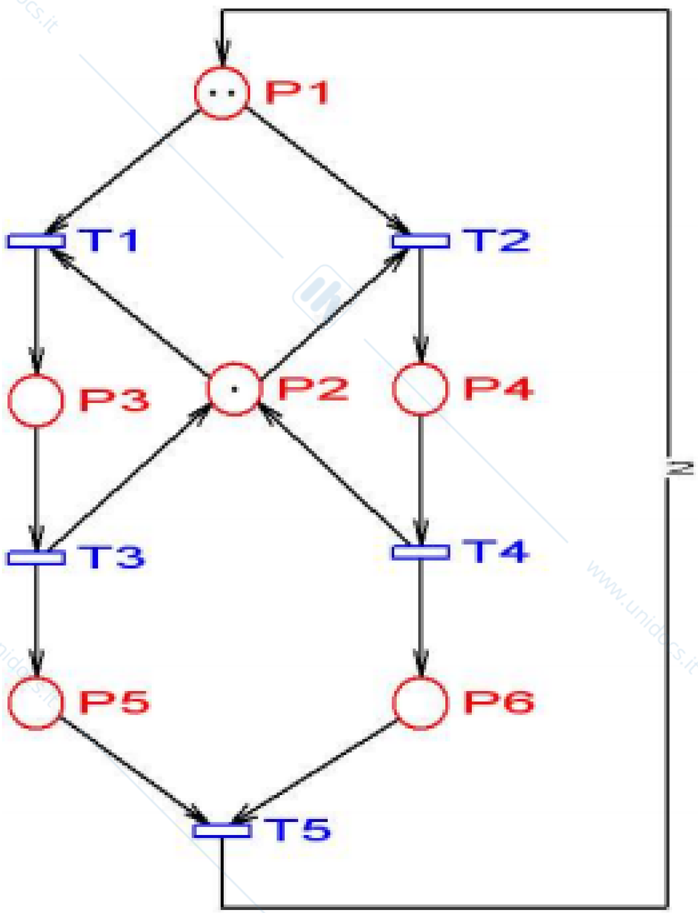
Sistemi ad Eventi Discreti

a.a. 2018 - 2019

Prof. Luca Ferrarini

Reti di Petri: Conservatività, P-Invarianti, T-Invarianti, Classi di RP, Sifoni e Trappole

Esercizio 1 (1)



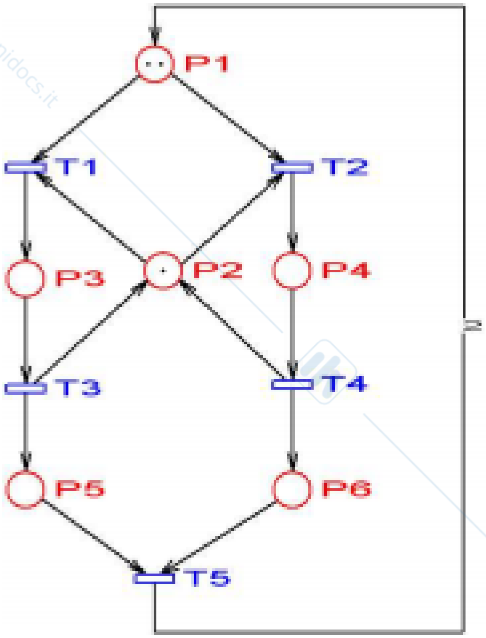
Calcolare i P-Invarianti e T-Invarianti della rete.
Mostrare che la rete è conservativa → se è coperta da P.I. > 0

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow X_1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

→ 5 eq. 6 incognite

1° eq. → $-X_1 - X_2 + X_3 = 0$

Esercizio 1 (2)



P-Invarianti:

x_2, x_3 Variabili libere $\Downarrow$ avrò 2 P.I.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - x_5 - x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_3 = x_3 - \cancel{x_2} + \cancel{x_2} \\ x_5 = x_3 - x_2 \\ x_6 = x_3 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_5 = x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$PI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad PI2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se scelgo $x_2 = 1, x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} < 0$$

