



UNIVERSITÀ DI SIENA 1240

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
E SCIENZE MATEMATICHE

DISPENSE DEL CORSO

SISTEMI DI CONTROLLO

Versione 2.5a

Indice

1	Sistemi e modelli	1
1.1	Elementi introduttivi	1
1.1.1	Sistemi, modelli, metodi di controllo	1
1.1.2	Sistemi di controllo e compiti del progettista	2
1.2	Rappresentazione dei sistemi dinamici	6
1.2.1	Rappresentazione con schemi a blocchi	7
1.3	Modelli di sistemi meccanici (cenni)	11
2	Analisi frequenziale dei sistemi lineari	15
2.1	Risposta impulsiva di un sistema lineare (richiami)	15
2.2	Metodi di rappresentazione di una funzione di trasferimento	16
2.2.1	Risposta in frequenza di un sistema (richiami)	17
2.2.2	Diagrammi di Bode (richiami)	19
2.2.3	Diagrammi di Nyquist	21
2.2.4	Diagrammi di Nichols	28
2.3	Sistemi a minima rotazione di fase	28
2.3.1	La formula di Bode	29
3	Criteri di stabilità	33
3.1	Il concetto di stabilità	33

3.1.1	Stabilità di un punto di equilibrio	33
3.2	Stabilità ingresso limitato - uscita limitata	34
3.3	Criteri di stabilità per polinomi	36
3.3.1	Criterio di Routh	36
3.3.2	Criterio di Michailov	40
3.3.3	Criterio di Hermite-Biehler	42
3.4	Criteri di stabilità ad anello chiuso	43
3.4.1	Criterio di stabilità di Nyquist	44
3.4.2	Criterio di stabilità di Bode	50
4	Il luogo delle radici	53
4.1	Regole per il tracciamento del luogo delle radici	56
4.2	Esempi di luoghi delle radici	58
5	Prestazioni dei sistemi in retroazione	63
5.1	Sensitività e sensitività complementare	63
5.2	Specifiche dei sistemi di controllo nel dominio del tempo	68
5.2.1	Specifiche sul regime permanente	69
5.2.2	Specifiche sul comportamento transitorio	75
5.2.3	Specifiche sul comando	76
5.3	Specifiche nel dominio della frequenza	78
5.3.1	Cifre di merito integrali	80
6	Tecniche di progetto di controllori	81
6.1	Determinazione delle specifiche ad anello aperto	81

6.2	Reti a banda derivativa	82
6.3	Reti a banda integrativa	85
7	I Controllori PID	95
7.1	Generalità dei controllori PID	95
7.2	Blocco derivatore sull'uscita del sistema	99
7.3	Desaturazione dell'azione integrale (schemi anti-windup)	101
7.4	Metodi di taratura automatica	107
7.4.1	Metodi ad anello aperto	107
7.4.2	Metodi ad anello chiuso	112

Sistemi e modelli

1.1 Elementi introduttivi

L'Automatica studia l'analisi dei sistemi dinamici ed il progetto dei controlli automatici, ovvero la realizzazione di dispositivi utilizzati per imporre ai sistemi un certo comportamento desiderato, senza che sia necessario l'intervento di un operatore umano.

1.1.1 Sistemi, modelli, metodi di controllo

Definizione 1.1 *Sistema o Impianto: un oggetto fisico di natura o complessità qualsiasi, a cui deve essere imposto un certo comportamento. Ogni sistema interagisce con l'esterno (tutto ciò che non fa parte del sistema) tramite dei segnali, che si suddividono in indipendenti (cause, ingressi) e dipendenti (effetti, uscite).*

Definizione 1.2 *Variabili indipendenti: sono dette variabili indipendenti gli ingressi del sistema. Si dividono in due gruppi:*

1. *Variabili di controllo (manipolabili): sono tutte quelle variabili che possono essere modificate arbitrariamente.*
2. *Variabili incerte: sono quelle variabili che non possono essere manipolate direttamente. Rappresentano i disturbi, o più generalmente ciò che è incognito nel sistema. Si possono ulteriormente suddividere in variabili incerte misurabili e non misurabili.*

La Fig. 1.1 riporta una rappresentazione schematica di un generico sistema.

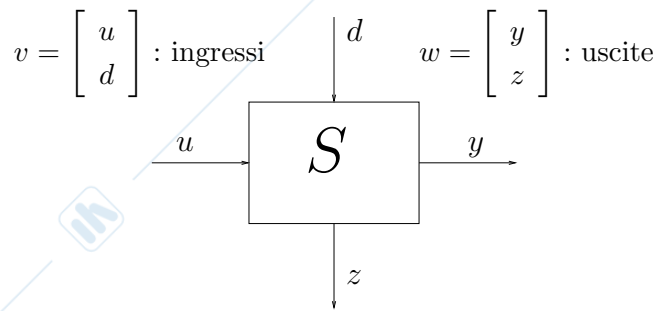


Figura 1.1: Rappresentazione schematica di un sistema.

Definizione 1.3 *Variabili dipendenti: sono dette variabili dipendenti, o effetti, le uscite del sistema. Dipendono dall'evoluzione di tutte le variabili di ingresso. Si possono dividere in due gruppi:*

1. *Variabili controllate: sono le variabili a cui si vuole imporre un assegnato comportamento.*
2. *Variabili misurate: sono le variabili che permettono di avere informazioni sul sistema. Queste sono utilizzate in genere per modificare opportunamente le variabili di controllo. Spesso coincidono con le variabili controllate.*

Definizione 1.4 *Modello matematico: è una rappresentazione del sistema reale tramite un insieme di relazioni matematiche. Pur non descrivendo esattamente il suo comportamento, il modello permette di formulare in maniera matematica il problema di controllo. La complessità del modello dipende dal sistema che si deve descrivere e dall'uso che se ne intende fare (simulazione, progetto del controllo).*

1.1.2 Sistemi di controllo e compiti del progettista

Definizione 1.5 *Problema di controllo: Sia dato un sistema (vedi Fig. 1.1) ed una variabile $r(t)$, detta variabile di riferimento, che descriva il comportamento desiderato delle variabili controllate. La soluzione al problema di controllo consiste nel determinare per ogni istante t l'ingresso di controllo $u(t)$ (in base alle informazioni disponibili) in modo che la variabile controllata $y(t)$ sia sufficientemente vicina a $r(t)$ per ogni andamento ammissibile dei disturbi.*

Si possono introdurre due diversi tipi di controllo, che utilizzano una diversa tipologia di informazione disponibile:

1. Controllo ad anello aperto (o in catena diretta): questa tecnica prevede la scelta del valore delle variabili di controllo u sulla base delle variabili di riferimento r e delle variabili incerte misurabili d_m .
2. Controllo ad anello chiuso (o in retroazione): questa tecnica determina il valore delle variabili di controllo u in funzione della variabile di riferimento r , delle variabili incerte misurabili d_m e delle uscite misurate z del sistema.

La struttura dello schema di controllo nei due casi è riportato in Fig. 1.2, dove il blocco C che genera il valore delle variabili di controllo è detto “controllore” o “regolatore”.

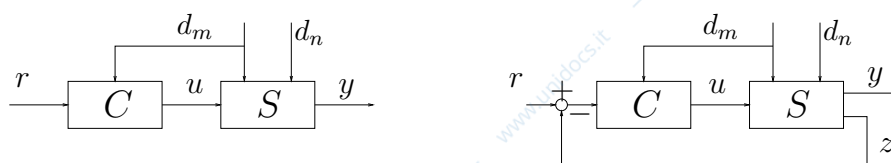


Figura 1.2: Tipi di controllo: ad anello aperto (a sinistra) e in retroazione (a destra).

Controllo in anello aperto (feedforward)

In uno schema di controllo ad anello aperto, l'ingresso al sistema da controllare viene determinato unicamente dai segnali di riferimento desiderati e dai valori delle variabili incerte misurabili. Questa struttura presenta i seguenti svantaggi:

- Impossibilità di poter correggere l'uscita del sistema a fronte di disturbi non misurabili. L'assenza di un anello di retroazione sul sistema impedisce al controllore di conoscere l'effettivo andamento dell'uscita, rendendo impossibile ogni tipo di correzione dovuto a disturbi non misurabili (d_n).
- Impossibilità di poter correggere l'uscita del sistema a fronte di variazioni del sistema stesso o imprecisioni nella rappresentazione dello stesso. Non è infatti infrequente che un sistema reale possa modificare il proprio comportamento con il tempo, a causa ad esempio di usura o eccessivo stress dei componenti. Inoltre, poiché il sistema di controllo ad anello aperto fornisce il valore del controllo in base ad un modello matematico del sistema fisico, può risultare che tale modello non sia adeguatamente accurato e che quindi il segnale di controllo non sia anch'esso corretto.
- Impossibilità di controllare sistemi instabili. Non disponendo di una misura della variabile da controllare, risulta impossibile stabilizzare un sistema instabile a causa di inevitabili errori di modello (anche piccoli) e disturbi agenti sul sistema.

Tale struttura presenta anche dei vantaggi, quali:

- Maggiore semplicità del controllore. In generale, una legge di controllo ad anello aperto risulta piuttosto semplice da realizzare, in quanto gli unici ingressi del controllore risultano essere i segnali di riferimento e, in taluni casi, i segnali relativi agli ingressi misurabili. Tale semplicità si rispecchia anche nel tempo di elaborazione, che risulterà, in generale, estremamente ridotto.
- Assenza di meccanismi di trasduzione (sull'uscita). La configurazione di controllo ad anello aperto, per definizione, non necessita di trasduttori sull'uscita. Questo semplifica notevolmente la struttura di tale sistema di controllo, riducendone inoltre i costi di realizzazione.

Controllo in anello chiuso (feedback)

Un sistema di controllo in anello chiuso (in retroazione) determina il valore delle variabili di controllo sulla base dei valori di riferimento, delle variabili misurate, e dei valori delle uscite misurate. In generale, i vantaggi e gli svantaggi di questo approccio sono complementari rispetto al controllo in catena aperta.

I principali vantaggi risultano quindi essere:

- Possibilità di attenuare o reiettare completamente l'influenza di disturbi esterni sul sistema.
- Possibilità di far fronte (entro certi limiti) a variazioni interne al sistema o ad errori di modello.
- Possibilità di stabilizzare sistemi instabili in anello aperto.

Per contro, la configurazione ad anello chiuso presenta i seguenti svantaggi:

- Maggiore complessità della legge di controllo.
- Necessità di meccanismi di trasduzione sull'uscita e di conseguenza maggior costo.
- Rischio di rendere instabili sistemi stabili in anello aperto.
- Rischio di amplificare i disturbi di misura.

Nell'ambito del corso "Sistemi di Controllo" ci occuperemo essenzialmente di controllo in retroazione.

In molte applicazioni industriali, lo schema generale del sistema di controllo è quello riportato in Fig. 1.3.

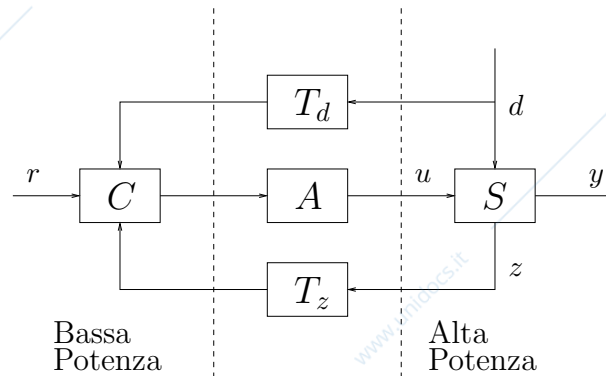


Figura 1.3: Schema generale del sistema di controllo.

Come si può vedere, tutto il sistema può essere diviso concettualmente in tre sezioni: la prima funziona ad un basso livello di potenza ed è finalizzata a calcolare il valore degli ingressi di controllo in base alle informazioni raccolte sul sistema (z e d) e all'andamento desiderato delle grandezze controllate. La seconda (il sistema S da controllare) funziona di solito ad un elevato livello di potenza. La terza include le interfacce tra le prime due ed include principalmente attuatori e trasduttori. I trasduttori (T_z e T_d) servono per trasformare le grandezze misurabili in segnali a bassa potenza (in genere elettrici), che possono essere elaborati da C . Gli attuatori (A) utilizzano i segnali di uscita del controllore per pilotare gli ingressi del sistema da controllare.

Quando viene sviluppato il progetto di un sistema di controllo, si devono affrontare diversi compiti, per svolgere i quali sono richiesti sia una preparazione di base che conoscenze specifiche relativamente a:

- costruzione di un modello matematico dell'impianto;
- attuatori e trasduttori disponibili sul mercato;
- requisiti sul comportamento da imporre alle variabili (specifiche di progetto).

Le decisioni che il progettista deve affrontare riguardano:

- scelte degli attuatori (A) e dei traduttori (T) più opportuni;
- programmazione di C ;
- interfacciamento delle varie componenti $T - C$, $C - A$ e $A - S$.

1.2 Rappresentazione dei sistemi dinamici

I sistemi dinamici vengono rappresentati tramite l'utilizzo di modelli matematici. Un modello matematico è in genere rappresentato da un insieme di equazioni che legano gli ingressi e le uscite. E' possibile classificare un modello in base alle sue caratteristiche:

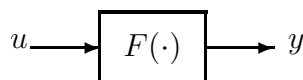
1. **Modello statico / dinamico:** un modello statico descrive il sistema trascurando il transitorio (esempio: caratteristica V-I di un diodo). Un modello dinamico è in grado di descrivere anche l'evoluzione transitoria del sistema. Nei controlli automatici si utilizzano di solito modelli dinamici. Da un punto di vista matematico, un modello statico è tale per cui il valore dell'uscita all'istante t dipende solo dagli ingressi u all'istante t stesso. Un modello è dinamico se il valore $y(t)$ dipende non solo da $u(t)$, ma anche da $u(\tau)$ per $\tau \leq t$.
2. **Modello lineare / non lineare:** un modello è lineare se soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete, e dati due ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a cui corrispondono le uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$, per ogni coppia di costanti k_1 e k_2 , la risposta all'ingresso $u(t) = k_1 u_1(t) + k_2 u_2(t)$ è data da $y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$. Un modello che non soddisfi questa proprietà è detto non lineare.
3. **Modello stazionario / non stazionario:** un modello è detto stazionario (o tempo invariante) se le uscite non dipendono dall'istante di tempo a cui l'ingresso è applicato, ovvero se, dato un qualsiasi ingresso $u(t)$ e la corrispondente uscita $y(t)$, si ha che l'uscita corrispondente all'ingresso $u(t - T)$ è $y(t - T)$. I modelli non stazionari, che non soddisfano la precedente condizione, sono anche detti tempo varianti.
4. **Modello causale / non causale:** un modello si dice causale se l'uscita all'istante τ dipende solo dagli ingressi agli istanti $t \leq \tau$, ma non da quelli agli istanti $t > \tau$. I modelli di sistemi fisici reali sono generalmente causali.

5. **Modello scalare / multivariabile:** un modello è scalare se ha un solo ingresso e una sola uscita (SISO: Single Input Single Output); è multivariabile se ha più ingressi e/o più uscite (MIMO: Multi Input Multi Output).
6. **Modello tempo continuo / tempo discreto / a dati campionati:** un modello è a tempo continuo se le sue variabili sono definite su tutto l'asse reale dei tempi. Un modello è a tempo discreto se le variabili sono definite solo per un insieme discreto di valori della variabile temporale. I modelli a dati campionati sono dei sistemi misti: hanno una parte continua ed una discreta (es: controllo di un sistema fisico tramite un computer); hanno al loro interno sistemi di conversione analogico/digitale e digitale/analogico indispensabili per interfacciare i vari componenti.
7. **Modelli a parametri concentrati / distribuiti:** un modello si dice a parametri concentrati se considera solo il comportamento dei fenomeni rispetto al tempo, ignorando quelli relativi allo spazio. Viceversa, un modello a parametri distribuiti considererà anche i fenomeni spaziali. Un modello a parametri concentrati è descritto da equazioni differenziali ordinarie, mentre un modello a parametri distribuiti è descritto da equazioni alle derivate parziali.

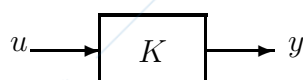
1.2.1 Rappresentazione con schemi a blocchi

Un modo compatto per descrivere i modelli dei sistemi è l'utilizzo degli schemi a blocchi. In questo caso il legame fra ingressi e uscite viene rappresentato tramite l'interconnessione di blocchi che contengono operatori (statici o dinamici) connessi tra loro da linee, che possono sommarsi o diramarsi.

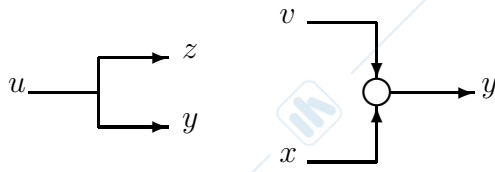
- Blocco elementare: $y = F(u)$.



- Blocco lineare: $F(u) = Ku$.



- Punto di diramazione e giunzione sommante.



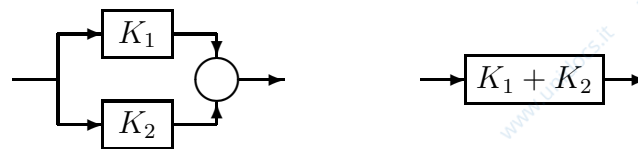
In presenza di una giunzione sommante, in mancanza di indicazioni sul segno delle frecce, si assumerà che l'uscita sia la somma degli ingressi. Nel caso si intenda invece effettuare una differenza, verrà esplicitamente indicato il segno “-” a fianco del segnale da sottrarre. Da ora in avanti sarà sempre adottata questa convenzione.

Di seguito sono riportate le regole di semplificazione e trasformazione per blocchi lineari, aventi lo scopo di ottenere uno schema che presenti un numero minore di blocchi rispetto a quello originario.

1. Riduzione di blocchi in cascata:



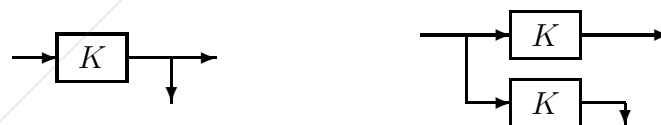
2. Riduzione di blocchi in parallelo:



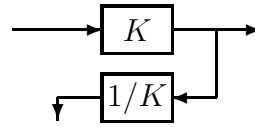
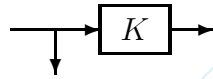
3. Riduzione di giunzioni sommanti:



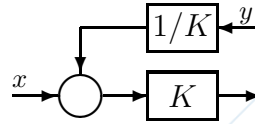
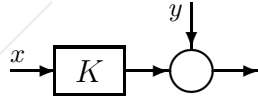
4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:



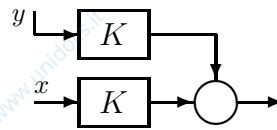
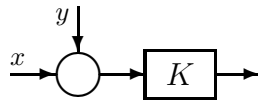
5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:



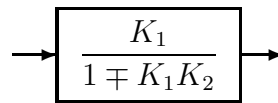
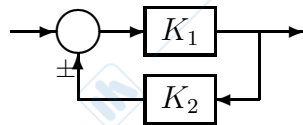
6. Spostamento di una giunzione sommante a monte di un blocco:



7. Spostamento di una giunzione sommante a valle di un blocco:



8. Eliminazione di un anello:



Osservazione: nel caso di uno schema a blocchi che presenti più ingressi/uscite, per valutare la funzione di trasferimento tra un ingresso ed una uscita specificata, è necessario porre a zero tutti gli altri ingressi. Nel caso generale di una retroazione negativa, la funzione di trasferimento equivalente risulta:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

dove $F(s)$ è il prodotto dei blocchi sulla catena diretta, mentre $G(s)F(s)$ è il prodotto dei blocchi dell'intero anello di retroazione.

Esempio 1.1 (Motore in c.c. con comando in armatura)

Lo schema di una macchina elettrica in corrente continua con parametri parassiti è riportato in Fig. 1.4, in cui il circuito di eccitazione (contraddistinto con il pedice "e") serve a generare il campo magnetico (vettore induzione), mentre quello di armatura (contraddistinto con il pedice "a") è il circuito di potenza attraverso il quale la macchina assorbe energia elettrica e la trasforma in energia meccanica (funzionamento da motore). La resistenza R_p rappresenta le perdite per isteresi e correnti parassite, R_a e R_e le resistenze ohmiche, L_a e L_e le rispettive induttanze, ed e la forza elettromotrice indotta.

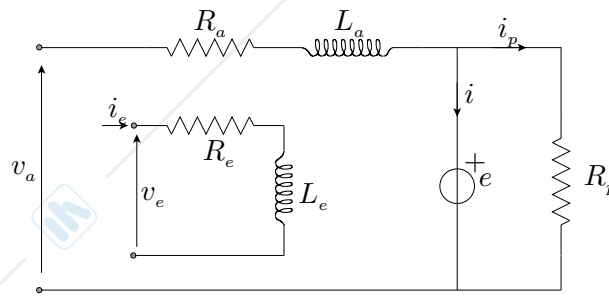


Figura 1.4: Schema di una macchina elettrica con parametri parassiti.

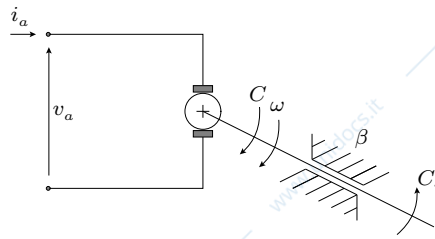


Figura 1.5: Macchina elettrica con carico.

Assumendo di applicare un carico meccanico all'albero del motore (Fig. 1.5), le equazioni del sistema reale diventano:

$$E = k \Phi \omega$$

$$C = k \Phi I$$

$$I_a = I + I_p$$

$$V_a = E + (R_a + s L_a) I_a$$

$$V_e = (R_e + s L_e) I_e$$

$$I_p = \frac{E}{R_p}$$

$$\Phi \simeq k_e I_e$$

$$C = C_r + \omega(\beta + s J)$$

dove C rappresenta la coppia motrice generata, C_r la coppia resistente, β le perdite per attrito meccanico e J il momento di inerzia complessivo dell'asse di rotazione con la massa trascinata.

E' possibile pilotare un motore elettrico agendo sulla tensione di armatura. Si assuma che il flusso magnetico Φ sia costante (come nel caso di motore in c.c. con magneti permanenti). In questo caso lo schema a blocchi risulta quello di Fig. 1.6.

E' possibile semplificare tale schema ponendo (Fig. 1.7):

$$\beta_c = \beta + k^2 \Phi^2 R_p^{-1}.$$

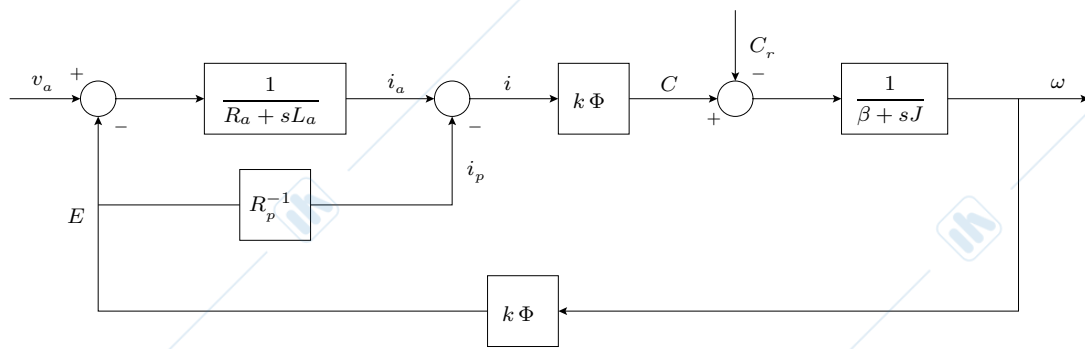


Figura 1.6: Schema a blocchi di un motore con comando in armatura.

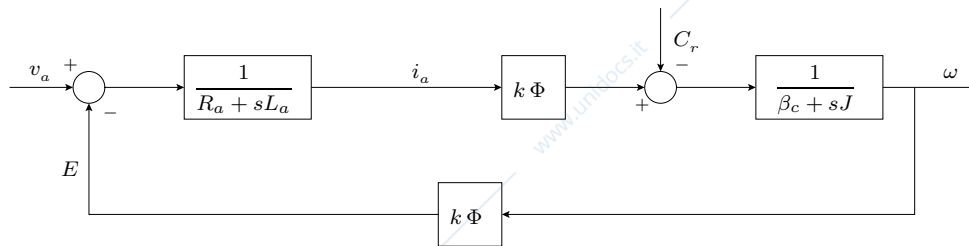


Figura 1.7: Schema a blocchi semplificato di un motore con comando in armatura.

