete si dice REVERSIBILE

Equivalentemente:

$$\forall M \in [M_0> \text{ allora } M_0 \in [M>$$

Limitatezza



- Un posto di una rete di Petri si dice **k-limitato** se in tutte le marcature raggiungibili il numero di token nel posto non supera mai il valore **k**.
- Una rete di Petri si dice **k-limitata** se tutti i suoi posti sono **k-limitati**.
- Una rete di Petri si dice **limitata** se è **k-limitata**, con **k** di valore finito.

Un posto k -limitato
è anche h -limitato
per ogni $n \geq k$

$$\exists k \Rightarrow \forall M \in [M_0], \forall P \Rightarrow M(P) < k$$



- Una transizione di una rete di Petri si dice viva se in una qualsiasi delle marcature raggiungibili a partire dalla marcatura iniziale la transizione risulta abilitata
- Una rete di Petri si dice viva se tutte le sue transizioni sono vive. \rightarrow tutte le transiz. riusciranno a scattare
- Una marcatura in cui non è abilitata nessuna transizione si dice marcatura morta \rightarrow DEADLOCK

\rightarrow transiz. morta
 \downarrow
quando non riesco
a abilitare
una transiz.

Data t , $\forall M \in [M_0>$ allora $\exists M^* \in [M>$ t.c. $M^*[t>$

Indipendenza delle proprietà



Le proprietà di una rete di Petri di:

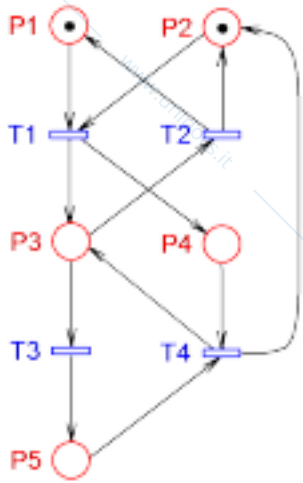
- Reversibilità
- Limitatezza
- Vivezza

sono tra loro **INDIPENDENTI**.

Esercizio 1 (1)



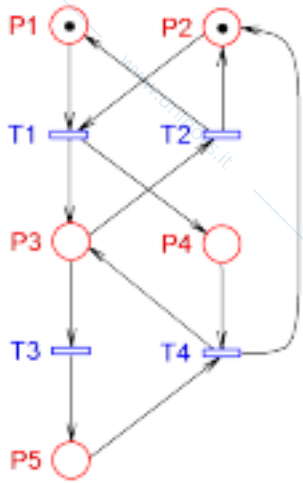
Scrivere la matrice di incidenza della rete:



Esercizio 1 (2)



→ Viene meglio compilata a righe



Scrivere la matrice di incidenza della rete:

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{array} \end{array}$$

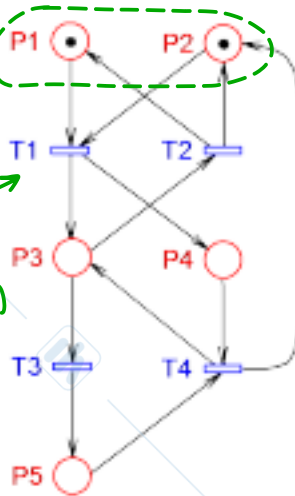
Esercizio 1 (3)