non quello che vogliamo

i PI a supporto minimo che sceglialmo li vogliamo positivi

ha anche + zeri

$\hookrightarrow$ SUPPORTO MINIMO

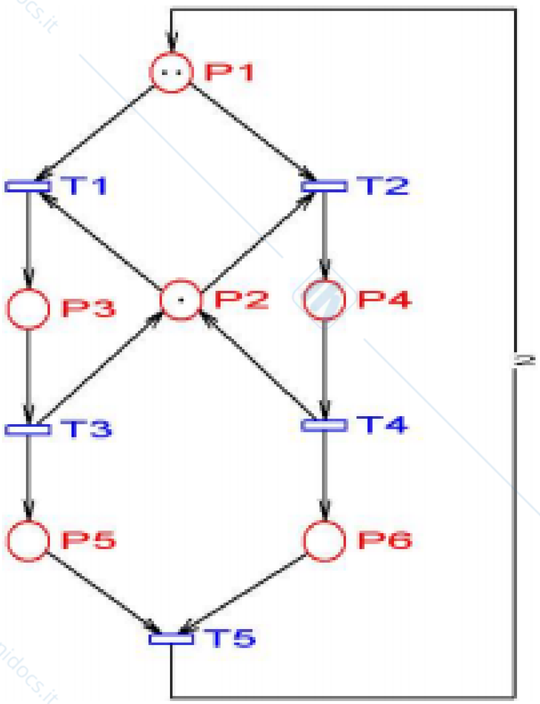
$x_3 = 1, x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 1, x_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1 (3)



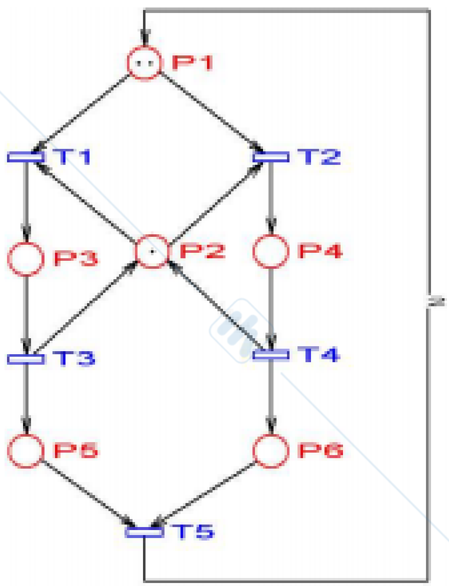
La rete è conservativa?

NB: La combinazione lineare di P-Invarianti è ancora un P-Invariante…

$$PI3 = PI1 + PI2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La rete è coperta da un P-Invariante positivo per cui è conservativa (non strettamente)!

Esercizio 1 (4)



$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

T-Invarianti:

$$Cy = 0$$

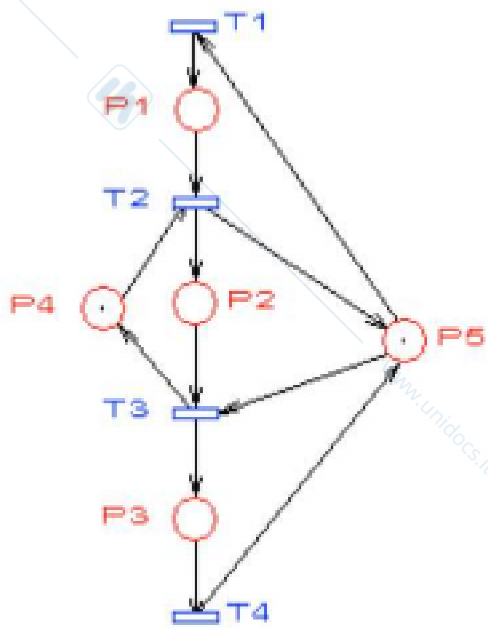
$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + 2\,y_5 = 0 \\ -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_4 = 0 \\ y_3 - y_5 = 0 \\ y_4 - y_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = y_1 \\ y_2 = y_1 \\ y_3 = y_1 \\ y_4 = y_1 \\ y_5 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \quad TI = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La rete è reversibile?

→ Non necessariamente! Il fatto che esista una sequenza che riporta la rete allo stato iniziale non garantisce che sia possibile farlo a partire da ogni stato della rete!

Esercizio 2 (1)

Calcolare i P-Invarianti della rete.



Matrice di incidenza:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 (2)

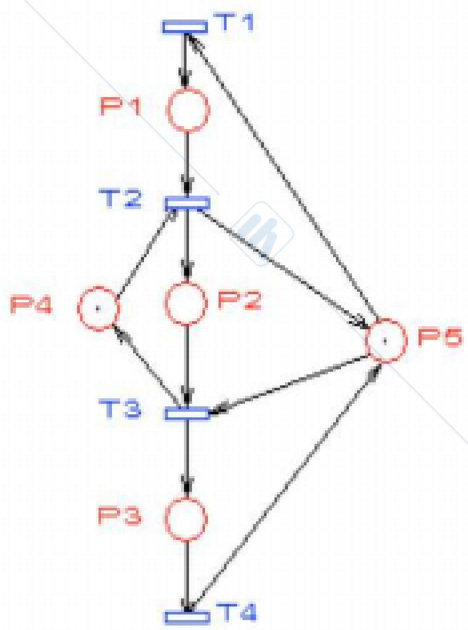
$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$PI1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad PI2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 (3)