Se la coppia C_r aumenta, cioè il motore gira più lentamente, allora si avrà un aumento della corrente di armatura I_a , che a sua volta produrrà un aumento della coppia motrice che tenderà a mantenere costante la velocità del motore (grazie alla retroazione).

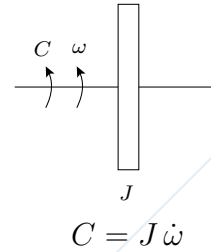
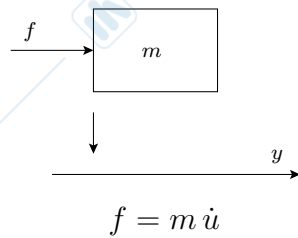
1.3 Modelli di sistemi meccanici (cenni)

In questo paragrafo sono descritti i principali modelli di sistemi meccanici, per i quali sarà utilizzata la seguente notazione:

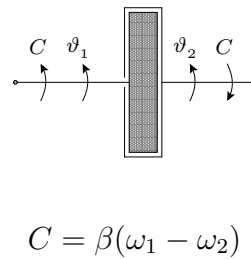
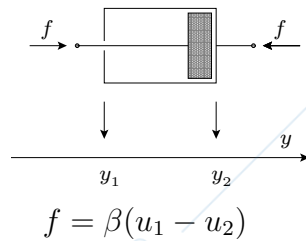
- $f = f(t)$ = forza
- $C = C(t)$ = coppia
- $y = y(t)$ = posizione lungo asse orientato
- $\theta = \theta(t)$ = posizione angolare orientata
- $u = u(t) = \dot{y}(t)$ = velocità di traslazione
- $\omega = \omega(t) = \dot{\theta}(t)$ = velocità angolare

Sistemi di riferimento inerziale

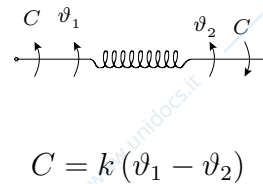
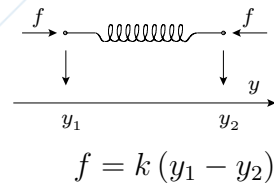
- Corpo rigido con massa prevalente.



- Ammortizzatore con attrito viscoso prevalente.

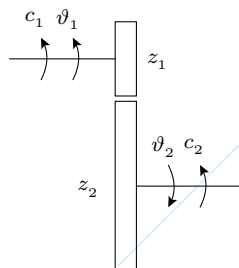


- Molla con elasticità prevalente.



Accoppiamenti cinematici

- Ruote dentate.

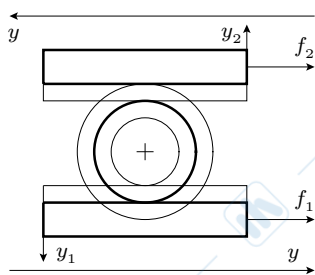


$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\vartheta_2 = \tau \vartheta_1$$

$$C_2 = \tau^{-1} C_1$$

- Meccanismo di rinvio.

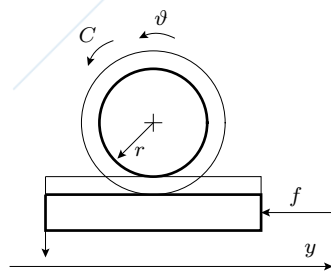


$$\tau = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y_2 = \tau y_1$$

$$f_2 = \tau^{-1} f_1$$

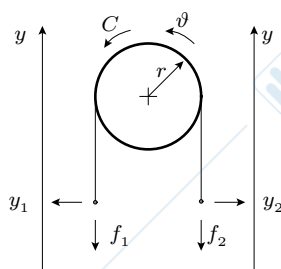
- Accoppiamento ruota - vite senza fine.



$$y = r \vartheta$$

$$f = r^{-1} C$$

- Puleggia.



$$y_2 = -y_1 = r \vartheta$$

$$f_2 - f_1 = r^{-1} C$$

Esempio 1.2

Dato il modello riportato in Fig. 1.8, vogliamo determinare la funzione di trasferimento tra la forza applicata f e la posizione della seconda massa y_2 .

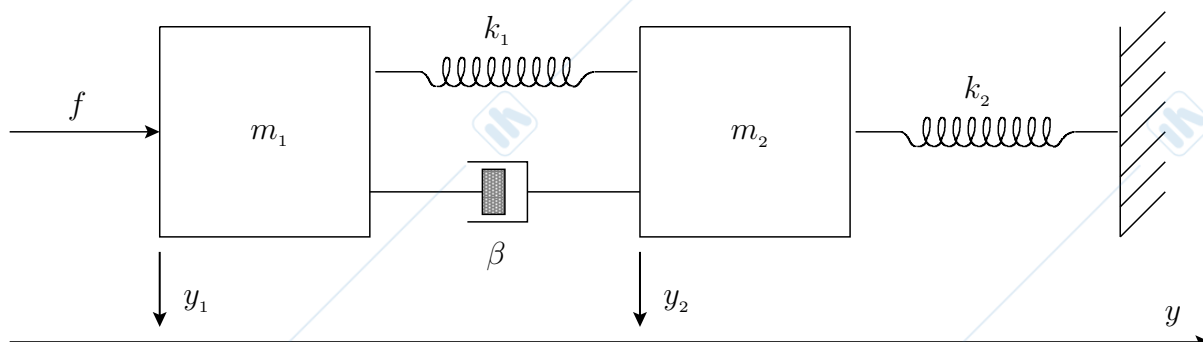


Figura 1.8: Esempio di sistema meccanico

Il modello matematico del sistema risulta determinato dalle equazioni dei componenti elementari e dalle equazioni di equilibrio dinamico:

$$\text{Massa } m_1: \quad f - k_1(y_1 - y_2) - \beta(u_1 - u_2) = m_1 \dot{u}_1 \quad (1.1)$$

$$\text{Massa } m_2: \quad k_1(y_1 - y_2) + \beta(u_1 - u_2) - k_2 y_2 = m_2 \dot{u}_2. \quad (1.2)$$

Risolvendo il sistema è possibile determinare la funzione di trasferimento desiderata:

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{\beta s + k_1}{m_1 m_2 s^4 + \beta(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2 m_1]s^2 + \beta k_2 s + k_1 k_2}$$

Vogliamo adesso trovare una rappresentazione in variabili di stato della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

dove x denota il vettore di stato ed y l'uscita di interesse.

Dalla (1.1)-(1.2) è possibile scrivere

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = m_1^{-1}[-\beta u_1 + \beta u_2 - k_1 y_1 + k_1 y_2 + f] \\ \dot{u}_2 = m_2^{-1}[\beta u_1 - \beta u_2 + k_1 y_1 - (k_1 + k_2)y_2] \\ \dot{y}_1 = u_1 \\ \dot{y}_2 = u_2 \end{cases}$$

Una possibile definizione del vettore degli stati è la seguente:

$$x = [y_1 \quad u_1 \quad y_2 \quad u_2]'$$

Le matrici A , B , C , D per la rappresentazione in variabili di stato risultano quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0.$$

E' noto che è possibile passare da una rappresentazione in variabili di stato ad una in funzione di trasferimento mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Analisi frequenziale dei sistemi lineari

2.1 Risposta impulsiva di un sistema lineare (richiami)

Definizione 2.1 *La risposta impulsiva di un sistema è la risposta che il sistema presenta allorché è applicato al suo ingresso un impulso unitario con condizioni iniziali nulle.*

E' noto che la conoscenza della risposta impulsiva permette di prevedere la risposta di un sistema lineare a qualunque ingresso. Supponiamo di conoscere l'andamento dell'ingresso dal tempo $t = 0$ al tempo $t = t_f$, e la risposta impulsiva $g(\tau)$.

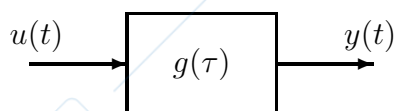


Figura 2.1: Schema a blocchi di un sistema lineare, dove $g(\tau)$ denota la risposta impulsiva del sistema.

E' noto che la risposta del sistema ad un generico istante di tempo $t = \bar{t}$ risulta data dalla convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta impulsiva, cioè:

$$y(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} g(\tau)u(\bar{t} - \tau)d\tau.$$

Questo risultato è una diretta conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti e per la sua dimostrazione si rinvia al corso di “Sistemi Dinamici” .

2.2 Metodi di rappresentazione di una funzione di trasferimento

Sia $G(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema lineare e sia $U(s)$ la trasformata di Laplace dell'ingresso. Per la proprietà della trasformata di Laplace, risulta che l'uscita è pari a:

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

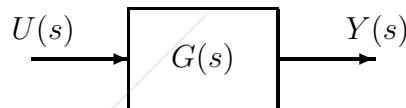


Figura 2.2: Schema a blocchi di un sistema lineare, nel dominio di Laplace.

Considerando un sistema lineare tempo invariante risulta che la $G(s)$ è data dal rapporto di due polinomi. Tale funzione di trasferimento può essere rappresentata in vari modi equivalenti.

Rappresentazione poli-zeri. Possiamo scrivere la $G(s)$ nel seguente modo:

$$G(s) = k \frac{\prod_i (s - z_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \alpha_{n_i} s + \alpha_{n_i}^2)}{\prod_j (s - p_j) \prod_j (s^2 + 2\zeta_j \omega_{n_j} s + \omega_{n_j}^2)} \quad (2.1)$$

dove p_j e z_i rappresentano poli e zeri reali, mentre $-\zeta_j \omega_{n_j} \pm j \omega_{n_j} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$ e $-\xi_i \alpha_{n_i} \pm j \alpha_{n_i} \sqrt{1 - \xi_i^2}$ denotano poli e zeri complessi coniugati.

Dalla (2.1) risulta evidente che i poli (o gli zeri) complessi coniugati sono le radici del polinomio

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

Il termine ζ viene chiamato *coefficiente di smorzamento* ($-1 < \zeta < 1$), mentre ω_n si dice *pulsazione naturale*. Facendo riferimento alla Fig. 2.3, possiamo valutare i valori dei parametri ζ e ω_n di un generico polo (o zero) complesso coniugato.

Sia $p = \sigma + j \gamma$, risulta che $\zeta = \cos \vartheta$ e $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}$.

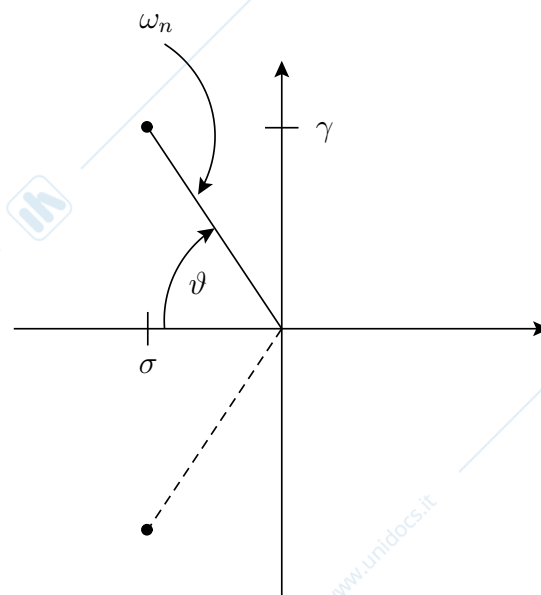


Figura 2.3: Rappresentazione di una coppia di poli (o zeri) complessi coniugati.

Forma di Bode. Una funzione $G(s)$ si dice in forma di Bode se viene messo in evidenza il guadagno di Bode k_B , ossia è della forma:

$$G(s) = \frac{k_B}{s^\nu} \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{z_i}\right) \prod_i \left(1 + \frac{2\xi_i}{\alpha_{n_i}}s + \frac{s^2}{\alpha_{n_i}^2}\right)}{\prod_j \left(1 - \frac{s}{p_j}\right) \prod_j \left(1 + \frac{2\zeta_j}{\omega_{n_j}}s + \frac{s^2}{\omega_{n_j}^2}\right)}$$

dove ν è il numero degli eventuali poli nell'origine. E' utile notare che per $s \rightarrow 0$ si ha $G(s) \rightarrow \frac{k_B}{s^\nu}$.

2.2.1 Risposta in frequenza di un sistema (richiami)

Sia data una generica funzione di trasferimento $G(s)$. Assumiamo di applicare come ingresso una sinusoide con ampiezza A e frequenza ω al sistema in quiete (condizioni iniziali nulle):

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Scriviamo la $G(s)$ mettendo in evidenza i suoi poli (eventualmente complessi)

$$G(s) = \frac{m(s)}{d(s)} = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

La risposta forzata Y_f del sistema risulterà quindi

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{A\omega m(s)}{(s^2 + \omega^2) \cdot \prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

che può essere riscritta nella forma di frazioni parziali come

$$Y_f(s) = \underbrace{\frac{k_1}{s + p_1} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n}}_{Y_f^G} + \underbrace{\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}}_{Y_f^U} = Y_f^G(s) + Y_f^U(s)$$

dove Y_f^G rappresenta la parte transitoria (dipendente dai poli di G) e Y_f^U rappresenta il regime permanente (dipendente da U). Se il sistema è stabile asintoticamente, allora:

$$y_f^G(t) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \infty.$$

Anche se assumeremo nel seguito di lavorare con sistemi stabili, da un punto di vista matematico è sempre possibile lavorare con sistemi instabili, decomponendo l'uscita in due parti e considerando solo la componente della risposta alla stessa frequenza dell'ingresso. Dal punto di vista sperimentale, se il sistema è instabile non sarà possibile determinare l'andamento a regime.

Valutiamo adesso l'espressione di $Y_f^U(s)$. Antitrasformando si ottiene

$$y_f^u(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

dove

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega).$$

Dimostriamo questo ultimo passaggio. Scrivendo $Y_f^U(s)$ in forma di frazioni parziali otteniamo

$$Y_f^U(s) = \frac{k}{s - j\omega} + \frac{k^*}{s + j\omega}$$

dove:

$$k = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s) = \frac{A\omega}{s + j\omega} G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{A\omega}{2j\omega} G(j\omega) = -j \frac{A}{2} G(j\omega).$$

Analogamente risulta:

$$k^* = j \frac{A}{2} G(-j\omega)$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\begin{aligned}
 y_f^U(t) &= -j\frac{A}{2} G(j\omega)e^{j\omega t} + j\frac{A}{2} G(-j\omega)e^{-j\omega t} \\
 &= -j\frac{A}{2} |G(j\omega)| [e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}] \\
 &= A |G(j\omega)| \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} \right] \\
 &= A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$.

Risulta quindi che:

$$|G(j\omega)| = \frac{\text{ampiezza della sinusoide in uscita}}{\text{ampiezza della sinusoide in ingresso}}$$

$\angle G(j\omega)$ = sfasamento tra la sinusoide in ingresso e quella in uscita.

La funzione $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$, ovvero gli andamenti delle due funzioni $|G(j\omega)|$ (modulo) e $\angle G(j\omega)$ (fase) rappresentano la risposta in frequenza del sistema.

Possiamo quindi riassumere il ragionamento fatto in precedenza nel seguente teorema.

Teorema 2.1 (Teorema fondamentale della risposta in frequenza)

Sia $G(s)$ una funzione di trasferimento asintoticamente stabile alla quale viene applicato un ingresso sinusoidale $u(t) = A \sin(\bar{\omega}t)$. L'uscita del sistema a regime sarà pari a

$$y^U(t) = A |G(j\bar{\omega})| \sin(\omega t + \angle G(j\bar{\omega}))$$

per qualunque condizione iniziale.

La risposta in frequenza di un sistema descrive completamente il suo comportamento. Infatti, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti e della decomponibilità dei segnali secondo l'analisi di Fourier, la risposta in frequenza permette di calcolare la risposta per qualunque ingresso $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$.

2.2.2 Diagrammi di Bode (richiami)

Come abbiamo visto in precedenza, data una funzione di trasferimento, è possibile rappresentarla nella forma di Bode. Consideriamo la risposta in frequenza $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{k_B}{(j\omega)^n} \frac{\prod(1 + j\omega\tau_i)}{\prod(1 + j\omega T_i)} \frac{\prod\left(1 + \frac{2\xi_i}{\alpha_{ni}}j\omega - \frac{\omega^2}{\alpha_{ni}^2}\right)}{\prod\left(1 + \frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_{ni}^2}\right)}$$

Un modo molto diffuso per rappresentare graficamente $G(j\omega)$ consiste nel diagrammare modulo e fase della funzione $G(j\omega)$ al variare della pulsazione ω . Si ottengono così i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$. Poiché vorremo diagrammare un ampio spettro di frequenze, utilizzeremo una scala logaritmica per quanto riguarda l'asse delle ascisse. Per lo stesso motivo, poiché il modulo della funzione $G(j\omega)$ può assumere valori molto diversi, è preferibile esprimere il modulo in *decibel*. Questo consente inoltre di semplificare il tracciamento dei diagrammi, trasformando i prodotti in somme.

Dato un valore numerico x , il suo corrispondente in decibel (dB) è:

$$x \implies 20 \log_{10}(x).$$

Se dividiamo una decade in 10 parti, spostandosi di $3/10$ (cioè una *ottava*) su tale scala si raddoppia o si dimezza il valore corrispondente, come riportato in Fig. 2.4.

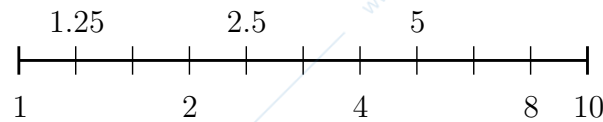


Figura 2.4: Asse delle ascisse in scala logaritmica. Rappresentazione di una *decade*.

Esempio 2.1

Sia data la funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{(s^2 + 0.5s + 1)}$.

Questa funzione presenta uno zero in -1 e due poli complessi coniugati con $\omega_n = 1$ rad/s e $\zeta = 0.25$. In Fig. 2.5 sono riportati i diagrammi di Bode di modulo e fase relativi.

Si ricordi che per un sistema "puro" del secondo ordine (con $|\zeta| < 1/\sqrt{2}$) valgono le seguenti espressioni:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad , \quad |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\zeta|\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad , \quad |G(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\zeta|}$$

Esempio 2.2 (Linea di ritardo)

Talvolta, in un sistema dinamico può essere presente un elemento di ritardo (es. un nastro trasportatore, una condotta idraulica, ecc.). Questo elemento è tale da ritardare il segnale in ingresso; una linea di ritardo di T secondi è caratterizzata dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = u(t - T).$$

La funzione di trasferimento di tale blocco è pari a $D(s) = e^{-sT}$. Il valore del modulo sarà pari a $\|e^{-j\omega T}\| = 1 = 0_{dB}$, mentre la fase sarà $\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$ radianti.

Il diagramma di Bode di un blocco di ritardo con $T = 0.5$ secondi è riportato in Fig. 2.6.

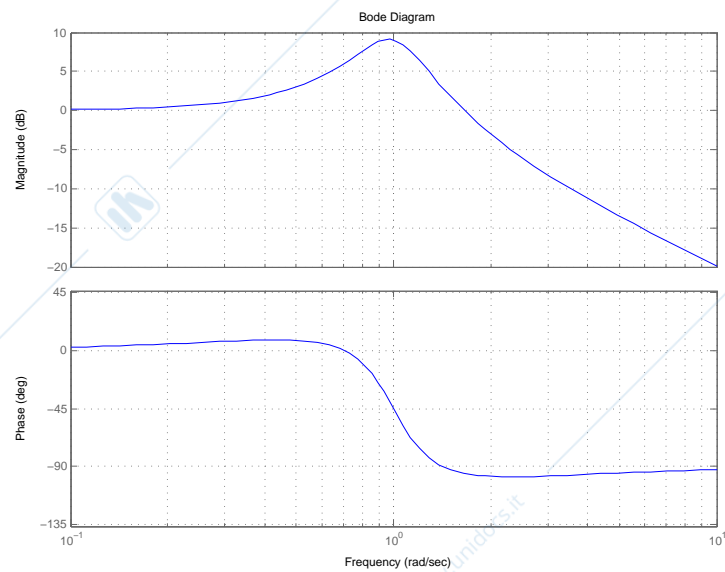


Figura 2.5: Diagramma di Bode di $G(s) = \frac{(s+1)}{(s^2+0.5s+1)}$.

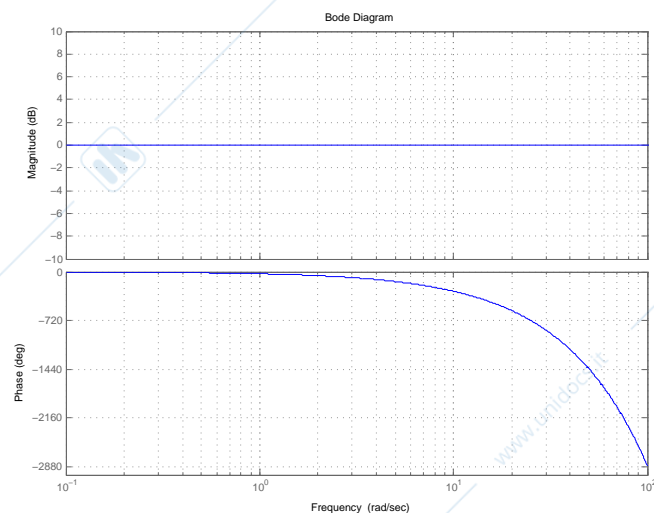


Figura 2.6: Diagramma di Bode di una linea di ritardo ($T = 0.5$).

2.2.3 Diagrammi di Nyquist

Sia data una funzione complessa di variabile complessa $G(j\omega)$. Abbiamo visto in precedenza che un possibile modo per tracciare un diagramma di tale funzione è quello di utilizzare i diagrammi di Bode, ovvero quello di rappresentare il modulo e la fase di $G(j\omega)$ al variare di ω in due grafici distinti.

Un altro possibile metodo consiste nel tracciare la parte reale e quella immaginaria di $G(j\omega)$ al variare di ω da 0 a $+\infty$ sul piano complesso. Tale grafico viene chiamato *diagramma polare*. Se tracciamo tale grafico per tutte le frequenze $\omega \in (-\infty, +\infty)$ otterremo il cosiddetto *diagramma di Nyquist*. Naturalmente, il diagramma ottenuto sarà un diagramma orientato da $\omega = -\infty$ a $\omega = +\infty$. Il diagramma che otterremo sarà sempre chiuso.

E' utile notare che, una volta tracciato il diagramma per $\omega \in [0, +\infty]$, sarà possibile disegnare anche la parte relativa alle pulsazioni negative semplicemente facendone il simmetrico rispetto all'asse reale.

Per semplificare il tracciamento di un diagramma di Nyquist è buona norma aver preventivamente tracciato il diagramma di Bode.

Un esempio di digramma di Nyquist, relativo ad una $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$ (valutata per $s = j\omega$) è riportata in Fig. 2.7.

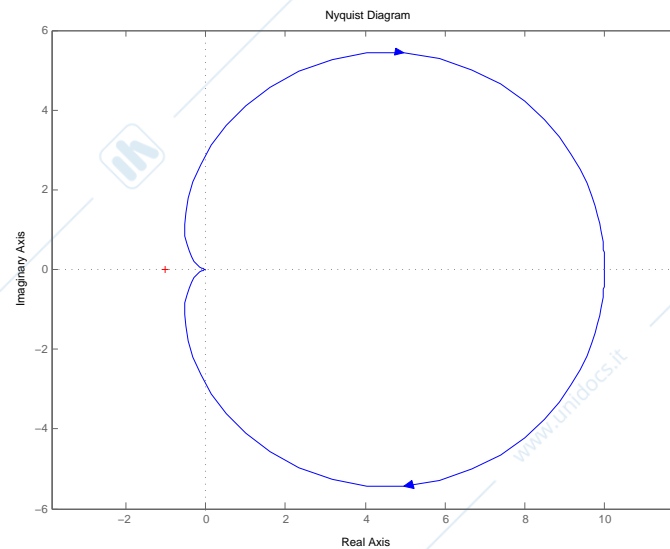


Figura 2.7: Diagramma di Nyquist di $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+10)}$.

Analizziamo adesso i diagrammi di Nyquist di alcuni semplici sistemi.