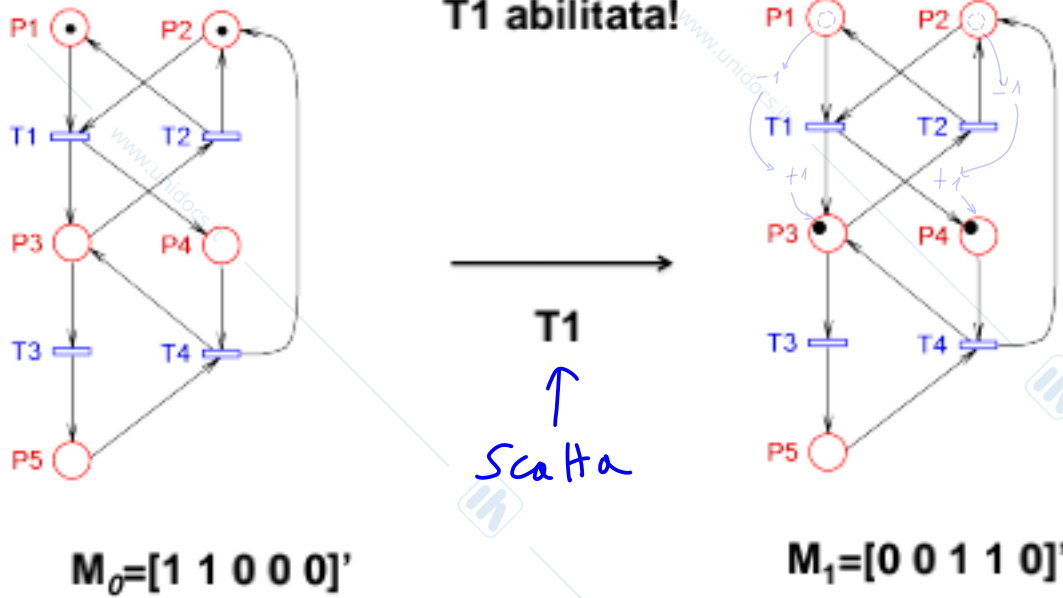
Determinare una marcatura M raggiungibile da M_0 tale che $M \geq M_0$ e dire cosa si può concludere sulle proprietà della rete (vivezza, limitatezza, reversibilità).

Arrivare in un posto che ha + tokens dello stato iniziale

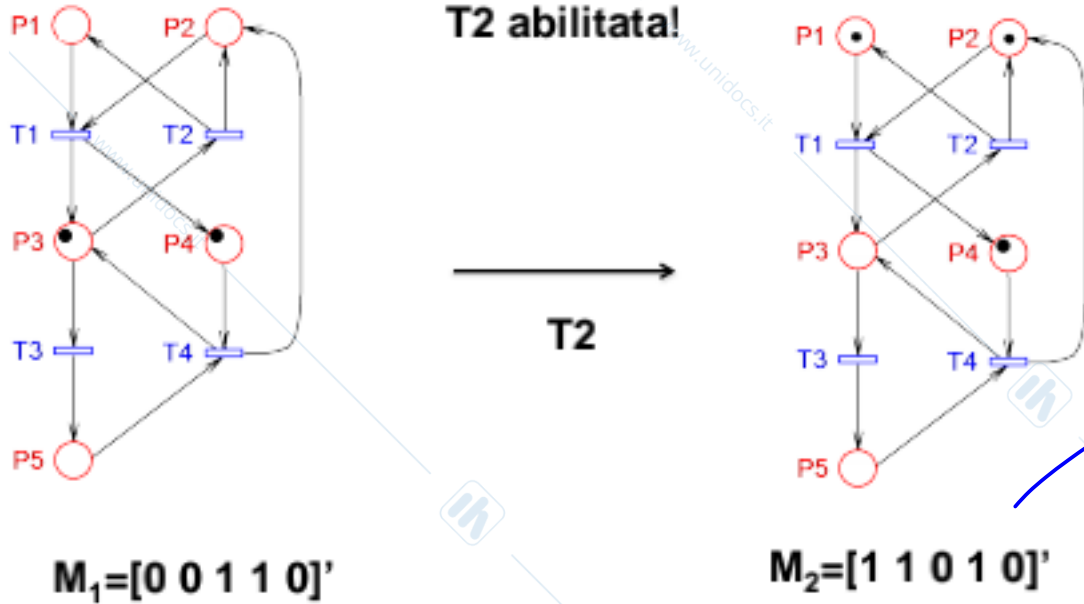
può scattare (t1 è abilitata)



Esercizio 1 (4)



Esercizio 1 (5)



marcatura > di quella iniziale

Esercizio 1 (6)



$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S=T_1T_2} M_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 \geq M_0$$

Esercizio 1 (7)



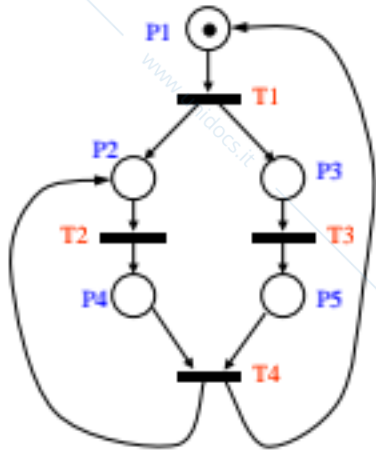
La sequenza T1T2 può essere applicata un numero arbitrario di volte, quindi la rete non è limitata (il numero di token in P4 continua a crescere).