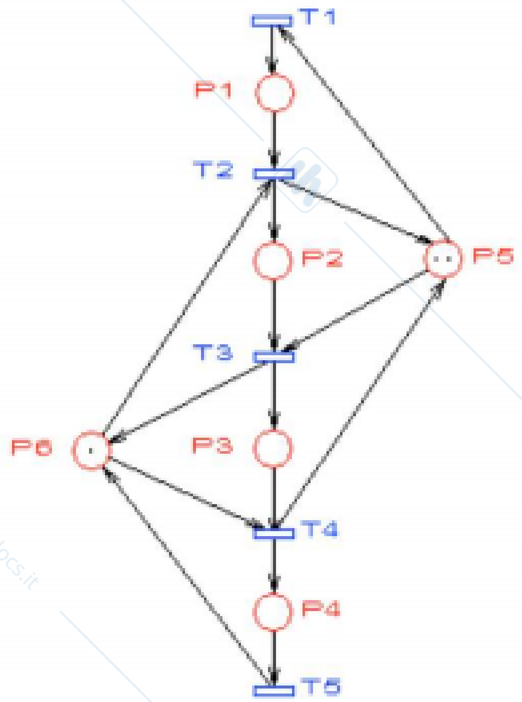
La rete è conservativa?

$$PI3 = PI1 + PI2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La rete è coperta da un P-Invariante positivo per cui è conservativa. Inoltre, ogni elemento del P-Invariante in questione è uguale ad 1
→ La rete è strettamente conservativa!

Esercizio 3 (1)

Calcolare i P-Invarianti della rete.



Matrice di incidenza:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

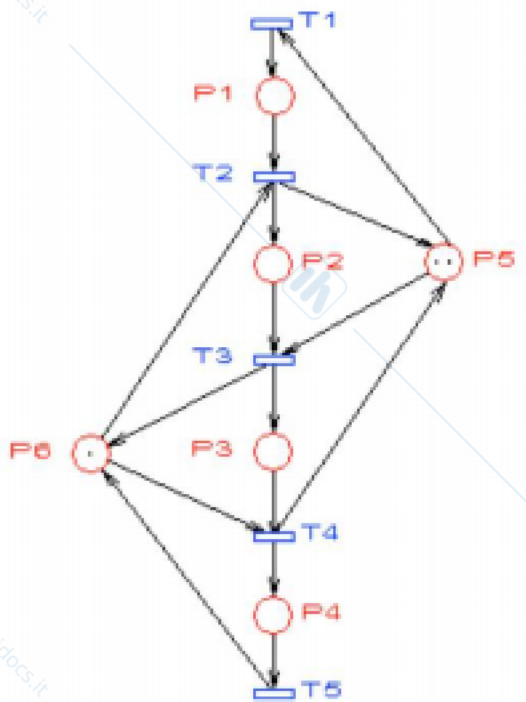
Esercizio 3 (2)

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ -x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 0 \\ -x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 \\ x_2 = x_4 = x_6 \end{cases}$$

$$PI1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad PI2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 (3)



La rete è conservativa?

$$PI3 = PI1 + PI2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La rete è coperta da un P-Invariante positivo per cui è conservativa. Inoltre, ogni elemento del P-Invariante in questione è uguale ad 1

→ La rete è strettamente conservativa!

CLASSI DI R.P.

•Macchina a stati finiti

→ Ogni transizione ha solamente un arco entrante ed un arco uscente

$$\left|{}^{o}t_i\right| = \left|t_i{}^{o}\right| = 1 \quad \forall i$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} +- & +- & +- & +- & +- \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

OK

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} +- & +-- & +-- & -- & +- \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

KO

SOLO SE NON CI SONO AUTOANELLI!

CLASSI DI R.P.

- Grafo marcato

→ Ogni posto ha solamente un arco entrante ed un arco uscente

$$\left|{}^{o}p_i\right| = \left|p_i{}^{o}\right| = 1 \qquad \forall i$$

$$C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} +- \\ +- \\ +- \\ +- \\ +- \\ +- \end{array} \end{array}$$

OK

$$C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} +- \\ +- \\ - \\ - \\ -- \\ -+-+ \end{array} \end{array}$$

KO

SOLO SE NON CI SONO AUTOANELLI!

CLASSI DI R.P.