Sistema del primo ordine

Sia data una generica funzione di trasferimento del primo ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

I diagrammi di Bode e di Nyquist sono riportati in Fig. 2.8. Notare che per $\omega \rightarrow \infty$ si ha $\|G(j\omega)\| \rightarrow 0 = -\infty_{dB}$, per cui il diagramma polare termina nell'origine. Questa condizione è chiaramente soddisfatta per ogni funzione di trasferimento strettamente propria.

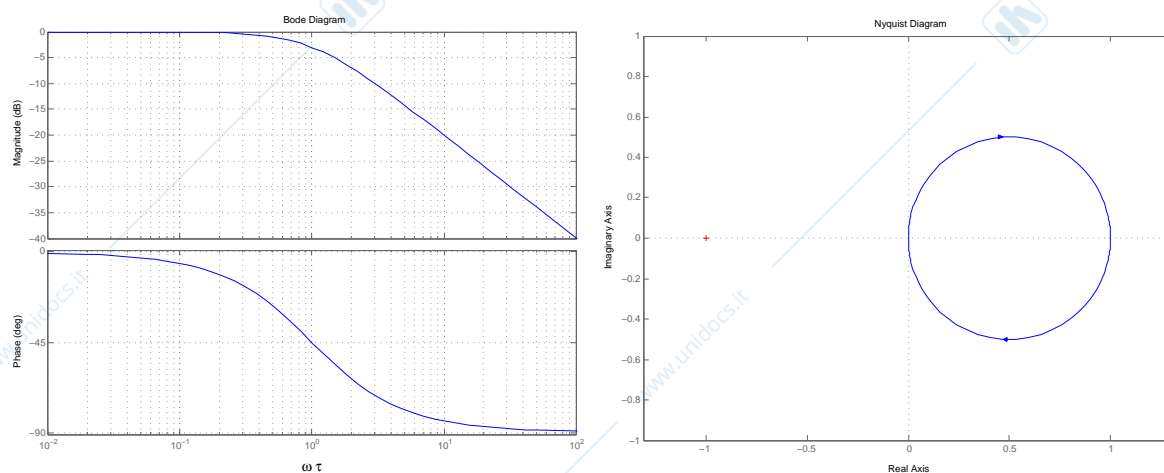


Figura 2.8: Diagramma di Bode e di Nyquist di un sistema del primo ordine.

Integratore

Un integratore è un sistema che presenta un solo polo in 0 e nessuno zero, cioè:

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad \longrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

Dovendo tracciare il grafico per $\omega \in (-\infty, +\infty)$, risulta evidente che per $\omega = 0$ si incorrerà in una divisione per 0. Per evitare questo, quando ω è prossima allo 0, possiamo sostituire il diagramma di $G(s)|_{s=j\omega}$ con quello di $G(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}}$, essendo $\rho > 0$ e sufficientemente piccolo e $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Fig. 2.9). Quindi, in prossimità dello 0, avremo

$$s = \rho e^{j\varphi} \quad \text{con} \quad \rho \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

I diagrammi di Bode e di Nyquist di un integratore sono riportati in Fig. 2.10, in cui la semicirconferenza sul diagramma di Nyquist è da intendersi all'infinito (cioè con raggio infinito), rappresentando essa il diagramma di Nyquist per $\rho \rightarrow 0$.

E' utile notare che il fenomeno di una richiusura all'infinito sarà presente tutte le volte che una funzione presenterà un polo in 0. Supponiamo infatti di avere la seguente funzione

$$G(s) = \frac{K_B \prod(1 + s\tau'_i)}{s \prod(1 + s\tau_i)}.$$

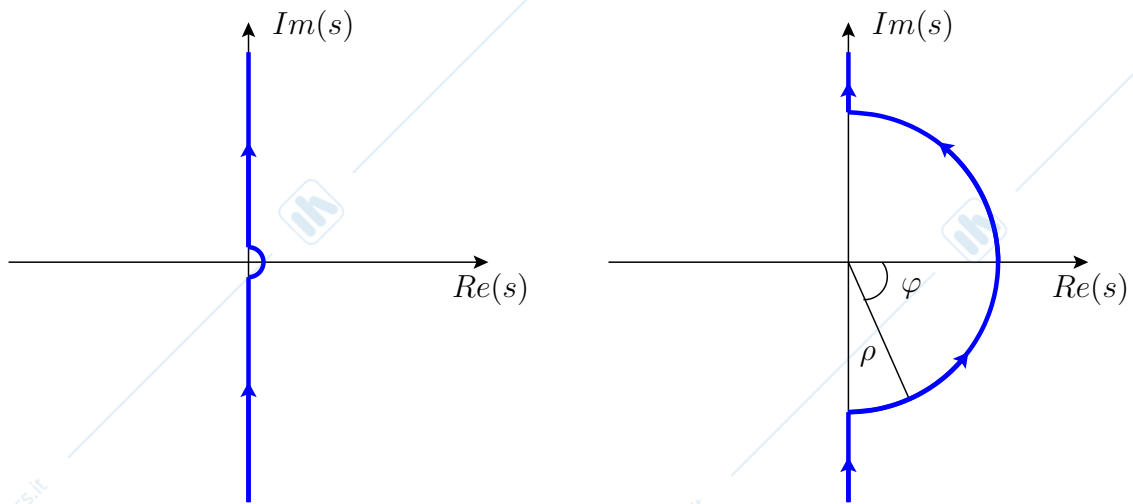


Figura 2.9: Andamento della variabile s in presenza di un polo in 0.

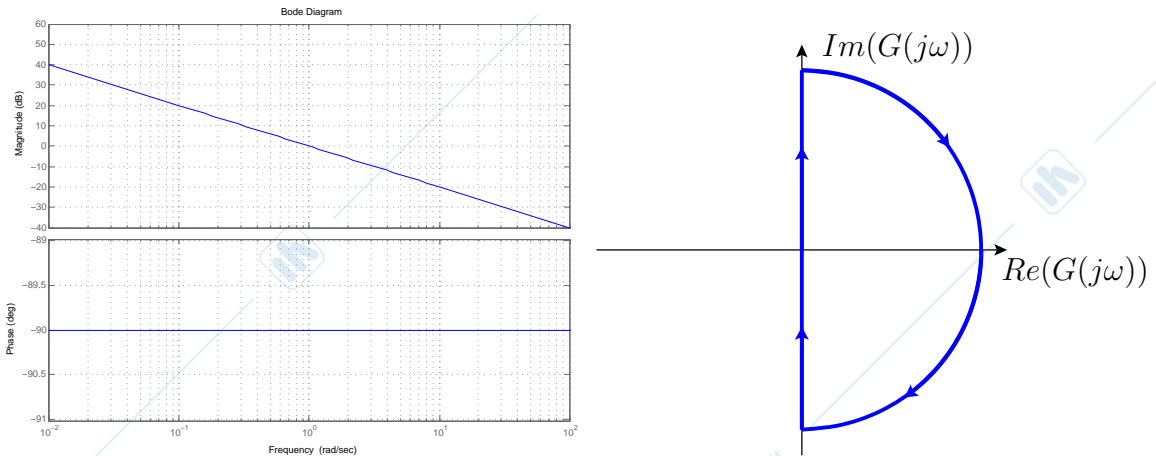


Figura 2.10: Diagramma di Bode e di Nyquist di un integratore.

E' evidente che per $s \rightarrow 0$ il termine $\frac{\prod(1+s\tau'_i)}{\prod(1+s\tau_i)} \rightarrow 1$ per cui:

$$G(s)|_{s \approx 0} = \frac{k_B}{s} \Big|_{s=\rho e^{j\varphi}} = \frac{k_B}{\rho e^{j\varphi}} = \frac{k_B}{\rho} e^{-j\varphi} \quad , \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Inoltre, è utile notare che lo stesso ragionamento si può estendere al caso in cui $G(s)$ presenti poli puramente immaginari.

Linea di ritardo

Sia data una linea di ritardo $D(s) = e^{-sT}$. Poiché il modulo di tale funzione (calcolato per $s = j\omega$) è costante e pari ad 1, il diagramma di Nyquist dovrà necessariamente essere una circonferenza di raggio unitario. Poiché la fase è monotona decrescente, tale circonferenza dovrà essere percorsa infinite volte in senso orario (Fig. 2.11).

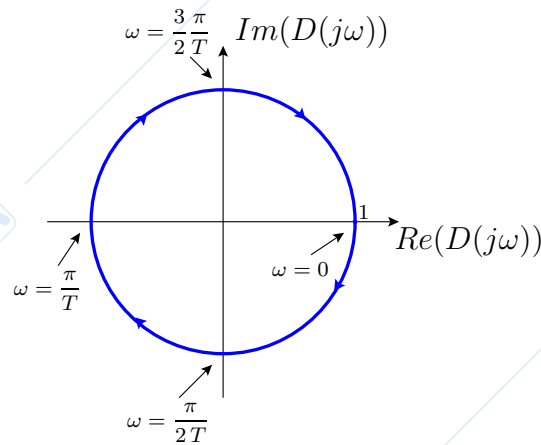


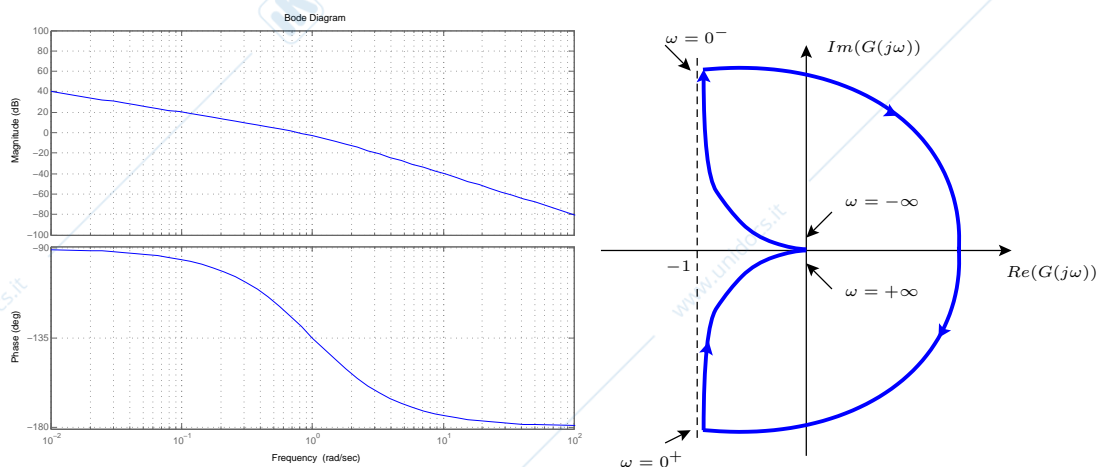
Figura 2.11: Diagramma di Nyquist di una linea di ritardo.

Esempio 2.3

Sia data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

i diagrammi di Bode e Nyquist sono riportati in Fig. 2.12.

Figura 2.12: Diagramma di Bode e di Nyquist di $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$.

E' possibile valutare la posizione dell'asintoto verticale calcolando il limite della parte reale di $G(j\omega)$ per $\omega \rightarrow 0$ che in questo caso risulta essere pari a -1 . Infatti,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}[G(j\omega)] &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{j\omega(j\omega+1)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{-\omega^2 + j\omega} \right] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\omega} \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[-\frac{\omega}{\omega(\omega^2 + 1)} \right] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\omega^2 + 1} \right] = -1. \end{aligned}$$

Esempio 2.4

Sia data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}.$$

I diagrammi di Bode e Nyquist sono riportati in Fig. 2.13. Vale la pena notare che in questo caso le richiuse all'infinito sono dovute alla presenza di 2 poli complessi coniugati lungo l'asse immaginario ($p = \pm j$). In presenza di tali poli puramente immaginari avremo sempre delle rotazioni in senso orario di 180° . Tale fenomeno è verificabile anche dai diagrammi di Bode.

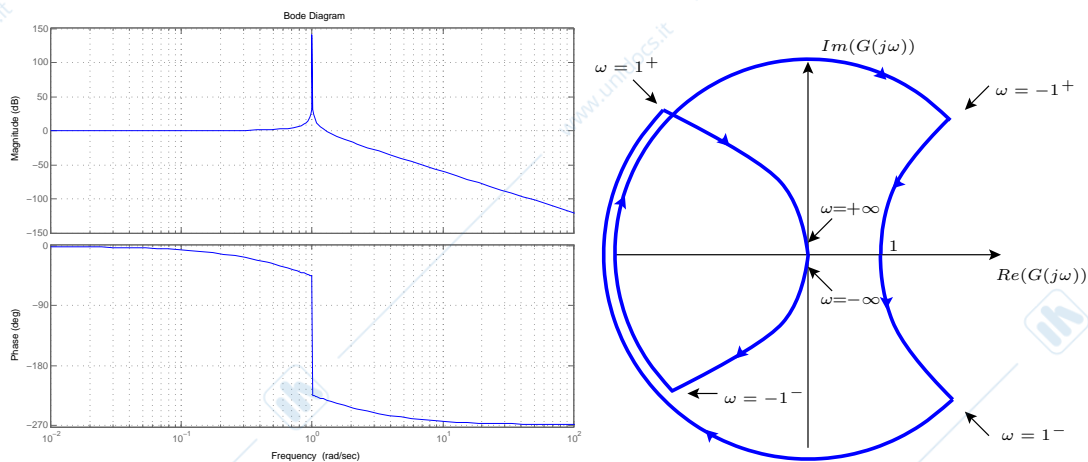


Figura 2.13: Diagramma di Bode e di Nyquist di $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

Si esprima $G(j\omega)$ evidenziando la parte reale e immaginaria, cioè $G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$. Per valutare la posizione dell'asintoto è necessario calcolare la tangente alla curva nel punto $[X(\omega), Y(\omega)]$:

$$Y - Y(\omega) = \frac{\frac{dY(\omega)}{d\omega}}{\frac{dX(\omega)}{d\omega}} [X - X(\omega)]$$

$$m = \lim_{\omega \rightarrow \omega^*} \frac{\frac{dY(\omega)}{d\omega}}{\frac{dX(\omega)}{d\omega}}$$

$$n = \lim_{\omega \rightarrow \omega^*} [Y(\omega) - m X(\omega)]$$

dove ω^* è la pulsazione per la quale il modulo vale infinito. Se questi limiti esistono, allora l'asintoto ha la seguente espressione:

$$Y = m X + n.$$

In questo esempio si ha $m = -1$, $n = 0.25$, per cui l'asintoto risulta $Y = -X + 0.25$.

Esempio 2.5

Supponiamo di avere la seguente funzione di trasferimento in cui è presente una linea di ritardo:

$$G(s) = e^{-sT} \frac{1+s}{s(1+10s)(1+0.1s)^2}.$$

Supponiamo per il momento che non sia presente il ritardo ($T = 0$). I diagrammi di Bode e Nyquist sono riportati in Fig. 2.14.

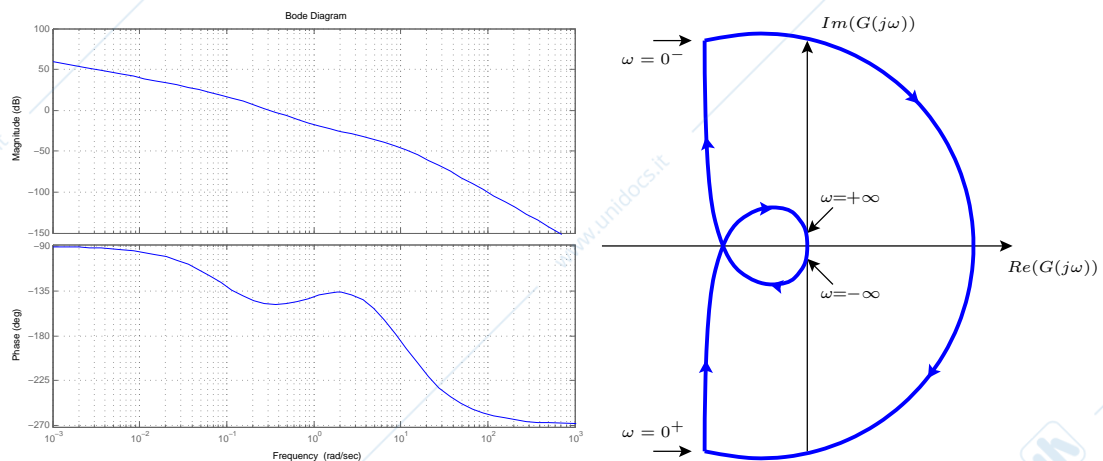


Figura 2.14: Diagramma di Bode e di Nyquist nel caso di $T = 0$.

Analizziamo adesso il caso $T \neq 0$. Come abbiamo visto nell'esempio 2.2, il modulo della $G(j\omega)$ rimane invariato, mentre la fase si riduce di un termine $\angle e^{-j\omega T} = -\omega T$. Questo provocherà nel diagramma di Nyquist una serie infinita di rotazioni orarie intorno all'origine. Il punto di attraversamento dell'asse reale tenderà a spostarsi verso sinistra.

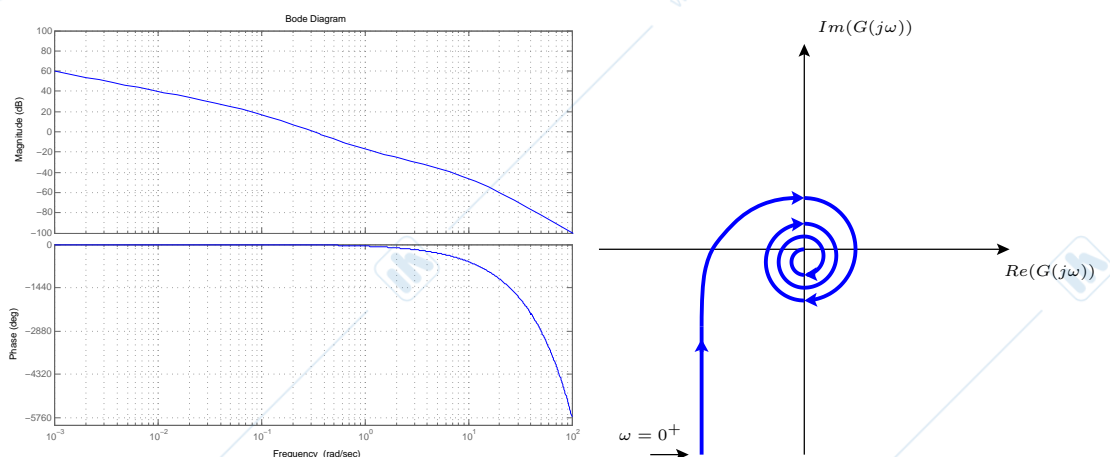


Figura 2.15: Diagramma di Bode e di Nyquist ($\omega \in (0, +\infty)$) nel caso di $T = 1$ secondo.

2.2.4 Diagrammi di Nichols

Abbiamo visto che data una generica funzione di trasferimento $G(j\omega)$ è possibile rappresentarla mediante i diagrammi di Bode (modulo e fase) e quelli di Nyquist (parte reale ed immaginaria). Un ulteriore metodo è quello di utilizzare i diagrammi di Nichols, che consistono nel rappresentare modulo e fase su un unico diagramma al variare della pulsazione. In particolare riporteremo in ascissa la fase ed in ordinata il modulo espresso in decibel.

In Fig. 2.16 e 2.17 sono riportati alcuni esempi di diagrammi di Nichols.

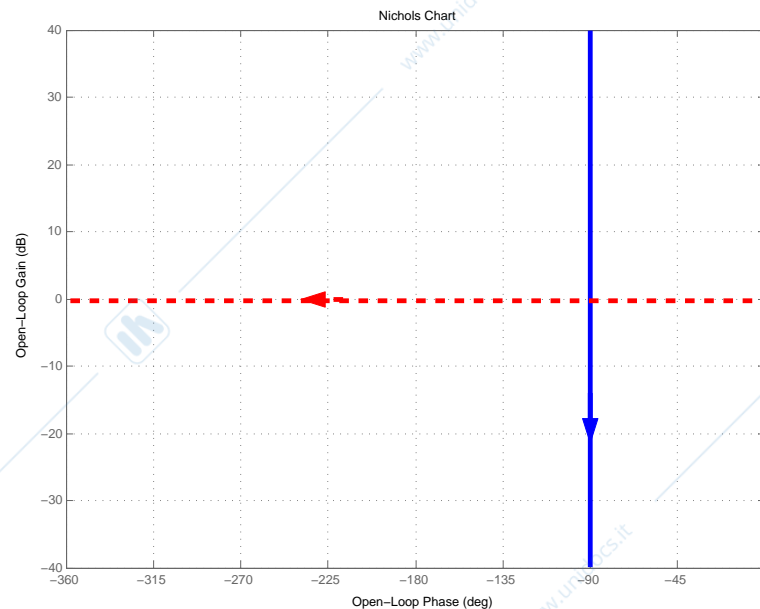


Figura 2.16: Diagramma di Nichols di un integratore (—) e di un elemento di ritardo (---).

2.3 Sistemi a minima rotazione di fase

Definizione 2.2 Una funzione di trasferimento $G(s)$ si dice a minima rotazione di fase se ha guadagno positivo e non ha zeri e poli nel semipiano destro del piano s .

E' immediato verificare che data una funzione di trasferimento a non minima rotazione di fase, sarà sempre possibile scomporla come la cascata di una funzione a minima rotazione

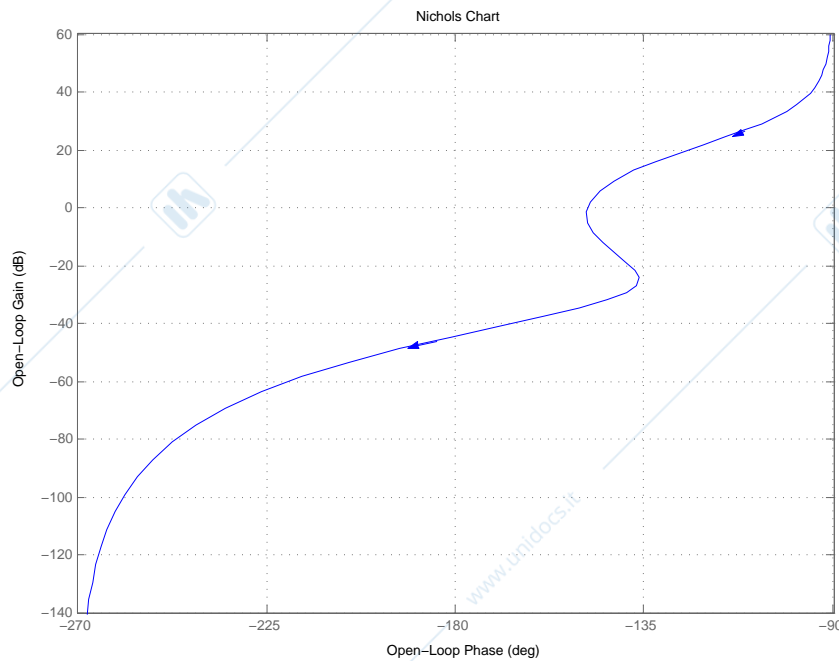


Figura 2.17: Diagramma di Nichols di $G(s) = \frac{1+s}{s(1+10s)(1+0.1s)^2}$.

di fase ed un filtro *passa-tutto* (*all-pass*). Ad esempio:

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+2s)(1+10s)} = \underbrace{\frac{1+s}{(1+2s)(1+10s)}}_{\text{minima rotazione}} \underbrace{\frac{1-s}{1+s}}_{\text{passa-tutto}}.$$

In Fig. 2.18 è riportato il diagramma di Bode di un filtro passa-tutto; notare che il modulo di tale funzione è costante e pari a 0 dB.