Con la precedente analisi, nulla si può dire sulle proprietà di vivezza e reversibilità visto che sono indipendenti dalla proprietà di limitatezza.

Esercizio 2 (1)



Scrivere la matrice di incidenza della rete:

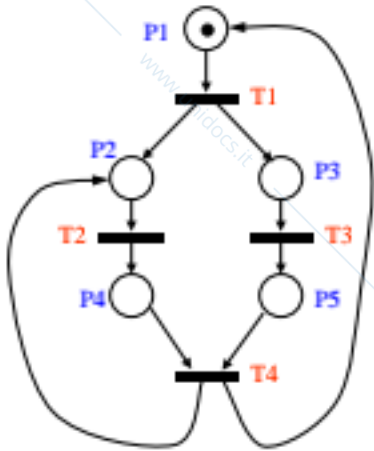


	T1	T2	T3	T4
P1	-1	0	0	1
P2	1	-1	0	1
P3	1	0	-1	0
P4	0	1	0	-1
P5	0	0	1	-1

Esercizio 2 (2)



Verificare che l'applicazione della sequenza $S=T1T2T3T4$ aumenta di 1 il numero di gettoni in P2



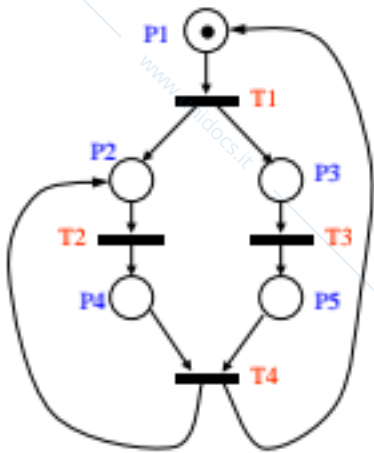
$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = M_0 + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 (3)



Verificare algebricamente che la rete non è reversibile:

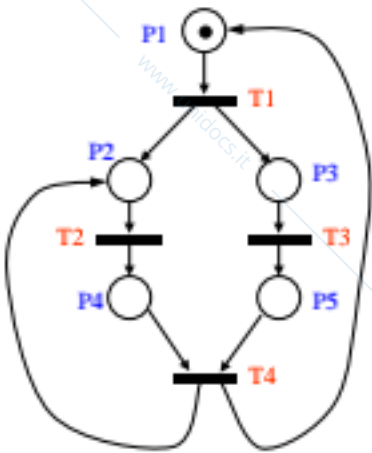


$$M_1 = M_0 + Cs \quad \text{Equazione di stato}$$

$$M_0 = M_1 + Cq \quad \text{Reversibilità}$$

$$M_0 = M_0 + C(s + q)$$

Esercizio 2 (4)



	T1	T2	T3	T4
P1	-1	0	0	1
P2	1	-1	0	1
P3	1	0	-1	0
P4	0	1	0	-1
P5	0	0	1	-1

$$C(s + q) = 0$$

Condizione necessaria:

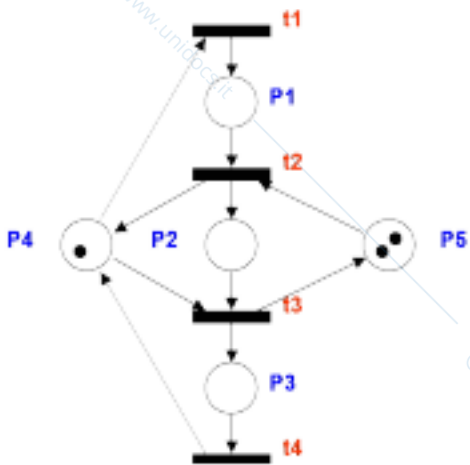
$$Cr = 0 \text{ con } r \neq 0$$

Non esiste una sequenza Q tale per cui la rete sia reversibile.

Esercizio 3 (1)



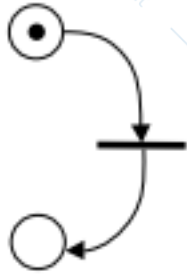
Scrivere la matrice di incidenza della rete:


$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

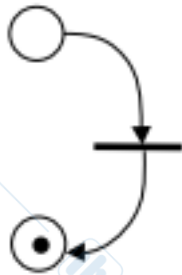
Grafo di Raggiungibilità



Il grafo di raggiungibilità rappresenta la totalità delle marcature raggiungibili di una rete.