•Rete a scelta libera

« Se un posto ha scelta, allora deve essere una scelta libera»

$$\forall p_i \;\; t.c. \; |p_i{}^o| > 1 \qquad \rightarrow \qquad \left| {}^o t_j \right| = \{p_i\} \;\; \forall t_j \in |p_i{}^o|$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

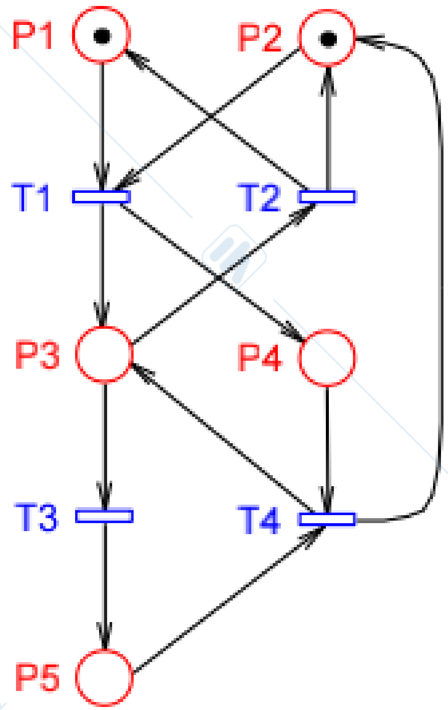
OK

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

KO

SOLO SE NON CI SONO AUTOANELLI!

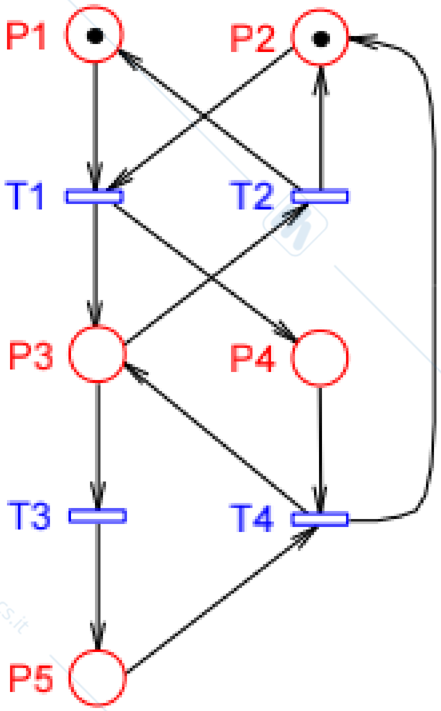
Esercizio 4 (1)



Dire se la rete appartiene ad una delle seguenti classi:

- **Macchina a stati finiti**
- **Grafo marcato**
- **Rete a scelta libera**

Esercizio 4 (2)



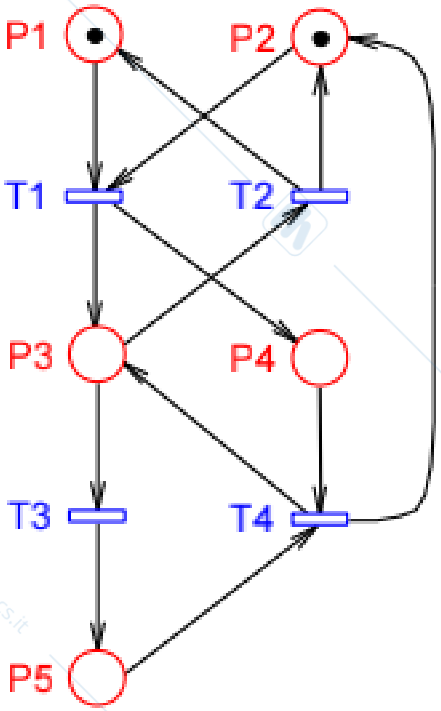
- **Macchina a stati finiti:**
  No. La transizione T1 ha due posti a monte

- **Grafo marcato:**
  No. Il posto P3 ha due transizioni a valle

- **Rete a scelta libera:**
  Si.

Esercizio 4 (3)

VERIFICA TRAMITE MATRICE D'INCIDENZA:

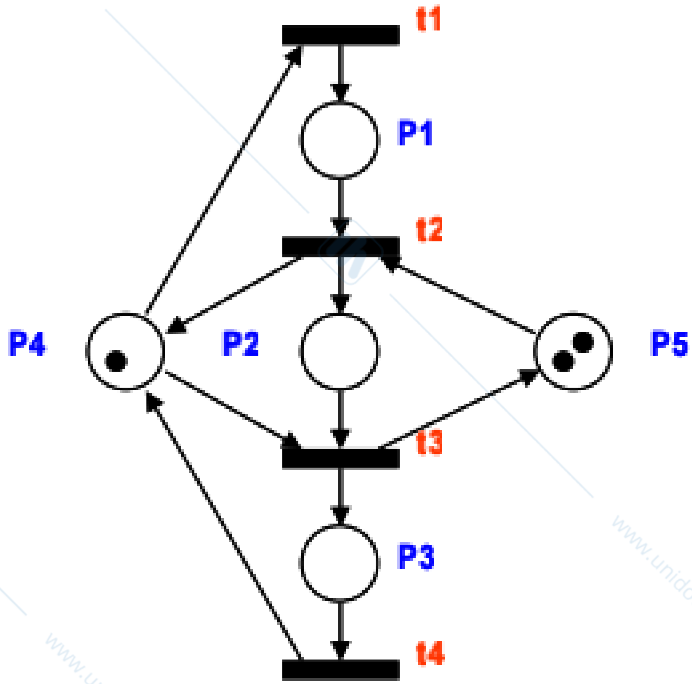


--++

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

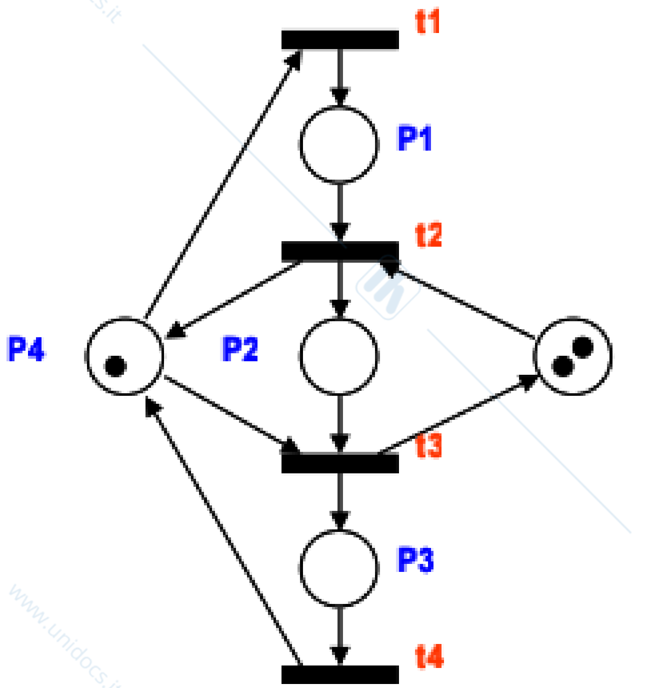
+--+

Esercizio 5(1)



Dire se la rete appartiene ad una delle seguenti classi:
- Macchina a stati finiti
- Grafo marcato
- Rete a scelta libera

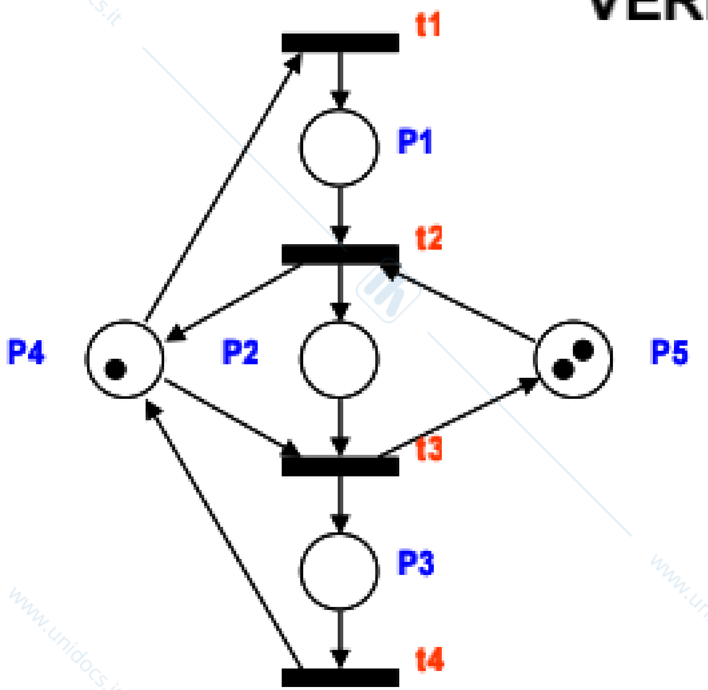
Esercizio 5(2)



- Grafo marcato:
  No. La transizione t2 ha due posti a monte.
- Macchina a stati finiti:
  No. Il posto P4 ha due transizioni a valle
- Rete a scelta libera:
  No.