2.3.1 La formula di Bode

Sia data una $G(s)$ a minima rotazione di fase (ovvero tutti gli zeri e i poli hanno parte reale ≤ 0 , e con guadagno positivo). Definiamo:

- $\Omega \triangleq \ln \omega$
- $M(\omega) \triangleq \ln |G(j\omega)|$
- $\varphi(\omega) \triangleq \angle G(j\omega)$

Allora vale la seguente relazione (formula di Bode):

$$\varphi(\Omega_0) = \frac{\pi}{2} \left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} - \left. \frac{dM}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} \right] \ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{\Omega - \Omega_0}{2} \right| d\Omega. \quad (2.3)$$

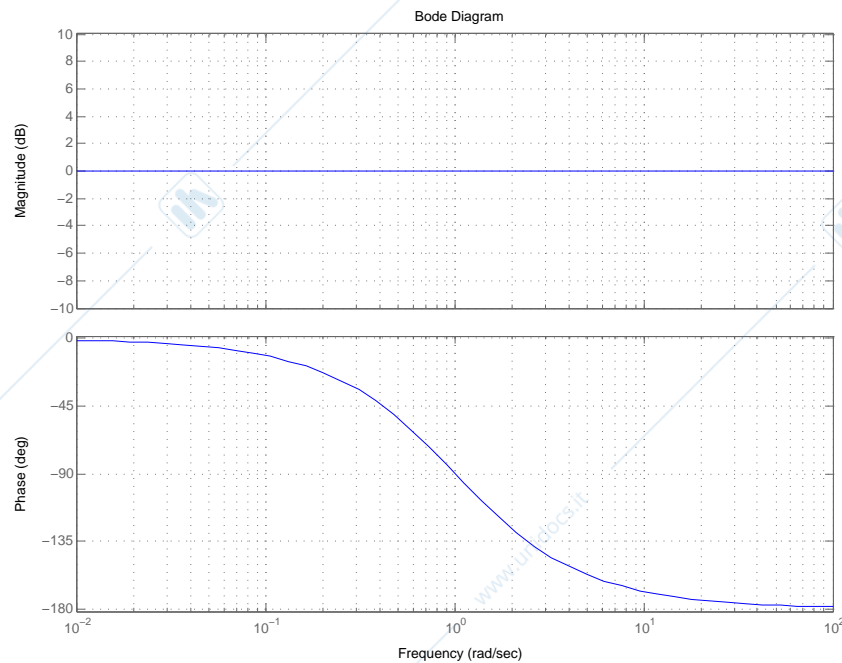


Figura 2.18: Diagramma di Bode di un filtro passa-tutto ($z = 1$).

La formula di Bode, sotto le ipotesi date, permette di calcolare il valore della fase di $G(j\omega)$ ad una frequenza generica Ω_0 a partire dal diagramma di modulo. Essa è ottenuta dalla somma di due termini:

- il primo, multiplo di $\frac{\pi}{2}$, dipende dalla pendenza del diagramma di modulo alla frequenza data ($0, \pm 1, \pm 2, \dots$);
- il secondo dipende dagli scarti di pendenza del diagramma di modulo tra la frequenza Ω_0 e tutte le altre frequenze, pesati dalla funzione $\ln \operatorname{cotgh} \left| \frac{\Omega - \Omega_0}{2} \right|$. Ricordiamo che
$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

La funzione di peso, il cui grafico è riportato in Fig. 2.19, è tale da ridurre drasticamente il contributo delle frequenze molto diverse da Ω_0 . Questo significa che la fase di $G(j\omega)$ alle frequenze lontane dai punti di rottura del diagramma di modulo dipenderà solamente dal primo termine di (2.3).

Dunque, la pendenza del diagramma di modulo ci consentirà di valutare la fase di $G(j\omega)$ ad una data frequenza, purché questa sia abbastanza lontana dalle frequenze di rottura relative a zeri e poli; in caso contrario sarà necessario correggere tale valore considerando anche il secondo termine di (2.3).

Ricordiamo che la formula di Bode non vale per sistemi a non minima rotazione di fase.

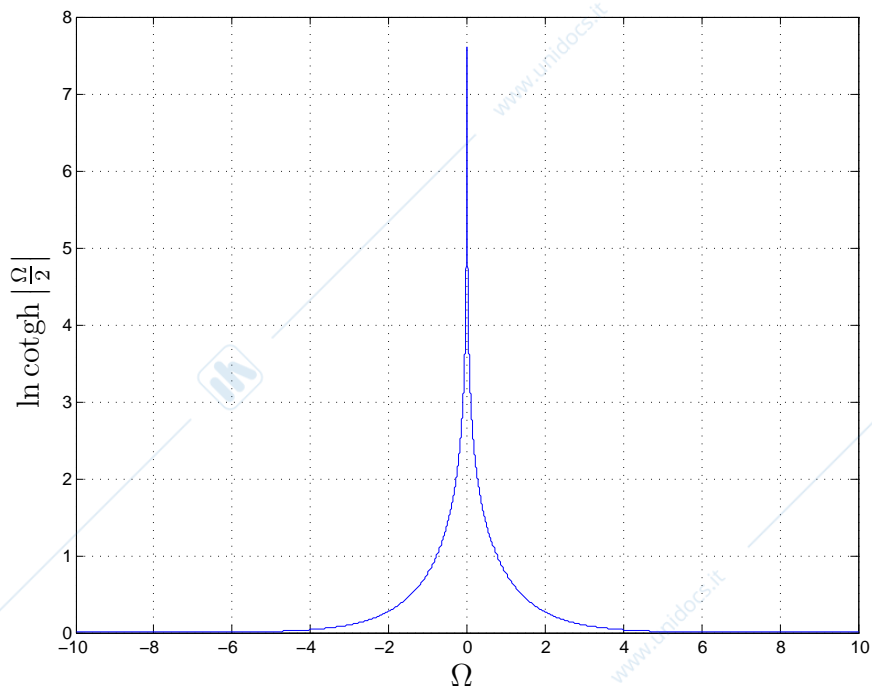


Figura 2.19: Grafico della funzione di peso (per $\Omega_0 = 0$).

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Criteri di stabilità

3.1 Il concetto di stabilità

Il concetto di *stabilità* è piuttosto generale e può essere definito in diversi contesti. Per i problemi di interesse nell'area dei controlli automatici, si fa sempre esplicito riferimento alla stabilità di un punto di equilibrio di un sistema dinamico.

3.1.1 Stabilità di un punto di equilibrio

Sia dato un sistema dinamico tempo continuo, rappresentato in variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$.

Si definisce *punto di equilibrio* un punto dello spazio di stato nel quale il sistema permane in uno stato di quiete (una volta fissato un ingresso costante U), cioè, tale per cui:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), U) = 0.$$

Definizione 3.1 Sia x_e un punto di equilibrio. Esso si dirà localmente stabile (alla Lyapunov), se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \longrightarrow \|x(t, x_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t > 0.$$

Questo significa che, partendo da una condizione iniziale x_0 “vicina” ad un punto di equilibrio localmente stabile x_e , la traiettoria seguita dal sistema non si allontana mai più di ε da x_e (Fig. 3.1).

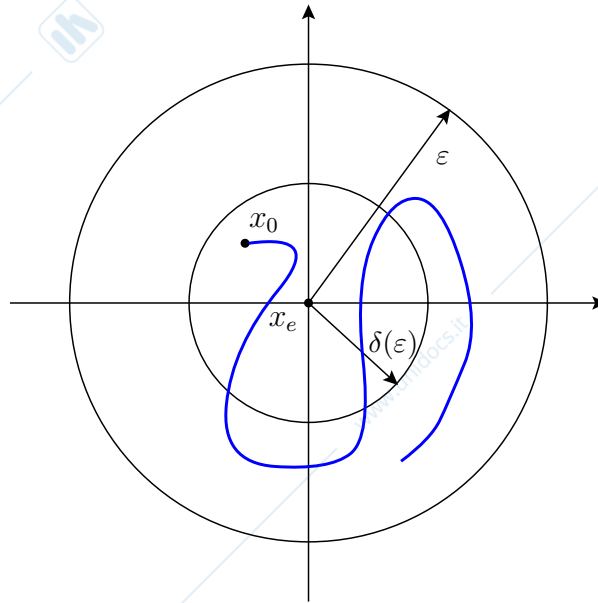


Figura 3.1: Interpretazione grafica del concetto di stabilità locale di un punto di equilibrio.

Per un sistema lineare la stabilità locale implica quella globale, ovvero, la condizione sopra enunciata se vale per un x_0 , allora sarà valida per ogni scelta di x_0 .

Definizione 3.2 Sia x_e un punto di equilibrio. Esso si dirà asintoticamente stabile, se è stabile ed inoltre:

$$\exists \delta_a > 0 : \|x_0 - x_e\| \leq \delta_a \quad \longrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - x_e\| = 0.$$

3.2 Stabilità ingresso limitato - uscita limitata

Un sistema dinamico si dice BIBO stabile (bounded input - bounded output), o ILUL stabile (ingresso limitato - uscita limitata), se ad ogni segnale in ingresso di ampiezza limitata corrisponde un'uscita anch'essa limitata, cioè:

$$\exists U, Y < +\infty : \forall u : |u(t)| \leq U, \forall t \geq 0 \quad \longrightarrow \quad |y(t)| \leq Y, \forall t \geq 0.$$

Per i sistemi lineari e stazionari vale il seguente teorema:

Teorema 3.1 (Stabilità BIBO per sistemi lineari)

Un sistema lineare è stabile in senso BIBO se e solo se:

$$\int_0^{+\infty} |g(\tau)| d\tau < \infty$$

dove $g(\tau)$ denota la risposta impulsiva del sistema.

Dimostrazione.

(Sufficienza “ \Leftarrow ”). Si assuma che $\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = M < \infty$. Allora,

$$|y(t)| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) u(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\infty} |g(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq U \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = UM < \infty.$$

(Necessarietà “ \Rightarrow ”). Assumiamo che $\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \infty$. Vogliamo provare che $\exists u$ limitato tale che $y(t)$ è illimitata. Sia

$$u_{\tilde{t}}(\tau) = \begin{cases} \operatorname{sgn}[g(\tilde{t}-\tau)] & 0 \leq \tau \leq \tilde{t} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

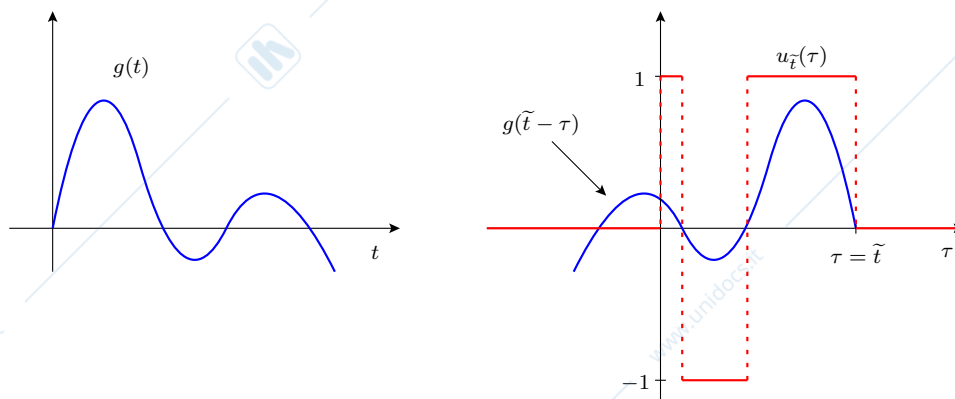


Figura 3.2: Esempio di funzioni $g(t)$ e $u_{\tilde{t}}(\tau)$.

Risulta quindi che

$$y_{\tilde{t}}(t) = \int_0^t g(t-\tau) u_{\tilde{t}}(\tau) d\tau = \int_0^{\tilde{t}} g(t-\tau) \operatorname{sgn}[g(\tilde{t}-\tau)] d\tau.$$

Calcoliamo l'uscita all'istante $t = \tilde{t}$:

$$y_{\tilde{t}}(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} |g(\tilde{t}-\tau)| d\tau$$

e quindi per l'ipotesi fatta l'uscita diverge per $\tilde{t} \rightarrow \infty$. □

Il precedente teorema afferma quindi che un sistema lineare è BIBO stabile se e solo se la risposta impulsiva è a modulo sommabile.

Osservazione: per i sistemi lineari tempo invarianti la stabilità BIBO coincide con la stabilità asintotica. Come già precedentemente studiato, un sistema lineare tempo invariante è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi poli sono a parte reale strettamente negativa. Un sistema si dice *marginamente stabile* se i suoi poli sono a parte reale negativa e quelli a parte reale nulla non sono multipli. Il termine “marginamente” deriva dal fatto che per tali sistemi alcuni ingressi limitati producono un’uscita anch’essa limitata, mentre altri ingressi limitati producono un’uscita illimitata.

3.3 Criteri di stabilità per polinomi

Poiché la stabilità di un sistema lineare è diretta conseguenza della posizione dei suoi poli nel piano complesso, risulta evidente l’importanza di poter determinare in quale semipiano sono posizionate le radici di un polinomio (ovvero del denominatore della funzione di trasferimento).

I metodi che analizzeremo saranno in grado di fornire informazioni sul numero delle radici a parte reale positiva, negativa o nulla di un polinomio (non forniranno informazioni circa la loro posizione esatta nel piano complesso).

3.3.1 Criterio di Routh

Sia dato un generico polinomio:

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0.$$

Risulta evidente che tale polinomio può essere scomposto nella somma di due polinomi, uno contenente le potenze pari ed uno quelle dispari, cioè:

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \underbrace{s^n + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-4} s^{n-4} + \dots}_{Q_n(s)} + \underbrace{a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-5} s^{n-5} + \dots}_{Q_{n-1}(s)} \\ &= Q_n(s) + Q_{n-1}(s). \end{aligned}$$

A questo punto, effettuiamo le seguenti divisioni successive:

$$\frac{Q_n(s)}{Q_{n-1}(s)} = q_{n-1} s + \frac{Q_{n-2}(s)}{Q_{n-1}(s)}$$

$$\frac{Q_{n-1}(s)}{Q_{n-2}(s)} = q_{n-2}s + \frac{Q_{n-3}(s)}{Q_{n-2}(s)}$$

...

Queste divisioni si possono reiterare finché non si ottiene un polinomio di grado 0 (costante). Poiché $Q_i(s)$ è formato solo da potenze pari (se i è pari) o solo dispari (se i è dispari), possiamo utilizzare la seguente notazione:

$$Q_i(s) = \sum_j \alpha_{i,j} s^j$$

dove l'indice j assume i valori $i, i-2, i-4, \dots$ fino a 0 se i è pari, o fino ad 1 se i è dispari. Inoltre, assumeremo che

$$\begin{aligned} \alpha_{n,j} &= a_j && \text{per } j = n, n-2, n-4, \dots \\ \alpha_{n-1,j} &= a_j && \text{per } j = n-1, n-3, n-5, \dots \end{aligned}$$

Gli elementi $\alpha_{i,j}$ disposti opportunamente costituiscono quella che si chiama Tabella di Routh (Tab. 3.1). Vale il seguente teorema:

Teorema 3.2 (*Criterio di Routh*)

Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici di un polinomio siano a parte reale minore di zero, è che gli $\alpha_{i,i}$ siano strettamente dello stesso segno per tutti i valori di i da 0 a n . Ogni variazione di segno corrisponde ad una radice a parte reale positiva.

n	$\alpha_{n,n}$	$\alpha_{n,n-2}$	$\alpha_{n,n-4}$	\dots
$n-1$	$\alpha_{n-1,n-1}$	$\alpha_{n-1,n-3}$	$\alpha_{n-1,n-5}$	\dots
$n-2$	$\alpha_{n-2,n-2}$	$\alpha_{n-2,n-4}$	$\alpha_{n-2,n-6}$	\dots
$n-3$	$\alpha_{n-3,n-3}$	$\alpha_{n-3,n-5}$	$\alpha_{n-3,n-7}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
2	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{2,0}$		
1	$\alpha_{1,1}$			
0	$\alpha_{0,0}$			

Tabella 3.1: Tabella di Routh.

E' possibile calcolare gli elementi di ciascuna riga a partire da quelli delle due righe precedenti (purché la seconda di queste non inizi con un elemento nullo), utilizzando la

formula:

$$\alpha_{i,j} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_{i+2,i+2} & \alpha_{i+2,j} \\ \alpha_{i+1,i+1} & \alpha_{i+1,j-1} \end{vmatrix}}{\alpha_{i+1,i+1}} = \alpha_{i+2,j} - \frac{\alpha_{i+2,i+2} \alpha_{i+1,j-1}}{\alpha_{i+1,i+1}}$$

che corrispondono ai coefficienti del polinomio resto della divisione di Q_{i+2} per Q_{i+1} .

Durante la costruzione della tabella è possibile moltiplicare tutti gli elementi di una riga per un termine positivo, senza che questo comprometta la validità del Teorema 3.2.

Esempio 3.1

Sia dato il sistema di Fig. 3.3, in cui:

$$G(S) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)(s + 4)}.$$

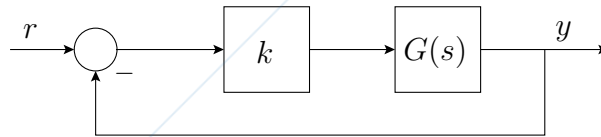


Figura 3.3: Esempio di sistema in retroazione con guadagno variabile.

Vogliamo determinare i valori di k che rendono stabile il sistema ad anello chiuso. La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta:

$$T(s) = \frac{k G(s)}{1 + k G(s)}.$$

Per determinare la stabilità è necessario determinare la posizione delle radici del polinomio caratteristico del sistema, cioè:

$$s(s^2 + s + 1)(s + 4) + k = 0$$

ovvero:

$$s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + k = 0.$$

La tabella di Routh risulta:

4	1	5	k
3	5	4	0
2	$\frac{21}{5}$	k	0
1	$\frac{84-25k}{21}$	0	
0	k		

Per avere stabilità, tutti gli elementi della prima colonna devono essere concordi di segno, che in questo caso significa maggiori di zero. Affinché questo sia verificato è necessario che:

$$\frac{84 - 25k}{21} > 0 \quad \longrightarrow \quad k < \frac{84}{25}$$

e

$$k > 0$$

per cui i valori di k che stabilizzano il sistema sono tutti e soli quelli appartenenti al seguente intervallo:

$$0 < k < \frac{84}{25}.$$

Casi critici.

Durante la compilazione della tabella di Routh è possibile incorrere nei seguenti casi critici:

- Il primo termine di una riga è nullo.

In questo caso la costruzione della tabella non può proseguire in quanto si incorrerebbe in una divisione per zero. Una possibile soluzione è quella di sostituire al posto dell'elemento nullo il valore $+\varepsilon$ o $-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ infinitesimo) e proseguire con la costruzione della tabella. Le variazioni di segno degli elementi in prima colonna non subiranno modifiche per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Un metodo alternativo è quello di moltiplicare il polinomio originale per un polinomio del primo ordine, come ad esempio $(s + 1)$ e ricostruire la tabella, tenendo presente l'aggiunta fittizia di una radice stabile al polinomio di partenza.

- Tutti i termini di una riga sono nulli.

Questa condizione si può verificare solo nelle righe di indice dispari. Supponiamo che tale indice sia $2m - 1$. Osservando le variazioni di segno degli elementi in prima colonna fino alla riga $2m$, è possibile stabilire il segno delle prime $n - 2m$ radici nel modo usuale.

Rimangono adesso da valutare i segni delle restanti $2m$ radici, che si può dimostrare debbano necessariamente essere simmetriche rispetto all'origine.

E' possibile proseguire con la costruzione della tabella considerando la riga immediatamente precedente a quella con tutti zeri (considerando cioè la riga $2m$) e scrivendola come:

$$b_{2m} s^{2m} + b_{2m-2} s^{2m-2} + \dots + b_0 = 0. \quad (3.1)$$

A questo punto effettuiamo la derivata della (3.1), inseriamo i coefficienti ottenuti nella riga $2m-1$ e proseguiamo con la costruzione della tabella. Osserviamo quindi le variazioni di segno degli elementi della prima colonna a partire dalla riga $2m-1$. In questo caso, il numero di variazioni di segno che si verificano coincide con il numero di radici a parte reale strettamente positiva. Per simmetria, ci saranno altrettante radici a parte reale negativa. Eventuali radici eccedenti saranno necessariamente a parte reale nulla (cioè puramente immaginarie).

In entrambi i casi precedenti, si può concludere immediatamente che il polinomio non è stabile. L'ulteriore costruzione della tabella serve solo per localizzare esattamente il numero di radici a parte reale positiva o negativa.

Osservazione: se nella costruzione della tabella di Routh appare un coefficiente nullo o negativo in una qualunque posizione, possiamo immediatamente concludere che il polinomio non è stabile.

3.3.2 Criterio di Michailov

Il criterio di Michailov fornisce un metodo grafico per la determinazione delle posizioni delle radici di un polinomio. Sia dato il seguente polinomio:

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Fissando $s = j\omega$ si ottiene

$$P_n(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = \prod_{i=1}^n (j\omega - p_i). \quad (3.2)$$

Possiamo decomporre tale polinomio nella sua parte reale ed immaginaria, cioè:

$$P_n(j\omega) = \underbrace{(a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \dots)}_{\text{Re}(P_n(j\omega))} + j \underbrace{(\omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \dots)}_{\text{Im}(P_n(j\omega))}$$

Sarà quindi possibile tracciare il diagramma polare di $P(j\omega)$, che sarà alla base del criterio di Michailov. Un esempio di diagramma è riportato in Fig. 3.4.

Teorema 3.3 (Criterio di Michailov)

Un polinomio $P_n(s)$ è asintoticamente stabile se e solo se:

1. il diagramma polare di $P_n(j\omega)$ non attraversa l'origine;
2. tale diagramma compie una rotazione di fase antioraria pari a $\frac{n\pi}{2}$ per $\omega \in [0, +\infty)$.

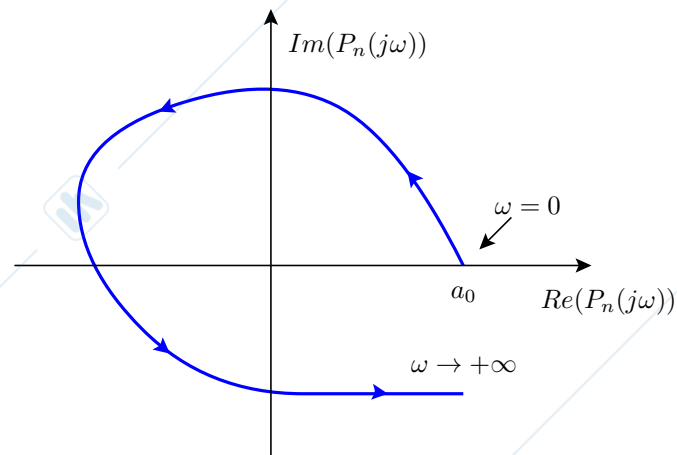


Figura 3.4: Esempio di diagramma polare di un polinomio.

Dimostrazione.

Dalla (3.2) si ricava che

$$\Delta \angle P_n \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \sum_{i=1}^n \Delta \angle (j\omega - p_i) \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (3.3)$$

Consideriamo la posizione delle radici del polinomio sul piano complesso (Fig. 3.5). E' evidente che la variazione di fase in (3.3) corrispondente alle radici stabili per una variazione di frequenza da $-\infty$ a $+\infty$ risulta pari a $+\pi$ (rotazione antioraria). Analogamente, le radici instabili produrranno una variazione pari a $-\pi$. Dunque, supponendo di avere

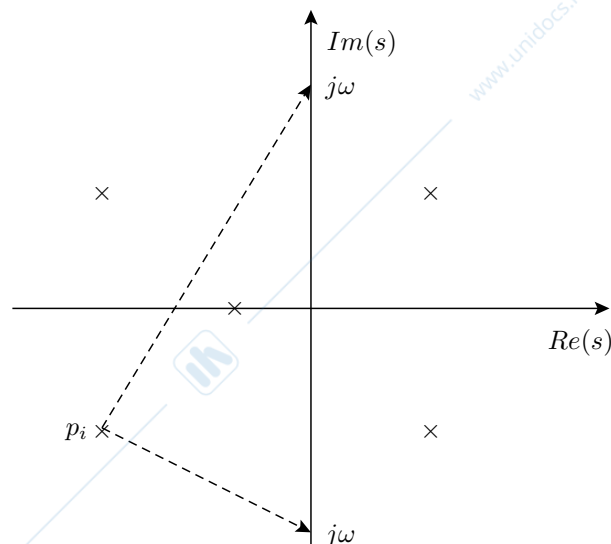


Figura 3.5: Variazione di fase di una radice stabile.

n_i radici instabili e $(n - n_i)$ radici stabili, avremo:

$$\Delta \angle P_n \Big|_{-\infty}^{+\infty} = (n - n_i)\pi - n_i\pi = (n - 2n_i)\pi.$$

Considerando adesso la variazione di fase tra 0 e $+\infty$, risulterà:

$$\Delta \angle P_n \Big|_0^{+\infty} = (n - 2n_i)\frac{\pi}{2}$$

e quindi, affinché il polinomio sia stabile (cioè $n_i = 0$), dovrà essere: $\Delta \angle P_n \Big|_0^{+\infty} = n\frac{\pi}{2}$. \square

Osservazione: il criterio di Michailov afferma che un polinomio di ordine n è stabile se e solo se il suo diagramma polare per $\omega \in [0, +\infty)$ non passa per l'origine ed attraversa esattamente n quadranti.