Marcatura iniziale M0



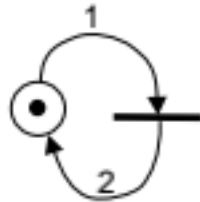
Marcatura M1



GdR



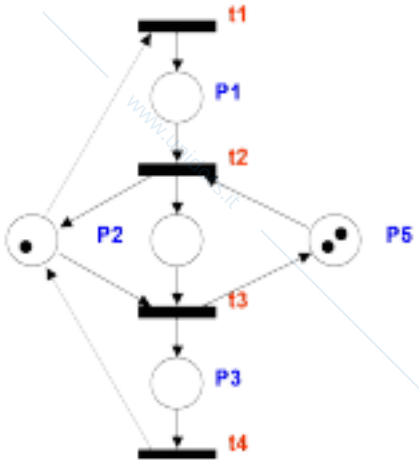
Raggiungibilità, reversibilità, Limitatezza, Vivezza nel GdR.



Esercizio 3 (2)



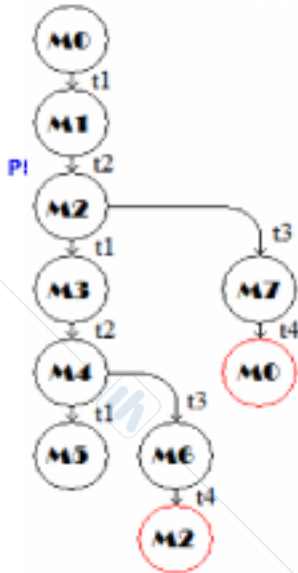
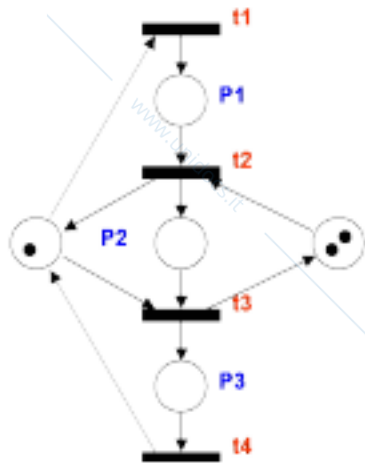
Tracciare il grafo di raggiungibilità della rete



Esercizio 3 (3)

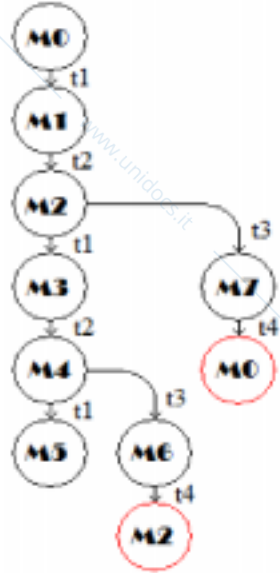


Tracciare il grafo di raggiungibilità della rete:



	p1	p2	p3	p4	p5
M0				1	2
M1	1				2
M2		1		1	1
M3	1	1			1
M4		2		1	
M5	1	2			
M6		1	1		1
M7			1		2

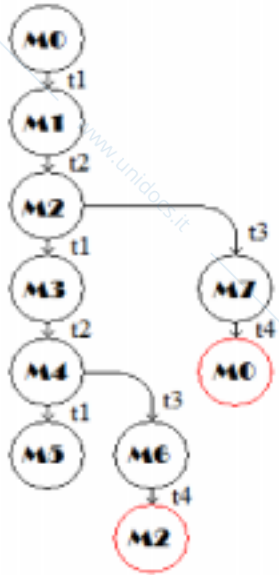
Esercizio 3 (4)



Cosa si può dedurre dal grafo sulle proprietà della rete?

- La rete è viva?
- La rete è reversibile?
- La rete è limitata?

Esercizio 3 (5)



Cosa si può dedurre dal grafo sulle proprietà della rete?

•La rete non è viva. M5 è una marcatura morta

•La rete non è reversibile (Non c'è una sequenza di scatti che mi porti da M5 a M0)

•La rete è limitata. Il grafo di raggiungibilità ha un numero finito di nodi.