Esercizio 5(3)

VERIFICA TRAMITE MATRICE D'INCIDENZA:



-++-

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

-+-+

Sifoni

- **Sifone S:**

  «Un insieme di posti tale che ${}^{\circ}S \subseteq S^{\circ}$ »

- **Sifone Pi-minimo:**

  «Un sifone che contiene il posto Pi ed è minimo, ovvero non esiste un suo sottoinsieme che sia sifone e che contenga Pi»

- **Sifoni minimi:**

  «Sifoni che non contengono nessun altro sifone»

$$\{SifoniMinimi\} \subseteq \{SifoniPiMinimi\} \subseteq \{Sifoni\}$$

Trappole

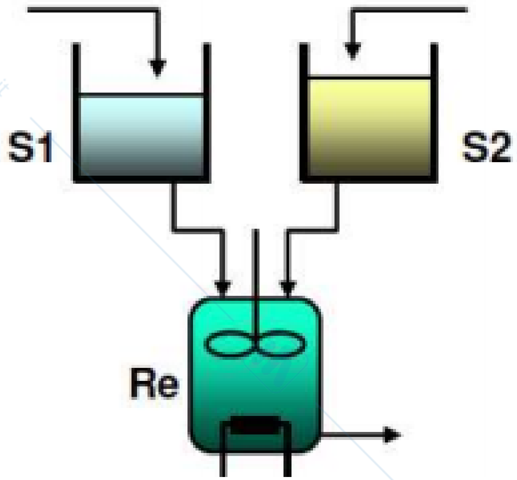
- **Trappola T:**
  «Un insieme di posti tale che $S^{o} \subseteq {}^{o}S$ »

- **Trappola Pi-minima:**
  «Una trappola che contiene il posto Pi ed è minima, ovvero non esiste un suo sottoinsieme che sia trappola e che contenga Pi»

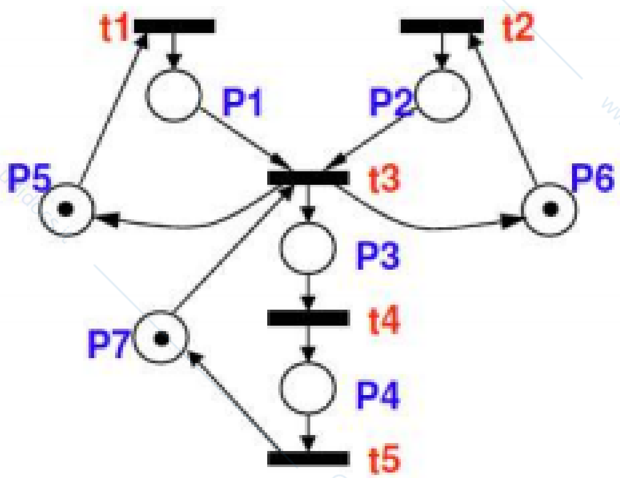
- **Trappole minime:**
  «Trappole che non contengono nessun altra trappola»

$$\{TrappoleMinime\} \subseteq \{TrappolePiMinime\} \subseteq \{Trappole\}$$

Esercizio 6 (1)



Inizialmente, i serbatoi S1 ed S2 sono scarichi. Essi vengono riempiti tramite i rispettivi comandi RS1 ed RS2 (assumiamo che tutte le azioni siano compiute istantaneamente). I serbatoi vengono poi scaricati in Re con il comando "RRe". Si procede quindi alla cottura tramite il comando "C". Infine, il serbatoio Re viene scaricato con il comando "S".



Transizioni (attività)

t1: RS1   t2: RS2
t3: RRe
t4: C
t5: S

Posti (condizioni)

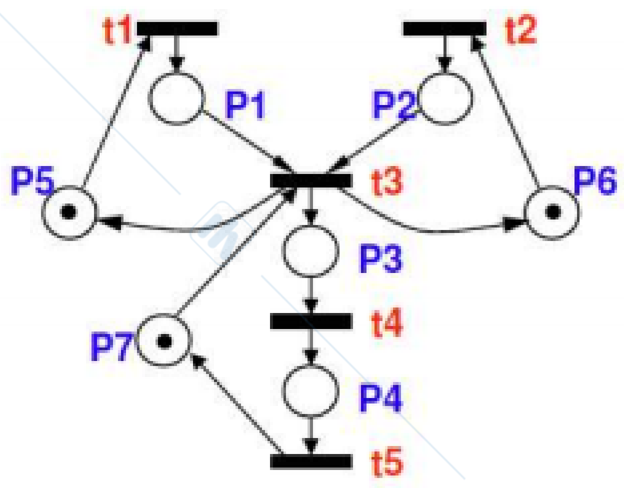
P1: S1 riempito
P2: S2 riempito
P3: Re riempito
P4: Cottura ultimata

Posti (risorse)

P5: S1 disponibile
P6: S2 disponibile
P7: Re disponibile

Esercizio 6 (2)

Calcolare tutti i sifoni minimi e P-minimi della rete



	•P	P•
P1	t1	t3
P2	t2	t3
P3	t3	t4
P4	t4	t5
P5	t3	t1
P6	t3	t2
P7	t5	t3

Posto P1:

Insieme	•S	S•
P1	t1	t3
→ P1,P5	t1,t3	t1,t3

Posto P2:

Insieme	•S	S•
P2	t2	t3
→ P2,P6	t2,t3	t2,t3

Esercizio 6 (3)

	•P	P•
P1	t1	t3
P2	t2	t3
P3	t3	t4
P4	t4	t5
P5	t3	t1
P6	t3	t2
P7	t5	t3

Posto **P3**:

Insieme	•S	S•
P3	t3	t4
↳P3,P1	t1,t3	t3,t4
↳**P3,P1,P5**	t1,t3	t1,t3,t4
↳P3,P2	t2,t3	t3,t4
↳**P3,P2,P6**	t2,t3	t2,t3,t4
↳P3,P7	t3,t5	t3,t4
↳**P3,P7,P4**	t3,t4,t5	t3,t4,t5

Posto **P4**:

Insieme	•S	S•
P4	t4	t5
↳P4,P3	t3,t4	t4,t5
↳P4,P3,P1	t1,t3,t4	t3,t4,t5
↳**P4,P3,P1,P5**	t1,t3,t4	t1,t3,t4,t5
↳P4,P3,P2	t2,t3,t4	t3,t4,t5
↳**P4,P3,P2,P6**	t2,t3,t4	t2,t3,t4,t5
↳**P4,P3,P7**	t3,t4,t5	t3,t4,t5

Esercizio 6 (4)

	•P	P•
P1	t1	t3
P2	t2	t3
P3	t3	t4
P4	t4	t5
P5	t3	t1
P6	t3	t2
P7	t5	t3

Posto **P5**:

Insieme	•S	S•
P5	t3	t1
→ **P5, P1**	t1,t3	t1,t3
→ P5, P2	t2,t3	t1,t3
→ **P5,P2,P6**	t2,t3	t1,t2,t3
→ P5, P7	t3,t5	t1,t3
→ P5,P7,P4	t3,t4,t5	t1,t3,t5
→ **P5,P7,P4,P3**	t3,t4,t5	t1,t3,t4,t5

Posto **P6**:

Insieme	•S	S•
P6	t3	t2
→ P6, P1	t1,t3	t2,t3
→ **P6,P1,P5**	t1,t3	t1,t2,t3
→ **P6, P2**	t2,t3	t2,t3
→ P6, P7	t3,t5	t2,t3
→ P6,P7,P4	t3,t4,t5	t2,t3,t5
→ **P6,P7,P4,P3**	t3,t4,t5	t2,t3,t4,t5

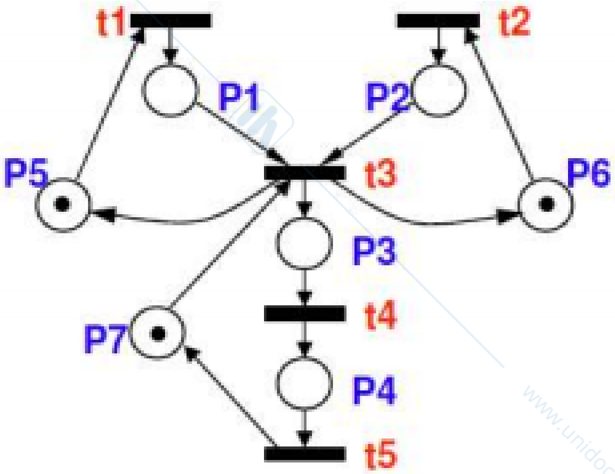
Esercizio 6 (5)

	•P	P•
P1	t1	t3
P2	t2	t3
P3	t3	t4
P4	t4	t5
P5	t3	t1
P6	t3	t2
P7	t5	t3

Posto **P7**:

Insieme	•S	S•
P7	t5	t3
↳P7, P4	t4,t5	t3,t5
↳**P7,P4,P3**	t3,t4,t5	t3,t4,t5

Esercizio 6 (6)

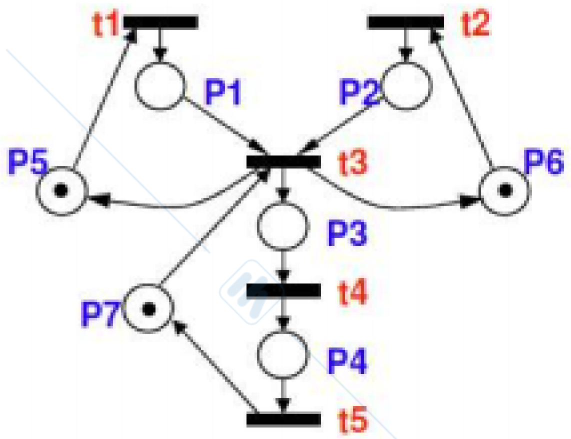


Sifoni minimi e P-minimi:

Sifoni P-minimi	P-minimo per	Minimo
S1={P1,P5}	P1,P5	Sì
S2={P2,P6}	P2,P6	Sì
S3={P1,P3,P5}	P3	No, S1 $\subset$ S3
S4={P2,P3,P6}	P3	No, S2 $\subset$ S4
S5={P3,P4,P7}	P3,P4,P7	Sì
S6={P1,P3,P4,P5}	P4	No, S1 $\subset$ S6
S7={P2,P3,P4,P6}	P4	No, S2 $\subset$ S7
S8={P2,P5,P6}	P5	No, S2 $\subset$ S8
S9={P3,P4,P5,P7}	P5	No, S5 $\subset$ S9
S10={P1,P5,P6}	P6	No, S1 $\subset$ S10
S11={P3,P4,P6,P7}	P6	No, S5 $\subset$ S11

Esercizio 6 (7)

Calcolare le trappole minime e P-minime della rete



	•P	P•
P1	t1	t3
P2	t2	t3
P3	t3	t4
P4	t4	t5
P5	t3	t1
P6	t3	t2
P7	t5	t3

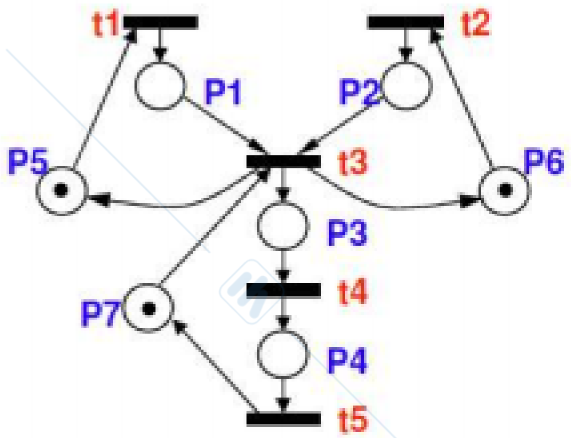
Posto **P1**:

Insieme	•S	S•
P1	t1	t3
↳P1, P3	t1,t3	t3,t4
↳P1,P3,P4	t1,t3,t4	t3,t4,t5
↳**P1,P3,P4,P7**	t1,t3,t4,t5	t3,t4,t5
↳**P1, P5**	t1,t3	t1,t3
↳P1, P6	t1,t3	t2,t3
↳**P1,P6,P2**	t3,t4,t5	t3,t4,t5

Posto **P2**:

Insieme	•S	S•
P2	t2	t3
↳P2, P3	t1,t3	t3,t4
↳P2,P3,P4	t2,t3,t4	t3,t4,t5
↳**P2,P3,P4,P7**	t2,t3,t4,t5	t3,t4,t5
↳P2, P5	t2,t3	t1,t3
↳**P2,P5,P1**	t1,t2,t3	t1,t3
↳**P2, P6**	t2,t3	t2,t3

Esercizio 6 (8)



...

...

Trappole minime:

T1={P1,P5}

T2={P2,P6}

T3={P3,P4,P7}

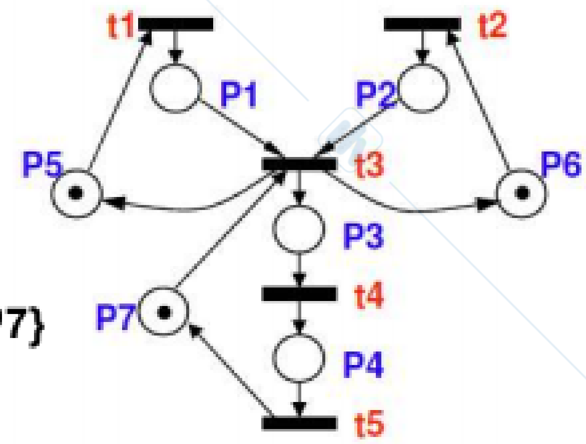
Esercizio 6 (9)

PARENTESI:

I P-invarianti minimi di questa rete risultano essere:

PI1=[1 0 0 0 1 0 0]', PI2=[0 1 0 0 0 1 0]', PI3=[0 0 1 1 0 0 1]'

Il loro supporto: ||PI1||={P1,P5}, ||PI2||={P2,P6}, ||PI3||={P3,P4,P7}



NOTARE come il supporto dei P-invarianti definisca sia un sifone che una trappola! In questo caso, il supporto dei P-invarianti minimi coincide con i sifoni MINIMI e le trappole MINIME (non è sempre così)

Supporto P-I positivo ⇒ **Trappola e sifone**

MA

Trappola e sifone ~~⇒~~ **Supporto P-I positivo**