Osservazione: condizione necessaria per la stabilità è che la fase di $P_n(j\omega)$ sia monotonicamente crescente per $\omega \in [0, +\infty)$.

3.3.3 Criterio di Hermite-Biehler

Un altro criterio grafico per la stabilità di un polinomio è quello di Hermite-Biehler. Anche in questo caso possiamo scomporre il polinomio nella sua parte reale ed immaginaria, ossia:

$$P_n(j\omega) = \underbrace{\text{Re}(P_n(j\omega))}_{R(\omega)} + j \underbrace{\text{Im}(P_n(j\omega))}_{I(\omega)}.$$

Possiamo ora tracciare $R(\omega)$ e $I(\omega)$ al variare di ω (sullo stesso grafico), come riportato in Fig. 3.6.

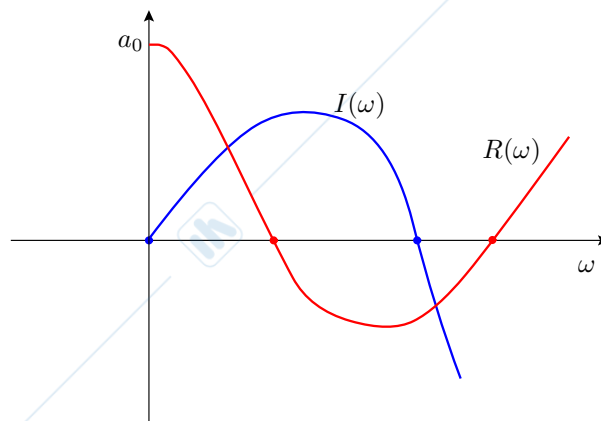


Figura 3.6: Grafico per l'applicazione del criterio di Hermite-Biehler.

Teorema 3.4 (*Criterio di Hermite-Biehler*)

Siano $R(\omega)$ e $I(\omega)$ la parte reale ed immaginaria di un generico polinomio $P_n(j\omega)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché questo polinomio abbia radici a parte reale strettamente negativa è che $R(\omega)$ e $I(\omega)$ presentino zeri reali "interallacciati" (cioè alternati), e che il numero totale di zeri delle due funzioni per $\omega \in [0, +\infty)$ sia pari ad n .

E' immediato verificare che il criterio di Hermite-Biehler può essere facilmente dimostrato mediante il criterio di Michailov.

3.4 Criteri di stabilità ad anello chiuso

In questo paragrafo analizzeremo i criteri di stabilità grafici per sistemi ad anello chiuso (in retroazione). E' da notare che l'uso del criterio algebrico di Routh, così come evidenziato nell'esempio 3.1, è di utilizzo immediato a questo fine. In particolare faremo riferimento allo schema in retroazione unitaria riportato in Fig. 3.7.

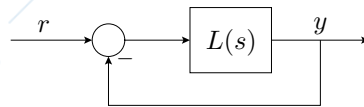


Figura 3.7: Schema in retroazione utilizzato per l'applicazione dei vari criteri di stabilità.

E' possibile verificare che uno schema in retroazione non unitaria è riconducibile ad uno schema in retroazione unitaria con le stesse proprietà di stabilità.

Esempio 3.2

Sia dato il sistema in Fig. 3.8 ed il suo equivalente in Fig. 3.9. Risulta che la funzione di trasferimento ad anello chiuso è:

$$\bar{G}(s) = \frac{GH}{1+GH} \cdot \frac{1}{H} = \frac{G}{1+GH}.$$

Assumendo $L \triangleq GH$, la funzione di trasferimento equivalente (riferita allo schema di Fig. 3.7) risulta:

$$\tilde{G}(s) = \frac{L}{1+L} = \frac{GH}{1+GH},$$

che presenta gli stessi poli di $\bar{G}(s)$. Tale funzione può quindi essere utilizzata per lo studio della stabilità al posto di $\bar{G}(s)$.

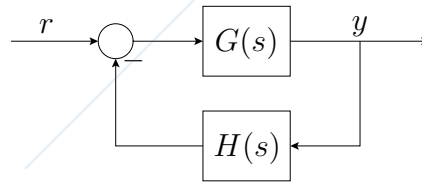


Figura 3.8: Schema in retroazione per l'esempio 3.2.

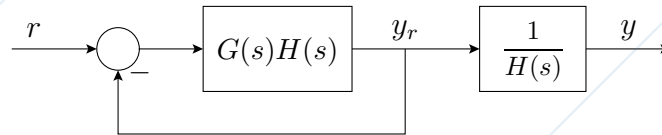


Figura 3.9: Schema in retroazione equivalente per l'esempio 3.2.

3.4.1 Criterio di stabilità di Nyquist

Il criterio di stabilità di Nyquist consente di determinare la stabilità dell'anello chiuso analizzando il diagramma di Nyquist della funzione ad anello aperto. Al fine di poter enunciare questo criterio, è necessario introdurre il cosiddetto *principio dell'argomento* (o *lemma di Cauchy*).

Principio dell'argomento (Lemma di Cauchy):

Sia data una generica funzione di variabile complessa $F(s)$; supponiamo di poter scrivere questa funzione come:

$$F(s) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}.$$

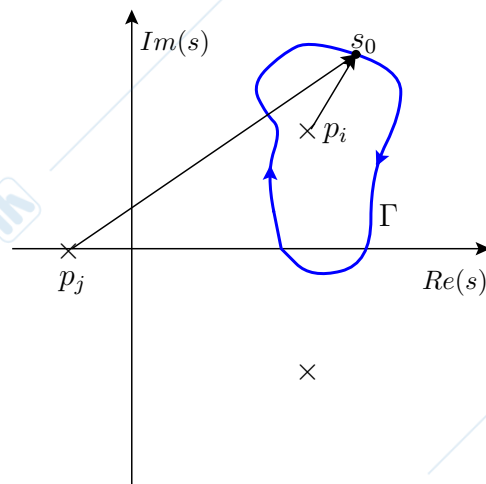
Sia Γ una qualunque curva chiusa nel piano $[s]$ percorsa in senso orario che non passa né per i poli, né per gli zeri di $F(s)$. Analizzando la fase di $F(s)$ risulta che:

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i). \quad (3.4)$$

Supponiamo adesso di far percorrere alla variabile complessa s la curva chiusa Γ in senso orario, ed andiamo a valutare la variazione di fase di $F(s)$, indicata con $\Delta \angle F(s)$. Dalla Fig. 3.10 risulta evidente che la variazione di fase dovuta ad un generico polo p_i risulta:

$$\Delta \angle(s - p_i) = \begin{cases} -2\pi & , \text{ se } p_i \text{ è interno a } \Gamma \\ 0 & , \text{ se } p_i \text{ è esterno a } \Gamma \end{cases}$$

Altrettanto si verifica per gli zeri.

Figura 3.10: Esempio di curva Γ nel piano complesso.

Dalla (3.4) risulta quindi che:

$$\Delta \angle F(s) = \sum_{i=1}^m \Delta \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \angle(s - p_i) = -2\pi(N_{z\Gamma}^F - N_{p\Gamma}^F)$$

dove $N_{z\Gamma}^F$ e $N_{p\Gamma}^F$ denotano rispettivamente il numero di zeri e di poli di $F(s)$ interni alla curva Γ .

Possiamo quindi riformulare il risultato di questo lemma come:

$$N_{or}^F = N_{z\Gamma}^F - N_{p\Gamma}^F$$

dove N_{or}^F denota il numero di rotazioni orarie intorno all'origine di $F(s)$ per s che percorre la curva Γ in senso orario. \square

Il criterio di stabilità di Nyquist è una diretta conseguenza del lemma di Cauchy. Consideriamo infatti la curva Γ riportata in Fig. 3.11. Tale curva si suppone estesa all'infinito, per cui circonda tutti gli zeri e poli nel semipiano destro.

Applicando il principio dell'argomento alla funzione $F(s) \triangleq 1 + L(s) = 1 + G(s)H(s)$, si ottiene:

$$N_{or}^F = N_{zd}^F - N_{pd}^F,$$

dove con N_{zd} e N_{pd} si denotano rispettivamente gli zeri e i poli di $F(s)$ nel semipiano destro. Risulta però evidente che gli zeri di $F(s)$ coincidono con i poli di $\tilde{G}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$, mentre i poli di $F(s)$ coincidono con quelli di $L(s)$. Possiamo quindi affermare che:

$$N_{pd}^{AC} = N_{pd}^{AA} + N_{or}^F, \quad (3.5)$$

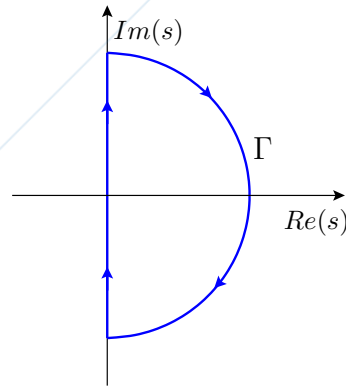


Figura 3.11: Curva Γ utilizzata per l'applicazione del criterio di Nyquist.

dove AC sta per Anello Chiuso, AA per Anello Aperto, e N_{or}^F è il numero di rotazioni orarie del diagramma di Nyquist di F intorno a 0.

Per semplicità, risulta più conveniente tracciare il diagramma di Nyquist di $L(s)$ (anziché di $F(s) = 1 + L(s)$) e considerare le rotazioni orarie intorno al punto $(-1,0)$.

Possiamo ora enunciare il Criterio di stabilità di Nyquist come una semplice applicazione di (3.5).

Teorema 3.5 (*Criterio di Nyquist*)

Sia dato il sistema in Fig. 3.7. Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità asintotica del sistema in retroazione è che:

$$N_{aor-1}^L = N_{pd}^{AA},$$

dove N_{aor-1}^L denota il numero di rotazioni antiorarie del diagramma di Nyquist di $L(j\omega)$ intorno al punto $(-1,0)$.

Osservazioni: dalla relazione (3.5) segue che:

- Rotazioni orarie di $L(j\omega)$ aggiungono instabilità al sistema ad anello chiuso rispetto a quelle dell'anello aperto.
- Rotazioni antiorarie di $L(j\omega)$ neutralizzano eventuali instabilità ad anello aperto.
- Se il diagramma di $L(j\omega)$ passa per il punto $(-1,0)$, il sistema ad anello chiuso ha almeno un polo sull'asse immaginario.
- Per studiare la stabilità di un sistema con retroazione positiva è sufficiente applicare il criterio considerando le rotazioni intorno al punto $(1,0)$.

Discussione della stabilità al variare del guadagno di anello.

Consideriamo lo schema in Fig. 3.12, in cui

$$L(s) = \frac{1}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \quad \tau_1, \tau_2 > 0.$$

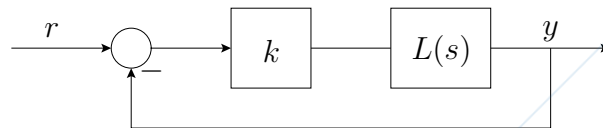


Figura 3.12: Schema in retroazione unitaria.

Sia $-\alpha$ il punto di intersezione di $L(j\omega)$ con l'asse reale. Il diagramma di Nyquist è riportato in Fig. 3.13. Assumiamo per adesso $k = 1$. Poiché il sistema ad anello aperto non ha poli a parte reale strettamente positiva, per il criterio di Nyquist, il sistema ad anello chiuso sarà stabile se e solo se il diagramma di $L(j\omega)$ non compie rotazioni orarie intorno al punto $(-1,0)$.

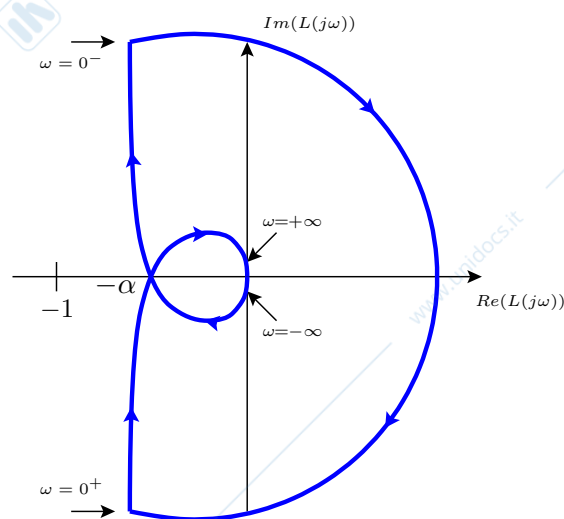


Figura 3.13: Diagramma di Nyquist di $L(s)$.

Vogliamo adesso valutare per quali valori di k il sistema in retroazione è stabile. Consideriamo $k > 0$. Poiché l'effetto di k sul diagramma di Nyquist comporta una variazione del modulo ad ogni singola frequenza, è evidente che il punto critico da considerare sarà quello di intersezione con l'asse delle ascisse. Un valore di k eccessivamente elevato comporterà uno spostamento del punto $-\alpha$ verso sinistra oltre il punto $(-1,0)$, dando luogo

a 2 rotazioni orarie intorno a tale punto. E' chiaro dunque che i valori di k tali da dare origine a un sistema stabile sono dati da:

$$0 < k < \frac{1}{\alpha}.$$

Consideriamo adesso i valori di $k < 0$. In questo caso dobbiamo analizzare le rotazioni orarie intorno al punto $(1,0)$. Essendo la richiusura effettuata all'infinito, avremo sempre una rotazione oraria intorno a tale punto (indipendentemente dal valore di k).

Possiamo quindi riepilogare i risultati trovati:

- $k < 0 \rightarrow$ anello chiuso instabile con 1 polo a destra.
- $0 < k < \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ anello chiuso asintoticamente stabile.
- $k > \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ anello chiuso instabile con 2 poli a destra.

Nella discussione precedente abbiamo visto come un aumento eccessivo del guadagno possa portare il sistema ad anello chiuso in condizione di instabilità, mentre un valore molto piccolo produce un effetto stabilizzante. Questa è in effetti una situazione comune, ma non è sempre valida. Possono esistere casi in cui si verifica esattamente il fenomeno opposto, oppure casi in cui gli intervalli di stabilità sono disgiunti.

Consideriamo ad esempio il diagramma di Nyquist di Fig. 3.14, ed assumiamo che la funzione ad anello aperto non abbia poli instabili. Tale funzione si dice *condizionatamente stabile*. Al variare di k avremo le seguenti situazioni:

- $k < 0 \rightarrow$ anello chiuso instabile con 1 polo a destra.
- $0 < k < \frac{1}{a_3} \rightarrow$ anello chiuso stabile.
- $\frac{1}{a_3} < k < \frac{1}{a_2} \rightarrow$ anello chiuso instabile con 2 poli a destra.
- $\frac{1}{a_2} < k < \frac{1}{a_1} \rightarrow$ anello chiuso stabile.
- $k > \frac{1}{a_1} \rightarrow$ anello chiuso instabile con 2 poli a destra.

Consideriamo adesso una funzione di trasferimento del tipo:

$$L(s) = \frac{s + T}{s(s - T)} = -\frac{(1 + \frac{s}{T})}{s(1 - \frac{s}{T})}, \quad T > 0.$$

Il diagramma di Nyquist è riportato in Fig. 3.15. Al variare di k avremo i seguenti casi:

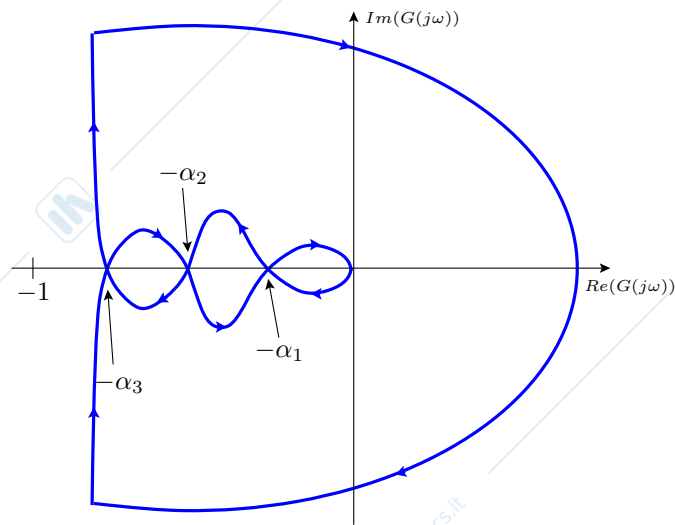


Figura 3.14: Diagramma di Nyquist di un sistema marginalmente stabile.

- $k < 0 \rightarrow$ anello chiuso instabile con 1 polo a destra.
- $0 < k < \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ anello chiuso instabile con 2 poli a destra.
- $k > \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ anello chiuso stabile.

In questo caso il sistema viene stabilizzato al crescere del valore di k .

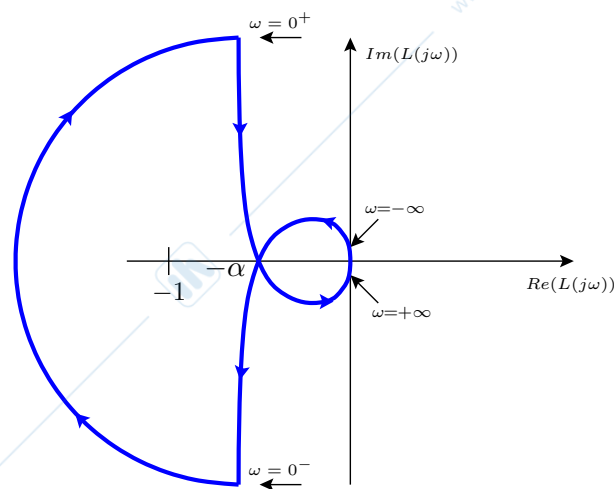


Figura 3.15: Diagramma di Nyquist di $L(s) = \frac{s+T}{s(s-T)}$.

3.4.2 Criterio di stabilità di Bode

Parametri per la valutazione della “buona” stabilità

Analizziamo adesso alcuni parametri utili per la valutazione della “buona” stabilità di un sistema ad anello chiuso.

Margine di guadagno. Sia dato il diagramma di Nyquist in Fig. 3.16. Per il criterio di stabilità di Nyquist, la posizione del punto $-\alpha$ gioca un ruolo cruciale per l’analisi della stabilità ad anello chiuso. Se tale punto si trovasse a sinistra del punto $(-1,0)$, allora si avrebbero due rotazioni orarie intorno a tale punto che provocherebbero l’instabilità del sistema. Si definisce *margin* di guadagno del sistema la quantità:

$$\gamma_m = \frac{1}{\alpha}$$

che espressa in decibel risulta:

$$20 \log_{10} \frac{1}{\alpha} = -20 \log_{10} \alpha.$$

Un sistema con un margine di guadagno prossimo ad 1 risulterà molto vicino all’instabilità.

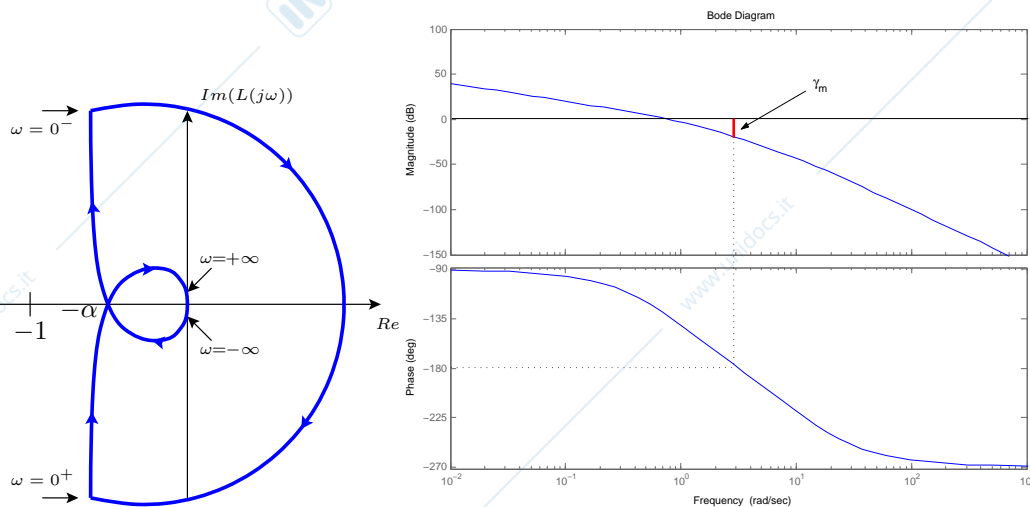


Figura 3.16: Esempio per la valutazione del margine di guadagno dal diagramma di Nyquist e di Bode $\left(G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}\right)$.

E’ possibile valutare il margine di guadagno anche dal diagramma di Bode. Infatti il punto $-\alpha$ corrisponde alla frequenza per la quale la fase vale -180° ed il modulo vale α . Il margine di guadagno sarà quindi l’opposto (nel diagramma di modulo) del modulo della funzione ad anello aperto a tale frequenza critica (Fig. 3.16).

Margine di fase. E' facile notare come due sistemi possano avere lo stesso margine di guadagno, pur essendo profondamente diversi per quanto riguarda la stabilità. In Fig. 3.17 si può osservare il particolare di un diagramma di Nyquist di due funzioni che attraversano l'asse reale nello stesso punto e che quindi hanno lo stesso margine di guadagno. E' evidente però che la funzione $G_1(s)$ è più vicina all'instabilità rispetto alla funzione $G_2(s)$, in quanto il diagramma di $G_2(s)$ risulta essere più distante rispetto al punto $(-1,0)$ rispetto a quello di $G_1(s)$. E' infatti sufficiente una piccola rotazione oraria del diagramma (provocata ad esempio da una linea di ritardo) per far andare in instabilità il sistema $G_1(s)$.

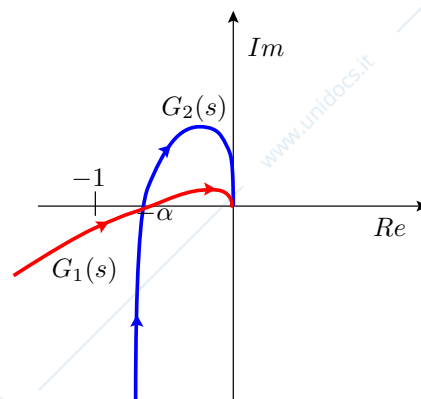


Figura 3.17: Esempio di due sistemi con uguale margine di guadagno.

Si definisce come *margine di fase* la seguente espressione:

$$\phi_m = \angle G(j\omega_a) + 180^\circ$$

dove ω_a è la frequenza a cui il diagramma di modulo di $G(j\omega)$ attraversa l'asse 0 dB (ovvero la frequenza a cui il modulo vale 1). Questo margine è definito univocamente per i sistemi il cui modulo assume il valore unitario ad una sola frequenza.

L'interpretazione grafica di tale margine relativamente ai diagrammi di Nyquist e Bode è riportata in Fig. 3.18.

Teorema 3.6 (*Criterio di stabilità di Bode*)

Sia data una funzione di trasferimento $G(s)$ strettamente propria con tutti i poli $\text{Re}[p_i] \leq 0$ e tale che $\exists! \omega : |G(j\omega)| = 1$. Allora, condizione necessaria e sufficiente per la stabilità dell'anello chiuso è:

- il guadagno di anello è positivo;
- il margine di fase è positivo ($\phi_m > 0$).

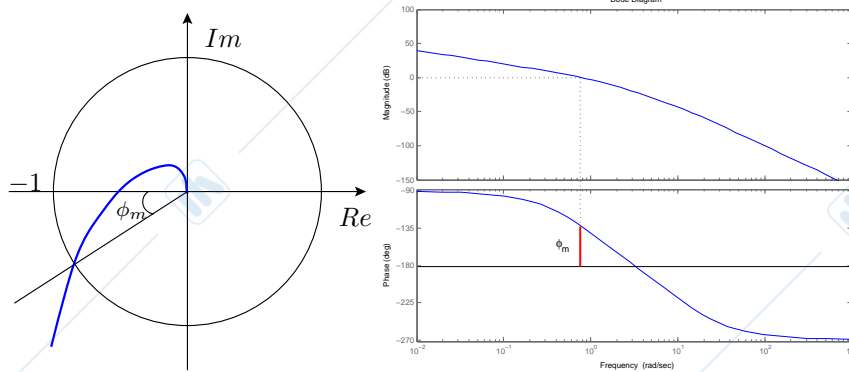


Figura 3.18: Valutazione del margine di fase dal diagramma di Nyquist e di Bode.

Esempio 3.3

Sia dato il sistema in Fig. 3.19. Supponiamo che per $T = 0$ il sistema in retroazione sia stabile e che il margine di fase sia positivo. Vogliamo valutare il valore di T critico che rende il sistema instabile.

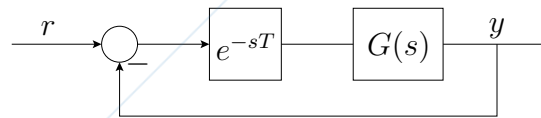


Figura 3.19: Schema in retroazione dell'esempio 3.3.

Sappiamo che l'effetto del ritardo consiste in una rotazione del diagramma di Nyquist in senso orario di una quantità pari a ωT . Sia ω^* la frequenza di attraversamento del cerchio unitario e ϕ_m il margine di fase per $T = 0$. Il ritardo critico T^* risulterà pari a:

$$T^* = \frac{\phi_m}{\omega^*}.$$

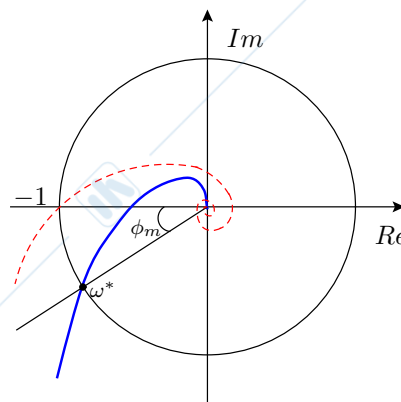


Figura 3.20: Diagramma di Nyquist dell'esempio 3.3 per $T = 0$ (—) e per $T = T^*$ (---).

Il luogo delle radici

Sia dato il sistema in retroazione unitaria riportato in Fig. 4.1. Il luogo delle radici è uno strumento mediante il quale è possibile valutare la posizione dei poli della funzione ad anello chiuso nel piano complesso al variare del guadagno k .

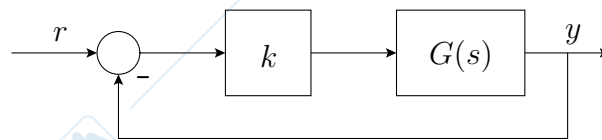


Figura 4.1: Schema in retroazione utilizzato per la determinazione del luogo delle radici.

Esempio 4.1

Supponiamo di avere:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

La funzione in catena diretta risulterà:

$$L(s) = k G(s) = \frac{k}{s(s+2)},$$

mentre la funzione dell'anello chiuso sarà:

$$\bar{G}(s) = \frac{k}{s(s+2) + k} = \frac{k}{s^2 + 2s + k}.$$

Poiché i poli di $\bar{G}(s)$ sono gli zeri dell'equazione caratteristica $s^2 + 2s + k = 0$, avremo:

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - k}.$$

Risulta quindi che per $k = 0$ (anello aperto) le radici sono 0 e -2 .

Sarà quindi possibile tracciare sul piano complesso l'andamento dei poli al variare di k , considerando sia i valori positivi che negativi. Ciò che otterremo è riportato in Fig. 4.2. Tale figura rappresenta il luogo delle radici del sistema in esame; il diagramma calcolato per $k > 0$ si dice luogo diretto, mentre quello per $k < 0$ si dice luogo complementare.

Dalla figura si può notare che per $k = 1$ le due radici risultano coincidenti in -1 .

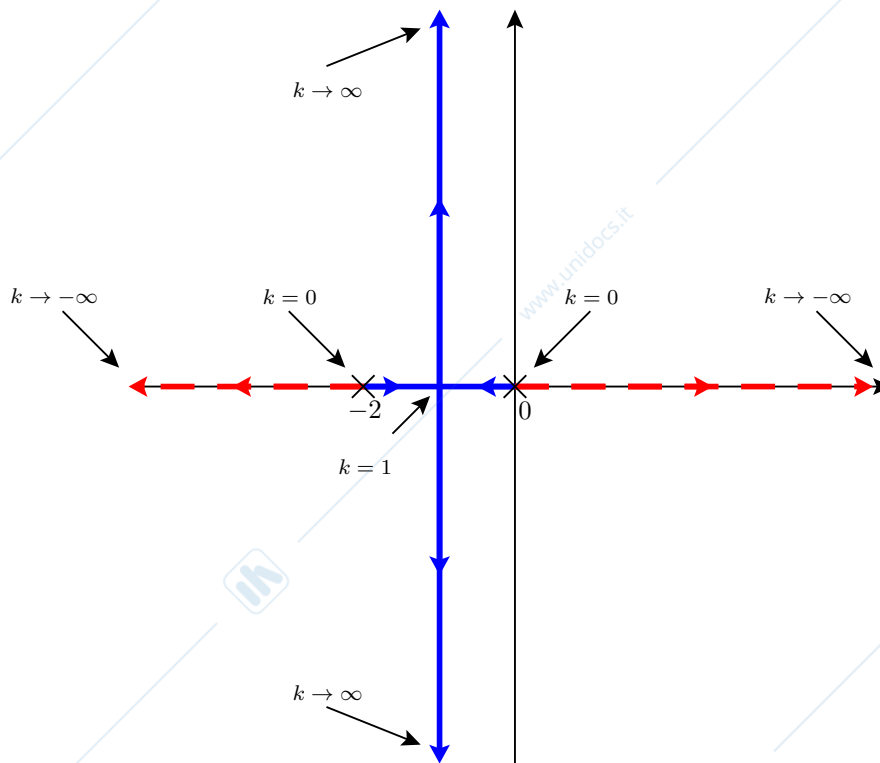


Figura 4.2: Esempio di luogo delle radici; (—)=diretto, (---)= complementare.

Notare che la retroazione cambia i poli del sistema mantenendo invariati gli zeri rispetto all'anello aperto.

Esprimiamo $G(s)$ nella forma zeri-poli

$$G(s) = k_G \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad \text{con } m < n.$$

Possiamo quindi scrivere la funzione in catena diretta $L(s)$ come:

$$L(s) = k G(s) = k k_G \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}.$$

Definendo $k^* = k k_G$ si può esprimere L come funzione della variabile complessa s e del guadagno k^* . Possiamo quindi scrivere:

$$L(s; k^*) = k^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}. \quad (4.1)$$

L'equazione caratteristica $1 + L(s, k^*) = 0$ risulta:

$$1 + k^* \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = 0$$

cioè:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

ovvero:

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) = -k^* \prod_{i=1}^m (s - z_i). \quad (4.2)$$

Affinché la (4.2) sia verificata è necessario che siano soddisfatte le seguenti due condizioni:

- **condizione di modulo:**

$$|k^*| = \frac{\prod_{i=1}^n |s - p_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}$$

- **condizione di fase:**

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = \pi + \angle k^* + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$

cioè:

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = \begin{cases} (2h + 1)\pi & \text{luogo diretto } (k^* > 0) \\ 2h\pi & \text{luogo complementare } (k^* < 0). \end{cases} \quad (4.3)$$

Dalla condizione di fase, che definisce il luogo diretto e quello complementare, risulta che il luogo da tracciare sarà quello diretto nel caso di retroazione negativa e k^* positivo oppure retroazione positiva e k^* negativo. Viceversa, il luogo complementare dovrà essere utilizzato nel caso di retroazione negativa e k^* negativo oppure di retroazione positiva e k^* positivo.

Occorre prestare attenzione al fatto che $k^* = k k_G$. Poiché k_G è il guadagno del sistema (e non può essere cambiato), il nostro interesse si focalizzerà sulla posizione dei poli del sistema in anello chiuso al variare di k .

4.1 Regole per il tracciamento del luogo delle radici

Di seguito sono riportate le principali regole utili per il tracciamento del luogo delle radici.

- Il luogo delle radici possiede n rami ($n =$ numero dei poli).
- Tutti i rami originano dai poli ad anello aperto del sistema ($k^* = 0$).
- Per $|k^*| \rightarrow \infty$, m rami tendono agli zeri, mentre $(n - m)$ tendono all'infinito.
- Un punto dell'asse reale appartiene al luogo diretto se ha un numero dispari di singolarità sull'asse reale alla sua destra, altrimenti appartiene al luogo complementare.

Dimostrazione.

Questa proprietà può essere facilmente dimostrata a partire dalla condizione di fase. Si consideri infatti il caso riportato in Fig. 4.3. Per ogni punto sull'asse reale \hat{s} a sinistra di un polo o di uno zero, risulterà $\angle(\hat{s} - p) = \pi$, mentre per ogni punto \bar{s} a destra, avremo $\angle(\bar{s} - p) = 0$. E' opportuno notare che il contributo di eventuali singolarità complesse è sempre pari a zero, per cui possono essere trascurate in questa fase. \square

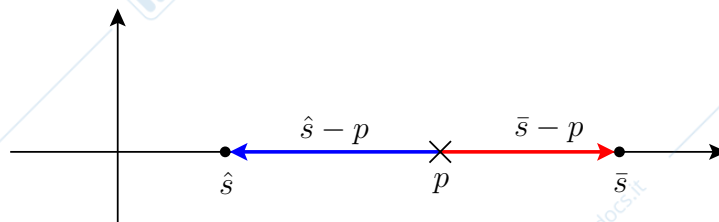


Figura 4.3: Determinazione del luogo delle radici per i punti sull'asse reale.

- Gli $(n - m)$ rami che tendono all'infinito per $|k^*| \rightarrow \infty$ (corrispondenti agli zeri all'infinito della $L(s)$), seguono degli asintoti centrati in:

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (\text{centro stella}). \quad (4.4)$$

Tali asintoti formano una stella regolare la cui fase è:

$$\begin{cases} \frac{(2h+1)\pi}{n-m}, h \in \mathbb{Z} & \text{per il luogo diretto} \\ \frac{2h\pi}{n-m}, h \in \mathbb{Z} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Dimostrazione.

Dimostriamo che la fase degli asintoti coincide con la (4.5). Consideriamo per semplicità solo il luogo diretto. Poiché si intende studiare la posizione degli $(n - m)$ rami che tendono all'infinito, si consideri un generico punto s sul piano complesso molto distante dai poli e dagli zeri della $G(s)$. Rispetto a questo punto, risulterà

$$\angle(s - p_i) = \angle(s - z_j) \triangleq \phi \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad j = 1, \dots, m.$$

Affinché la condizione di fase sia verificata dovrà quindi valere

$$n\phi - m\phi = (2h + 1)\pi$$

da cui

$$\phi = \frac{(2h + 1)\pi}{n - m}.$$

□

- Il luogo delle radici è sempre simmetrico rispetto all'asse reale.
- Le intersezioni tra i rami, che avvengono sempre secondo una stella regolare, sono i punti singolari della mappa $F(s; k^*) = 1 + L(s, k^*) = 0$. Tali punti soddisfano:

$$\begin{cases} F(s; k^*) = 0 & \text{affinché sia un punto del luogo} \\ \frac{\partial F}{\partial s} = 0 & \text{affinché sia un punto di emersione (o immersione).} \end{cases}$$

Vale inoltre che nel punto di emersione il valore di k^* è massimo. In Fig. 4.4 è riportato l'andamento di k^* per la funzione dell'esempio 4.1.

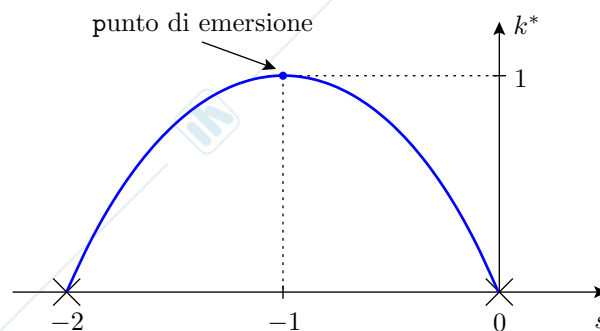


Figura 4.4: Andamento di k^* per l'esempio 4.1.

4.2 Esempi di luoghi delle radici

Esempio 4.2

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k \frac{(s+1)}{s^2(s+3)}$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig. 4.5.

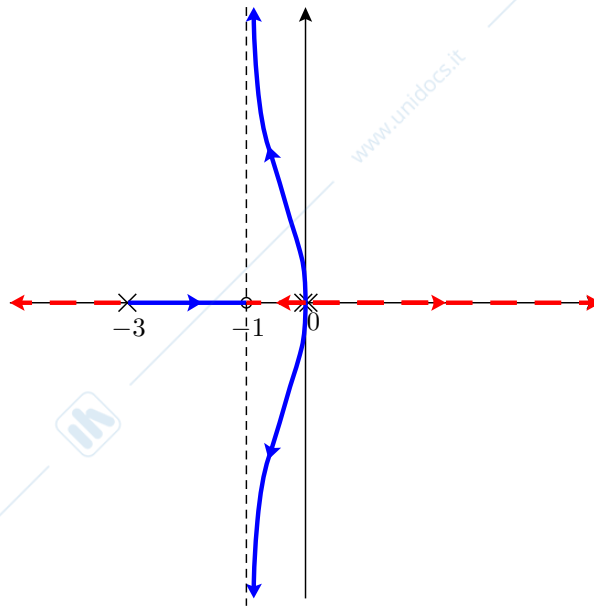


Figura 4.5: Luogo diretto (—) e complementare (---) per il sistema dell'esempio 4.2.

Il centro stella risulta:

$$s_0 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

mentre gli asintoti formano angoli pari a:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} & \text{per il luogo diretto} \\ \{0, \pi\} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases}$$

Possiamo quindi dedurre che per $k < 0$ il sistema in anello chiuso sarà sempre instabile (1 polo nel semipiano destro), mentre per $k > 0$ il sistema sarà sempre stabile.

Esempio 4.3

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k \frac{1}{(s-2)^2 (s^2+1)(s+1)^2}$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig. 4.6.

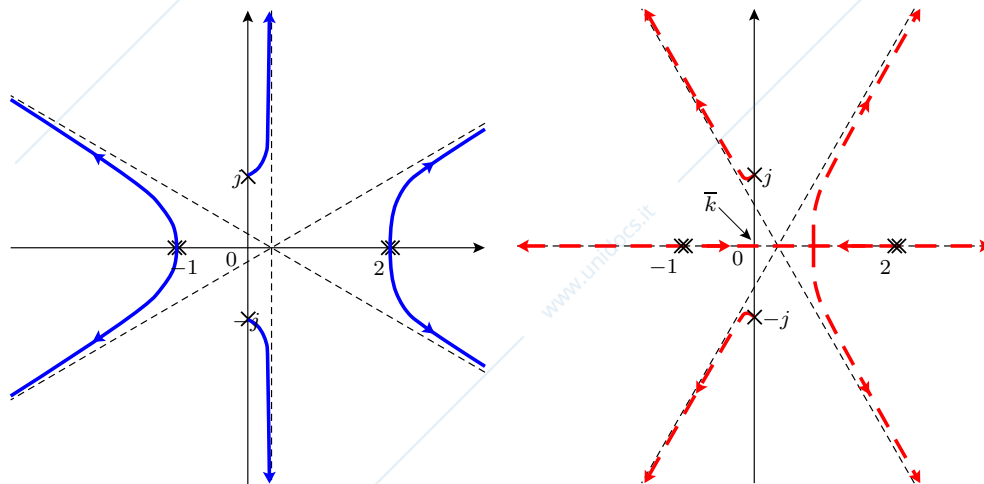


Figura 4.6: Luogo diretto (—) e complementare (---) per il sistema dell'esempio 4.3.

Il centro stella risulta:

$$s_0 = \frac{2 + 2 + j - j - 1 - 1}{6} = \frac{1}{3}$$

mentre gli asintoti formano angoli pari a:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\} & \text{per il luogo diretto} \\ \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases}$$

La funzione ad anello chiuso presenterà quindi 4 poli instabili per $k > 0$. Per $k < 0$ avremo invece due casi: se $|k| < \bar{k}$ si avranno 2 poli instabili, mentre se $|k| > \bar{k}$ avremo 3 poli instabili.

Esempio 4.4

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$L(s) = k \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

Il luogo delle radici è riportato in Fig. 4.7.

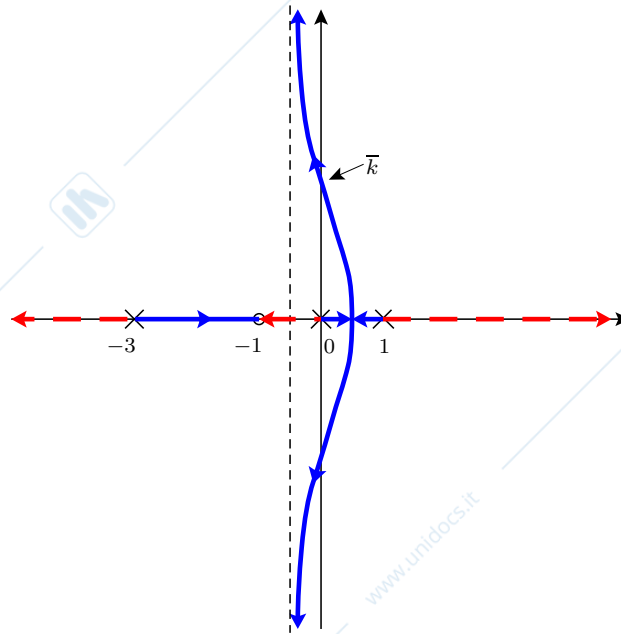


Figura 4.7: Luogo diretto (—) e complementare (---) per il sistema dell'esempio 4.4.

Il centro stella risulta $s_0 = -0.5$ mentre gli asintoti formano angoli pari a:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} & \text{per il luogo diretto} \\ \{0, \pi\} & \text{per il luogo complementare.} \end{cases}$$

Risulta quindi che la funzione ad anello chiuso è stabile solo per $k > \bar{k}$. Per $0 < k < \bar{k}$ avremo 2 poli instabili, mentre per $k < 0$ si avrà un solo polo instabile.

Esempio 4.5

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s^2+1)}.$$

Si voglia tracciare il luogo delle radici diretto.

In Fig. 4.8 sono riportati due possibili luoghi, entrambi soddisfacenti le regole riportate nella della sezione 4.1. Naturalmente la discussione della stabilità risultante dai due luoghi è ben diversa. Il luogo di figura 4.8-a rappresenta un sistema stabile per $0 < k < \bar{k}$, mentre quello di figura 4.8-b sarà instabile per ogni $k > 0$. Risulta evidente che in questo caso per tracciare il luogo corretto è necessario calcolare la fase di uscita del luogo dai due poli immaginari. Per fare questo possiamo applicare la condizione di fase (4.3) in un intorno

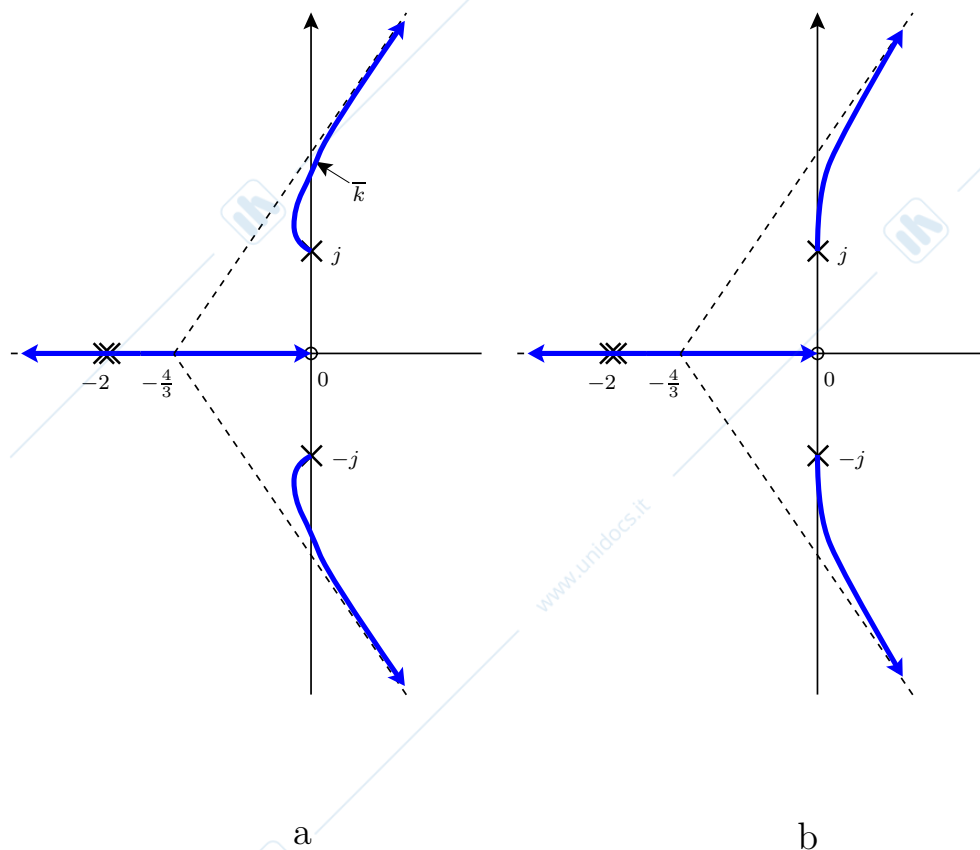


Figura 4.8: Esempio 4.5. Quale di questi due luoghi diretti è corretto?

del polo $+j$ (o $-j$). Dovrà quindi risultare:

$$\sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) - \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) = (2h + 1)\pi$$

$$2\angle(s + 2) + \angle(s - j) + \angle(s + j) - \angle(s - 0) = (2h + 1)\pi$$

Poiché scegliamo s in un intorno di $+j$ avremo (supponiamo di scegliere $h = 0$):

$$2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \angle(s - j) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\angle(s - j) = -2 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi \simeq 2.21.$$

La fase di uscita dal polo $+j$ risulta quindi essere pari a 2.21 radianti, equivalenti a 127° . Il luogo delle radici corretto sarà quindi quello di figura 4.8-a.

Per completezza, il luogo complementare (corretto) è riportato in Fig. 4.9. In questo caso il numero di poli instabili risulta essere pari a 2 per ogni valore $k < 0$.

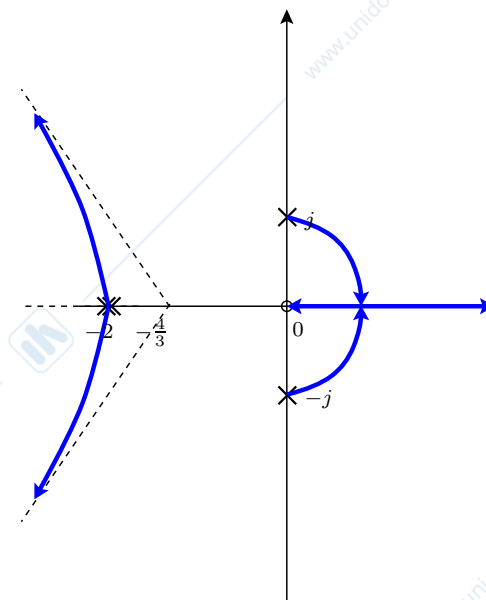


Figura 4.9: Esempio 4.5. Luogo complementare.

Prestazioni dei sistemi in retroazione

5.1 Sensitività e sensitività complementare

Sia dato il sistema in retroazione riportato in Fig. 5.1. Vogliamo determinare quanto è sensibile il sistema in anello chiuso a fronte di variazioni della funzione $G(s)$. Questa analisi risulta utile in quanto, dal punto di vista pratico, non avremo mai una conoscenza esatta del sistema $G(s)$. E' quindi desiderabile che il sistema ad anello chiuso sia piuttosto insensibile alle variazioni della $G(s)$. La sensitività relativa della funzione di anello chiuso $T = G/(1 + G)$ rispetto alla funzione di anello aperto G è data da:

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial G}}{\frac{T}{G}} = \frac{1 + G - G}{(1 + G)^2} \cdot \frac{1}{\frac{G}{1+G} \frac{1}{G}} = \frac{1 + G}{(1 + G)^2} = \frac{1}{1 + G} \triangleq S(s).$$

La funzione $S(s)$ si dice *funzione di sensitività*. La funzione di anello $T(s)$ introdotta in precedenza si chiama *sensitività complementare* poiché:

$$T(s) \triangleq \frac{G(s)}{1 + G(s)} = 1 - S(s).$$

Osservazione: E' opportuno notare che la funzione di sensitività $S(s)$ coincide con la funzione di trasferimento tra il disturbo d e l'uscita y ; essa può inoltre essere interpretata come la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento r e l'errore e . In entrambi i casi risulta desiderabile che tale funzione sia prossima a zero, specialmente alle frequenze

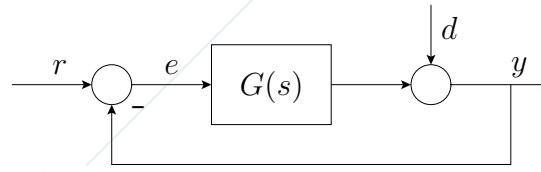


Figura 5.1: Sistema in retroazione unitaria.

di interesse. Al contrario, la funzione di sensitività complementare $T(s)$ risulta essere la funzione di trasferimento tra il riferimento r e l'uscita y , per cui sarebbe auspicabile che fosse circa pari ad 1.

Vedremo di seguito che in generale sarà possibile ottenere $|S(j\omega)| \simeq 0$ e $|T(j\omega)| \simeq 1$ solo per alcuni valori della pulsazione ω .

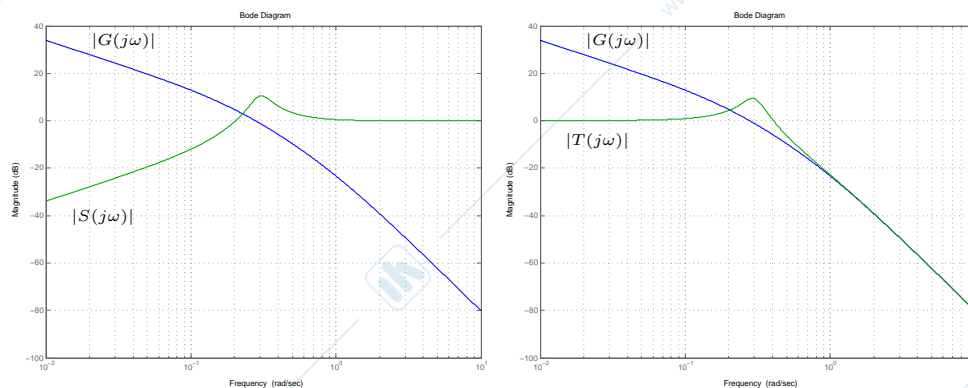
Poiché S e T dipendono esclusivamente da G , conoscendo l'andamento di $|G(j\omega)|$ sarà possibile determinare $|S(j\omega)|$ e $|T(j\omega)|$. In generale, è possibile conoscere l'andamento qualitativo di tali funzioni anche senza l'ausilio di $|G(j\omega)|$ purché $G(s)$ sia strettamente propria e con almeno un polo nell'origine. Si può verificare che:

$$|T(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 0 \text{ dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \gg 1 \\ |G(j\omega)|_{dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \ll 1. \end{cases}$$

Un ragionamento analogo può essere esteso al caso di $S(s)$:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + G(j\omega)|} = \begin{cases} -|G(j\omega)|_{dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \gg 1 \\ 0 \text{ dB} & , \quad \forall \omega: |G(j\omega)| \ll 1. \end{cases}$$

In Fig. 5.2 sono rappresentati gli andamenti tipici delle funzioni $S(s)$ e $T(s)$.

Figura 5.2: Andamenti del modulo delle funzioni $G(j\omega)$, $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$.

Come anticipato in precedenza, la Fig. 5.2 mostra chiaramente che oltre una certa frequenza (denominiamola $\bar{\omega}$) si ha $|S(j\omega)| \simeq 1$ e $|T(j\omega)| \simeq 0$, $\forall \omega \geq \bar{\omega}$. Questo significa

che per avere un buon comportamento del sistema in anello chiuso i segnali $r(t)$ e $d(t)$ dovranno avere delle componenti in frequenza sufficientemente minori di $\bar{\omega}$.

La formula integrale di Bode

Teorema 5.1 (Formula integrale di Bode)

Siano p_k i poli instabili di $G(s)$ ($\text{Re}[p_k] > 0$), e sia il grado relativo di $G(s) \geq 2$ (cioè la differenza tra poli e zeri sia ≥ 2). Risulta che

$$\int_0^{\infty} \ln |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_k \text{Re}[p_k] .$$

Questo teorema afferma che l'integrale del logaritmo del modulo di $S(j\omega)$ assume un valore costante, che in assenza di poli instabili sarà pari a 0. In quest'ultimo caso risulterà che l'area del diagramma di Bode del modulo di $S(j\omega)$ minore di 0dB sarà pari a quella maggiore di 0dB (nel caso si utilizzi la scala lineare per le pulsazioni ω). In Fig. 5.3 è riportato un esempio di questo fenomeno noto con il nome di effetto a "letto d'acqua" (*waterbed effect*).

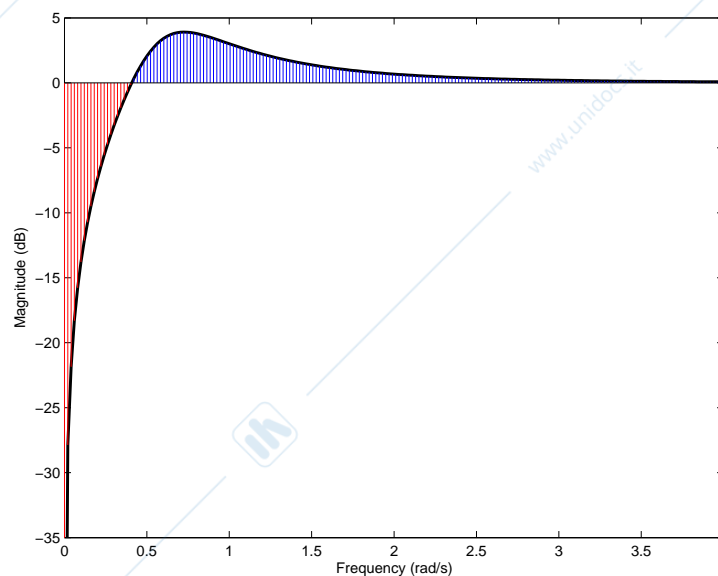


Figura 5.3: Waterbed effect nel caso di funzione $G(s)$ stabile. L'area rossa coincide con quella blu (notare la scala lineare delle frequenze).

Picco di risonanza e banda passante

Si definisce *picco di risonanza* M_r la differenza tra il massimo valore raggiunto dal modulo di $T(j\omega)$ ed il valore in continua (cioè per $\omega \rightarrow 0$) espressi in decibel. Si può dimostrare facilmente che se $G(s)$ ha almeno un polo in 0, allora $T(j0) = 0$ dB, per cui il picco di risonanza coincide con il massimo valore raggiunto dal modulo. In generale, si desidera avere un picco di risonanza abbastanza piccolo, in quanto tanto maggiore è il picco e tanto minore risulterà essere lo smorzamento della risposta del sistema.

Si definisce *banda passante* B_w (o B_3) del sistema la frequenza alla quale il modulo di $T(j\omega)$ si riduce di 3 dB rispetto al valore in continua. Un aumento della banda passante si traduce generalmente in un aumento della prontezza di risposta del sistema.

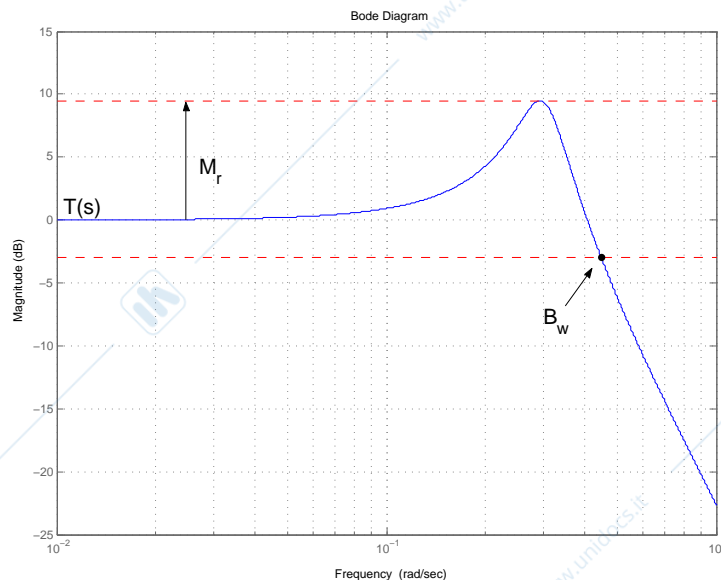


Figura 5.4: Picco di risonanza e banda passante di un sistema in retroazione.

I cerchi M

Vogliamo adesso determinare per quali punti del piano $X - Y$ il modulo della funzione ad anello chiuso $T(j\omega)$ risulta costante. Scriviamo $G(j\omega)$ mettendo in evidenza la parte reale ed immaginaria.

$$G(j\omega) = x(\omega) + j y(\omega).$$

Per semplificare la trattazione, nel seguito si ometterà la dipendenza da ω . La funzione ad anello chiuso risulterà:

$$T = \frac{G}{1 + G} = \frac{x + jy}{(1 + x) + jy}$$

e quindi:

$$|T|^2 = \frac{|x + jy|^2}{|(1+x) + jy|^2} = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} \triangleq M^2$$

da cui:

$$\begin{aligned} M^2(1 + 2x + x^2) + M^2y^2 &= x^2 + y^2 \\ (M^2 - 1)x^2 + 2M^2x + (M^2 - 1)y^2 + M^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Supponendo $M \neq 1$, dividendo per $(M^2 - 1)$ e sommando e sottraendo $\frac{M^4}{(M^2-1)^2}$, si ottiene:

$$x^2 + 2x \frac{M^2}{M^2 - 1} + \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} - \frac{M^4}{(M^2 - 1)^2} + y^2 + \frac{M^2}{M^2 - 1} = 0$$

che equivale a scrivere:

$$\left(x - \frac{M^2}{1 - M^2}\right)^2 + y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}. \quad (5.2)$$

La (5.2) è l'equazione di una famiglia di circonferenze, il cui centro C e raggio R valgono:

$$C = \left(\frac{M^2}{1 - M^2}, 0\right), \quad R = \frac{M}{|M^2 - 1|}.$$

Queste circonferenze vengono dette *cerchi M*. Sarà possibile tracciare il diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ su un apposita carta graduata con tali cerchi; in questo modo sarà possibile valutare il valore del modulo di $T(j\omega)$ a partire dal grafico di $G(j\omega)$ (Fig. 5.5). Sarà quindi particolarmente semplice dedurre il valore del picco di risonanza e della banda passante. Il picco di risonanza sarà infatti il valore del cerchio tangente al diagramma, mentre la banda passante sarà il valore della frequenza alla quale la curva interseca il cerchio corrispondente a -3 dB. E' opportuno notare che nel caso $M = 1$, dalla (5.1) si evince che i cerchi si schiacciano sulla retta verticale $x = -1/2$.

In modo analogo è possibile costruire delle curve a modulo costante in funzione del modulo (espresso in dB) e della fase di $G(j\omega)$ (anziché dalla parte reale ed immaginaria). Tali curve rappresentano la cosiddetta *carta di Nichols* la quale permette di valutare il picco di risonanza e la banda passante in modo analogo al precedente ma a partire dal diagramma di Nichols. Un esempio è riportato in Fig. 5.6.

Nonostante i risultati forniti finora facciano riferimento alla funzione di sensitività complementare $T(s)$, risultano facilmente adattabili anche per l'analisi della funzione di sensitività. La funzione $S(s)$ si può infatti scrivere come:

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{G^{-1}(s)}{1 + G^{-1}(s)}.$$

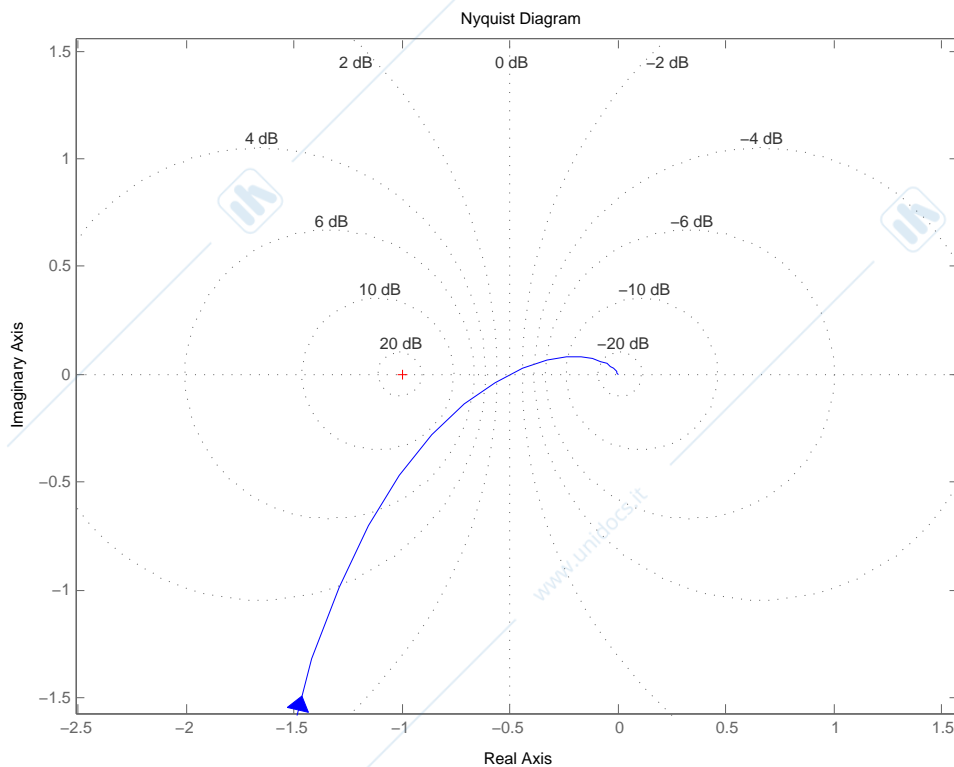


Figura 5.5: Diagramma di Nyquist tracciato sul piano $X - Y$ in presenza dei cerchi M .

Una volta tracciato il diagramma di Nichols di $G(j\omega)$, per ottenere quello di G^{-1} è sufficiente invertire il segno del modulo e della fase, ottenendo un diagramma simmetrico rispetto all'origine. Da tale diagramma sarà quindi possibile valutare le caratteristiche di $S(j\omega)$, usando ancora la carta di Nichols.

5.2 Specifiche dei sistemi di controllo nel dominio del tempo

Sia dato il sistema in retroazione in Fig. 5.7. Le specifiche nel dominio del tempo di un sistema di controllo possono essere suddivise in 3 categorie:

1. Specifiche sul regime permanente
2. Specifiche sul comportamento transitorio
3. Specifiche sul comando.



Figura 5.6: Diagramma di Nichols tracciato sulla carta di Nichols.

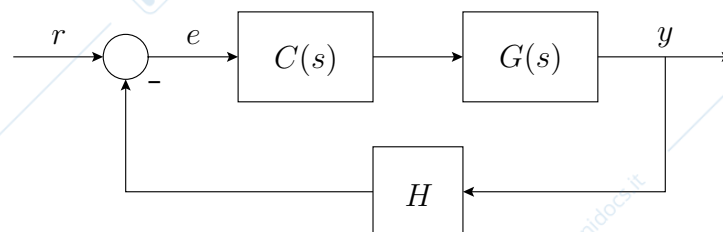


Figura 5.7: Sistema di controllo in retroazione.

5.2.1 Specifiche sul regime permanente

Per *specifiche sul regime permanente* si intendono quelle specifiche che impongono dei vincoli alla risposta in regime permanente del sistema ad anello chiuso.

Rapporto ingresso/uscita

Facendo riferimento al sistema in Fig. 5.7, una prima specifica tipica riguarda il rapporto tra ingresso ed uscita (k_d). Questo equivale a dire che, fissato il riferimento ad un

determinato valore r_0 , si vuole che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{r_0(t)} = k_d.$$

Risulta evidente che per soddisfare questa condizione è necessario imporre che:

$$H = k_d^{-1}.$$

Se H è una funzione di trasferimento dinamica, allora $H(s)|_{s=0} = k_d^{-1}$.

Inseguimento del riferimento: tipo di un sistema ed errore di inseguimento

Sia dato il sistema in Fig. 5.8. Poiché saremo interessati ad analizzare il comportamento dell'uscita rispetto al riferimento, nel seguito assumeremo nullo il valore del disturbo d . Il sistema di Fig. 5.8 potrà quindi essere trasformato nel sistema equivalente riportato in Fig. 5.9, dove il segnale y_r si dice *uscita ridotta*.

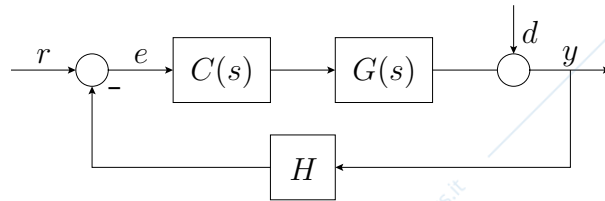


Figura 5.8: Sistema di controllo in retroazione.

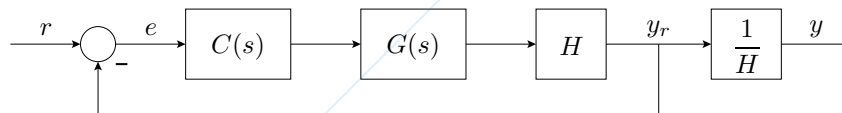


Figura 5.9: Sistema di controllo equivalente a quello di Fig. 5.8 ($d = 0$).

Nel seguito analizzeremo l'andamento dell'errore di inseguimento al variare del segnale di riferimento, che supporremo essere un gradino, una rampa lineare o una rampa parabolica.

Errore di inseguimento al gradino

Si supponga che $H = 1$ e che il riferimento r sia un gradino unitario, cioè $r(t) = 1 \cdot u(t)$ dove:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Si definisce come errore di inseguimento al gradino il seguente valore:

$$e_{grad} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - y(t)).$$

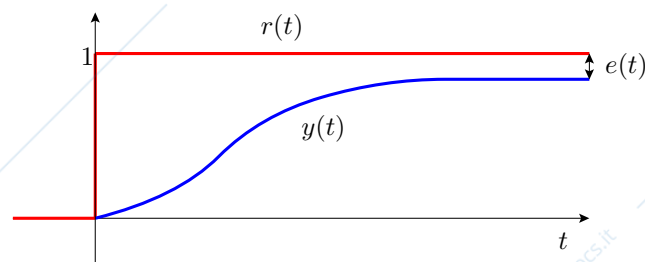


Figura 5.10: Errore di inseguimento al gradino unitario.

Errore di inseguimento alla rampa lineare

In modo analogo a quanto descritto in precedenza, è possibile valutare l'errore di inseguimento quando il segnale di riferimento è una rampa lineare, cioè $r(t) = t \cdot u(t)$.

$$e_{rampa} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t - y(t)).$$

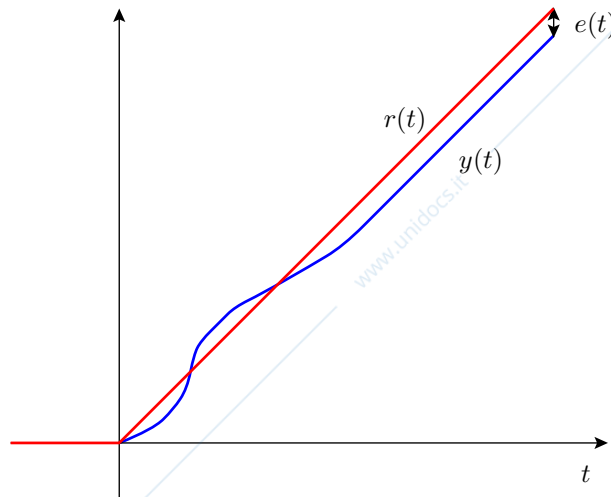


Figura 5.11: Errore di inseguimento alla rampa lineare.

Errore di inseguimento alla rampa parabolica

Se il riferimento è pari a $r(t) = \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$ sarà possibile valutare l'errore di inseguimento alla rampa parabolica come:

$$e_{par} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^2}{2} - y(t) \right).$$

Per poter rappresentare i precedenti 3 casi, possiamo assumere la trasformata di Laplace del riferimento pari a:

$$R_k(s) = \frac{A}{s^{k+1}} \quad \text{con } k \geq 0$$

dove A denota l'ampiezza del riferimento ¹.

L'errore di inseguimento risulterà:

$$E_k(s) = \frac{1}{1 + CGH} R_k(s) = \frac{1}{1 + CGH} \frac{A}{s^{k+1}}.$$

¹Ricordarsi che la trasformata di Laplace della rampa parabolica è $\mathcal{L} \left[\frac{t^2}{2} \right] = \frac{1}{s^3}$.

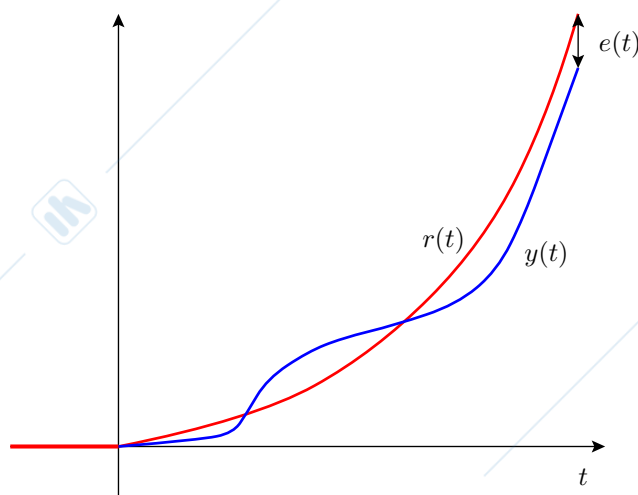


Figura 5.12: Errore di inseguimento alla rampa parabolica.

Si scriva la funzione $G(s)$ in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{k_G}{s^h} G'(s) \quad \text{dove } G'(s) \text{ è tale che } \lim_{s \rightarrow 0} G'(s) = 1.$$

Analogamente possiamo scrivere $C(s) = k_c C'(s)$ con $C'(0) = 1$.

Per il teorema del valore finale risulterà che:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e_k(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_k(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CGH} \frac{A}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + CH \frac{k_G}{s^h} G'(s)} \frac{A}{s^k} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{s^h + CH k_G G'(s)} \frac{A}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{s^h + k_c H k_G} \frac{A}{s^k} \\ &\stackrel{\text{se } h \neq 0}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^h}{k_c H k_G} \frac{A}{s^k} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{k_c H k_g} s^{h-k} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Quindi:

- se $h > k \rightarrow e_k(\infty) = 0$;
- se $h = k \rightarrow e_k(\infty) \neq 0, e_k(\infty) < \infty$;
- se $h < k \rightarrow e_k(\infty) = \infty$.

Risulta evidente che il valore dell'errore di inseguimento dipende fortemente dal valore di h , ovvero del numero di poli in zero del sistema. Tale numero di poli in zero identifica il cosiddetto *tipo del sistema* (almeno nel caso in cui si assuma che $H = k_d^{-1}$).

E' utile notare che se $h = k$, il valore dell'errore a regime risulta finito. In questo caso bisogna porre attenzione al fatto che il segnale e_k misura l'errore di inseguimento dell'uscita ridotta (essendo $e_k = r - Hy$) e non dell'uscita reale. Nel caso si desideri calcolare l'errore sull'uscita dovremo moltiplicare l'errore sul riferimento per $k_d = 1/H$. In Tabella 5.1 vengono riportate le varie casistiche (errore nullo, finito o infinito) al variare di h e k .

Osservazione: si ricordi che il teorema del valore finale può essere applicato solamente se il sistema è stabile.

	$h = 0$	1	2	...
$k = 0$	F	0	0	...
1	∞	F	0	...
2	∞	∞	F	...
...

Tabella 5.1: Casistica riepilogativa dell'errore a regime.

Principio del modello interno: si immagina che il segnale di riferimento $r(t)$ sia l'uscita di una sistema al cui ingresso sia applicato un impulso. Ad esempio, se $r(t)$ fosse un gradino, la funzione di trasferimento di tale sistema sarà pari a $\frac{1}{s}$ (si ricordi che la trasformata dell'impulso è uguale ad 1).

Osservando la Tabella 5.1 si può notare il seguente fatto: affinché l'errore di inseguimento di un segnale canonico sia nullo (a regime), è sufficiente che il sistema $C(s)G(s)$ contenga al suo interno un termine uguale a quello del sistema generante il segnale di riferimento. Questo fatto è noto come *principio del modello interno*, in quanto è necessario che all'interno di $C(s)G(s)$ sia presente il termine generante il segnale di riferimento.

E' utile notare che tale principio può essere applicato anche a segnali sinusoidali.

Esempio 5.1

Supponiamo di voler valutare l'errore di inseguimento (sull'uscita) al gradino unitario ($A = 1$) di un sistema di tipo 0. Mediante passaggi analoghi a quelli fatti in precedenza avremo che:

$$e(\infty) = \frac{k_d}{k_d + k_c k_G}.$$

L'errore sull'uscita risulterà quindi:

$$e_y(\infty) = \frac{k_d^2}{k_d + k_c k_G}.$$

Questo errore è evidentemente una quantità finita. Supponiamo adesso di voler annullare questo errore. Sarà necessario aggiungere un polo nell'origine al controllore, in modo tale

che diventi del tipo:

$$C(s) = \frac{k_c}{s} C'(s).$$

Supponiamo adesso di avere un sistema di tipo maggiore o uguale ad 1. Se $h = k$ avremo:

$$e_y(\infty) = \frac{k_d^2}{k_c k_G}.$$

Solitamente, verrà richiesto che tale valore risulti minore od uguale ad un certo valore prestabilito ε , ovvero:

$$e_y(\infty) = \frac{k_d^2}{k_c k_G} \leq \varepsilon.$$

Essendo k_G ed k_d fissati, potremo dedurre il campo di ammissibilità per k_c dalla precedente disuguaglianza.

Problema di reiezione dei disturbi

Facendo riferimento alla Fig. 5.8, vogliamo adesso valutare l'influenza del disturbo d sull'andamento del sistema. In questo caso fissiamo il riferimento a zero; la funzione di trasferimento tra il disturbo e l'uscita risulta:

$$T_{d,y} = \frac{1}{1 + CGH} = S$$

che è esattamente uguale alla funzione di trasferimento tra il riferimento e l'errore, ed è pari alla funzione di sensitività. Sarà quindi possibile ripetere tutti i ragionamenti esposti in precedenza, ottenendo risultati analoghi. Ad esempio, potremo affermare che un sistema di tipo 1 reietta completamente eventuali disturbi a gradino sull'uscita del sistema.

5.2.2 Specifiche sul comportamento transitorio

A differenza di quanto visto in precedenza, analizziamo adesso il comportamento dell'uscita in fase transitoria. A tal fine si usa considerare la risposta al gradino del sistema. In generale, tale risposta risulta di tipo oscillatorio, come quella riportata in Fig. 5.13.

E' quindi possibile definire i seguenti indici di prestazione:

- **Tempo di salita (T_s):** è il tempo necessario all'uscita per raggiungere per la prima volta il valore di regime. Talvolta si può indicare con questo termine il tempo

necessario all'uscita per passare dal 10% al 90% del valore di regime. Solitamente si adotta questa seconda definizione quando il valore di regime viene raggiunto asintoticamente.

- **Tempo di assestamento (T_a):** è il tempo necessario affinché l'uscita si assesti entro una banda (solitamente del 2% o 5%) attorno al valore di regime.
- **Sovraelongazione massima (Overshoot) (\hat{s}):** è definita come la differenza tra il valore massimo assunto dall'uscita ed il valore di regime. Solitamente si usa esprimere tale valore in percentuale rispetto al valore di regime. Il valore di tempo T_m corrispondente alla massima sovraelongazione si dice *tempo di massima sovraelongazione* (o *di picco*).

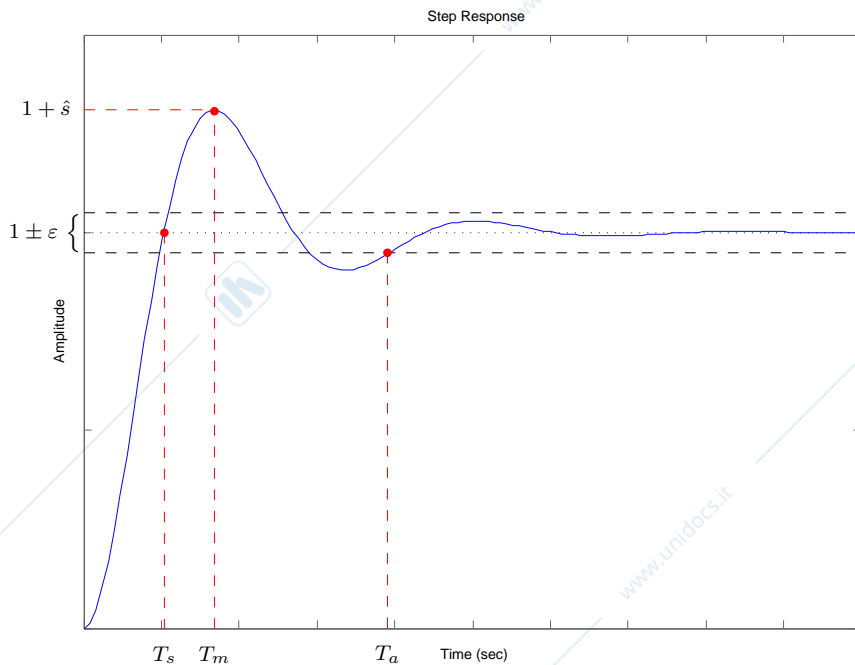


Figura 5.13: Specifiche nel transitorio.

5.2.3 Specifiche sul comando

Supponiamo di avere lo schema riportato in Fig. 5.14, in cui $G(s) = \frac{k_G}{1 + sT}$.

Possiamo calcolare la funzione di sensitività complementare come:

$$T(s) = \frac{k_c G(s)}{1 + k_c G(s)} = \frac{k_c k_G}{1 + sT + k_c k_G} = \frac{k_c k_G}{1 + k_c k_G} \cdot \frac{1}{1 + s \frac{T}{1 + k_c k_G}}$$

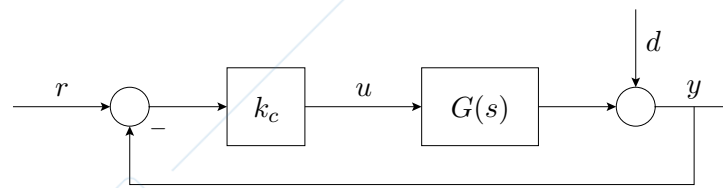


Figura 5.14: Schema di sistema in retroazione.

Analogamente la funzione di sensitività risulterà:

$$S(s) = \frac{1}{1 + k_c G(s)} = \frac{1 + sT}{1 + sT + k_c k_G} = \frac{1}{1 + k_c k_G} \cdot \frac{1 + sT}{1 + s \frac{T}{1 + k_c k_G}}$$

Un incremento di k_c si tradurrà in un aumento della prontezza del sistema. D'altronde, essendo il margine di fase maggiore di zero per qualunque $k_c > 0$, non ci sarà il rischio che il sistema diventi instabile, ed il sistema presenterà una sensitività sempre più bassa al crescere di k_c .

Andiamo adesso ad analizzare la funzione di eccitazione del comando, ovvero la funzione di trasferimento tra il segnale di riferimento r ed il comando u . Risulterà:

$$T_{r,u}(s) = \frac{k_c}{1 + k_c G(s)}$$

Assumendo un riferimento a gradino unitario, avremo:

$$U(s) = T_{r,u}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{k_c}{1 + k_c k_G} \cdot \frac{1 + sT}{1 + s \frac{T}{1 + k_c k_G}}$$

la cui risposta temporale è riportata in Fig. 5.15. Un aumento di k_c si traduce quindi in un aumento del valore del comando u nei primi istanti di tempo. Valori troppo elevati di k_c potranno quindi non essere accettabili dal punto di vista della sicurezza, in quanto potrebbero richiedere dei comandi troppo intensi e produrre quindi malfunzionamenti o rotture dell'impianto. Nota che il valore iniziale [finale] della $u(t)$ può essere calcolato mediante il teorema del valore iniziale [finale] della trasformata di Laplace.

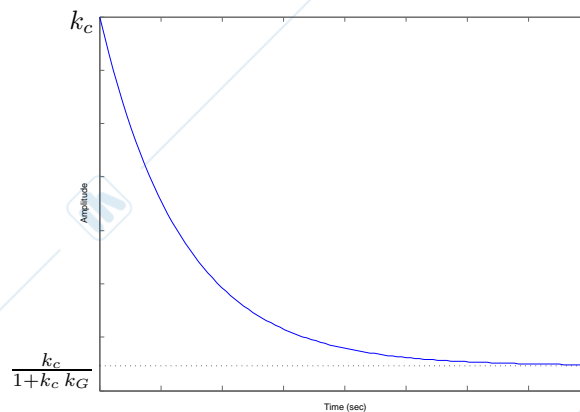


Figura 5.15: Andamento del segnale di comando $u(t)$.

Oltre a quanto descritto in precedenza, una ulteriore specifica inerente il segnale di comando può essere la seguente:

$$|T_{r,u}(j\omega)| \leq \alpha \quad , \quad \forall \omega \geq \bar{\omega} \quad ,$$

dove i valori α ed $\bar{\omega}$ sono fissati. In pratica viene imposto un limite superiore al modulo di $T_{r,u}$ per le alte frequenze.

5.3 Specifiche nel dominio della frequenza

Oltre alle specifiche nel dominio del tempo riportate in precedenza, è possibile definire anche degli indici di prestazione in frequenza sul sistema in anello chiuso. Tali indici, alcuni dei quali sono già stati anticipati in precedenza, sono:

- **Picco di risonanza (M_r):** è definito come il valore massimo del modulo della funzione ad anello chiuso meno il valore in continua. Tale valore viene comunemente espresso in decibel.
- **Banda passante (B_w):** è la frequenza alla quale il modulo della funzione ad anello chiuso è pari al valore in continua meno 3 dB. Essendo la banda passante una pulsazione, essa viene espressa in rad/s .
- **Margine di fase (ϕ_m):** è definito dalla seguente espressione:

$$\phi_m = \angle G(j\omega_c) + 180^\circ$$

dove G è la funzione di trasferimento ad anello aperto e ω_c è la frequenza a cui il modulo di $G(j\omega)$ ha valore unitario.

- **Pulsazione di risonanza** (ω_r): nel caso in cui il sistema ad anello chiuso presenti una risonanza, ω_r è la pulsazione di tale risonanza.
- **Pulsazione di attraversamento** (ω_c): è la pulsazione alla quale il modulo della funzione ad anello aperto è unitario.
- **Coefficiente di smorzamento** (ζ): assumendo che il sistema ad anello chiuso sia approssimabile ad un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati ζ denota il coefficiente di smorzamento di tali poli (ω_n denoterà altresì la loro pulsazione naturale).

Di seguito vengono riportate alcune formule di conversione tra varie specifiche (sia temporali che frequenziali). E' opportuno notare che molte formule sono approssimate (le formule esatte si riferiscono a sistemi del secondo ordine), e che i valori di M_r ed \hat{s} sono espressi in scala assoluta.

$$\phi_m \simeq \frac{2.3 - M_r}{1.25} \quad (\phi_m \text{ espresso in radianti})$$

$$\phi_m \simeq 100 \zeta \quad (\phi_m \text{ espresso in gradi})$$

$$\omega_c \simeq (0.5 \div 0.8) B_w$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r \simeq \frac{1 + \hat{s}}{[0.85 \div 1]}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$B_w = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

$$T_s B_w \simeq 3$$

$$T_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \left[\pi - \text{atan} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right]$$

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$T_{ass}^{2\%} \simeq \frac{4}{\xi \omega_n} = \frac{4}{\text{Re}[p]}$$

$$T_{ass}^{5\%} \simeq \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{\text{Re}[p]}$$

5.3.1 Cifre di merito integrali

Oltre alle specifiche descritte in precedenza, può talvolta essere utile descrivere le prestazioni di un sistema di controllo mediante un unico indice quantitativo. Questo è particolarmente vero in presenza di controllori adattativi o di controllori ottimi, il cui scopo è quello di minimizzare una certa funzione di costo.

Di seguito vengono riportati alcuni indici di prestazione (detti anche *cifre di merito integrali*) basati sull'integrale del segnale di errore (più o meno pesato) a fronte di un ingresso a gradino.

Le cifre di merito maggiormente utilizzate sono riportate di seguito.

- IAE (*Integral Absolute Error*) = $\int_0^{\infty} |e(t)| dt$
- ISE (*Integral Square Error*) = $\int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt$
- $ITAE$ (*Integral Time Absolute Error*) = $\int_0^{\infty} t |e(t)| dt$
- $ITSE$ (*Integral Time Square Error*) = $\int_0^{\infty} t [e(t)]^2 dt$

L'estremo superiore dell'intervallo di integrazione, idealmente infinito, viene in pratica scelto sufficientemente grande affinché il sistema si trovi a regime.

Confrontando gli indici IAE e ISE possiamo notare che l'indice ISE, integrando il quadrato dell'errore, tende a penalizzare maggiormente gli errori di grande ampiezza. Gli indici ITAE e ITSE, dipendendo anche dal tempo, richiedono altresì un errore che non si protragga troppo nel tempo.

Tecniche di progetto di controllori

In questo capitolo sarà descritta una tecnica di progetto classica di controllori denominata *sintesi per tentativi*. Abbiamo visto precedentemente come calcolare il valore del guadagno k_c del controllore e come fissare il tipo del sistema controllato. In questo capitolo analizzeremo come progettare la rimanente parte del controllore, che avevamo chiamato $C'(s)$. Affinché con la realizzazione di $C'(s)$ non vengano modificate le specifiche a regime permanente è necessario che tale funzione di trasferimento abbia guadagno unitario, cioè $C'(0) = 1$.

6.1 Determinazione delle specifiche ad anello aperto

Come abbiamo visto in precedenza, le specifiche di un sistema di controllo, oltre che sul regime permanente, possono essere relative al regime transitorio del sistema in anello chiuso. Dal momento che per la sintesi di un controllore con le tecniche che verranno descritte in seguito è necessario avere a disposizione delle specifiche sull'anello aperto del sistema controllato, risulta evidente la necessità di utilizzare le formule di conversione tra le specifiche riportate in precedenza.

In particolare, le due specifiche che risulteranno utili per la progettazione del controllore sono il margine di fase desiderato (ϕ_m) del sistema ad anello aperto e la frequenza (ω_c) alla quale il modulo del sistema (sempre ad anello aperto) dovrà attraversare l'asse 0 dB.

Di seguito sono riportate alcune delle formule di conversione:

$$\phi_m \simeq \frac{2.3 - M_r}{1.25} \quad \text{dove } M_r \text{ è espresso in scala assoluta (e non in dB) e } \phi_m \text{ in radianti;}$$

$$\omega_c \simeq (0.5 \div 0.8) B_w$$

$$M_r \simeq \frac{1 + \hat{s}}{[0.85 \div 1]} \quad \text{dove } M_r \text{ e } \hat{s} \text{ sono espressi in scala assoluta;}$$

$$T_s B_w \simeq 3$$

Una volta determinato il margine di fase e la frequenza di attraversamento desiderata, si renderà necessario progettare un controllore che soddisfi tali specifiche. A tal fine si utilizzeranno reti a banda derivativa, integrativa o miste.

Osservazione: poiché le relazioni riportate in precedenza sono approssimate, non è garantito che un controllore che soddisfi le specifiche su ϕ_m e ω_c sia effettivamente in grado di soddisfare le specifiche originarie. Nel caso in cui questo non accada sarà necessario ripetere il procedimento di sintesi variando ϕ_m e ω_c in modo opportuno (da qui il nome di “sintesi per tentativi”).

Osservazione: questo metodo può essere sempre applicato ogniqualvolta la funzione da controllare abbia tutti i poli a parte reale negativa o nulla (e guadagno di anello positivo). Infatti, in virtù del criterio di stabilità di Bode, un margine di fase positivo garantirà sicuramente la stabilità del sistema retroazionato.

6.2 Reti a banda derivativa

Una *rete a banda derivativa* (o *rete anticipatrice*) viene utilizzata per anticipare la fase ed allargare la banda del sistema. La funzione di trasferimento di una rete a banda derivativa è la seguente:

$$C_D(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \frac{\tau}{m} s} = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{dove } 0 < \frac{1}{m} \triangleq \alpha < 1, \tau > 0.$$

Lo zero ed il polo della rete valgono:

$$z = -\frac{1}{\tau}, \quad p = -\frac{m}{\tau} = -\frac{1}{\alpha\tau},$$

e la loro posizione nel piano complesso è illustrata in Fig. 6.1, mentre il diagramma di Bode della rete è riportato in Fig. 6.2.

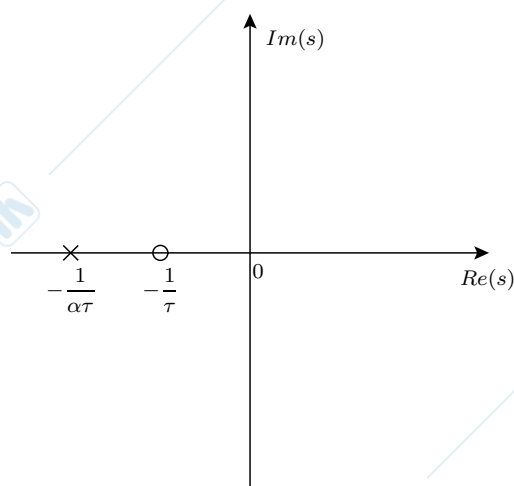


Figura 6.1: Posizione dello zero e del polo di una rete anticipatrice nel piano complesso.

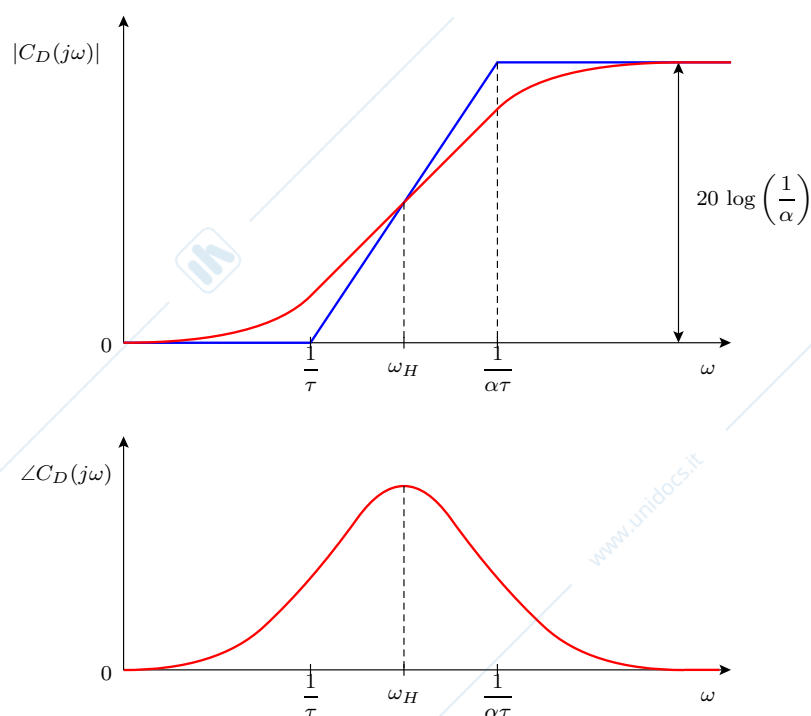


Figura 6.2: Diagramma di Bode di una rete anticipatrice.

Dal diagramma di Bode si deduce che questo tipo di rete opera come un filtro passa alto, amplificando le alte frequenze e producendo un anticipo di fase. La frequenza alla quale si ha il massimo guadagno di fase è pari alla media geometrica tra la posizione del polo e dello zero, cioè:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\alpha\tau}} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}. \quad (6.1)$$

A tale risultato si giunge ponendo a zero la derivata della fase di $C_D(j\omega)$, cioè:

$$\frac{d}{d\omega} [\text{atan}(\omega\tau) - \text{atan}(\omega\alpha\tau)] = 0.$$

Ricordando che $\frac{d}{dx} \text{atan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ottiene:

$$\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2} - \frac{\tau\alpha}{1+\omega^2\tau^2\alpha^2} = 0,$$

che mediante semplici passaggi algebrici conduce alla soluzione.

Il massimo valore della fase risulta quindi pari a $\angle C_D(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_H}$.

Sostituendo il valore di ω_H e dopo opportuni passaggi algebrici si ottiene:

$$\phi_{max} = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{1 - \sin \phi_{max}}{1 + \sin \phi_{max}} \quad (6.2)$$

mentre il valore massimo del modulo (in dB) è pari a:

$$\gamma_{max} = 20 \log \frac{1}{\alpha}.$$

Risulta quindi evidente dalla (6.2) che aumentando la distanza tra lo zero ed il polo (ovvero riducendo il valore di α), si avrà un aumento di fase fino al valore limite di $\frac{\pi}{2}$ (Fig. 6.3). A tale aumento di fase corrisponde però anche un aumento del modulo, che oltre certi limiti potrebbe risultare dannoso ai fini delle prestazioni del sistema. Per questo motivo, nel caso si voglia guadagnare molti gradi in fase (ad esempio più di 60°), è preferibile utilizzare più reti in cascata in modo da ottenere lo stesso guadagno di fase ma una minore amplificazione del modulo.

Mentre il valore di α agisce sul guadagno (di modulo e di fase) della rete, il valore di τ determina la posizione in frequenza dove la rete dovrà agire.

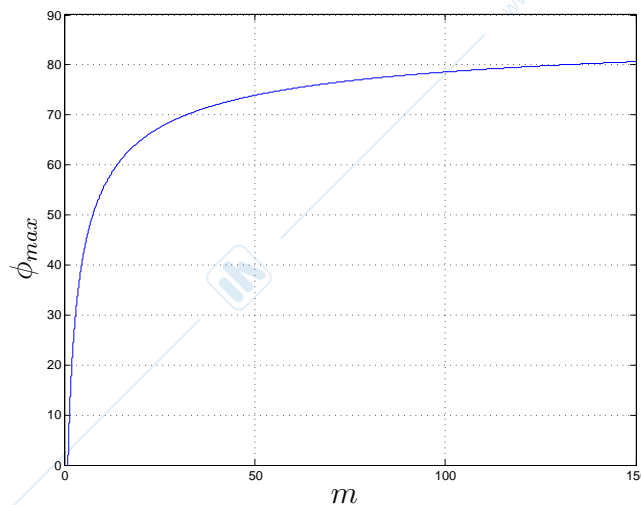


Figura 6.3: Massimo guadagno di fase al variare di $m = \frac{1}{\alpha}$.

Dal punto di vista circuitale, una rete anticipatrice può essere realizzata come illustrato in Fig. 6.4. La funzione di trasferimento di tale circuito risulta:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{1 + sCR_2}{1 + sCR_1}$$

dove i valori di $R_1 < R_2$ e C devono essere dimensionati in modo opportuno. Notare che tale rete risulta essere di tipo invertente (guadagno negativo).

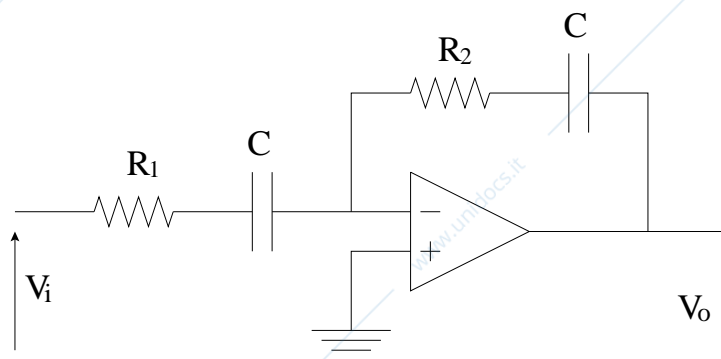


Figura 6.4: Circuito analogico che realizza una rete anticipatrice invertente.

Un metodo alternativo alle (6.1)-(6.2) per la determinazione dei parametri caratteristici di una rete anticipatrice è quello di utilizzare le *carte normalizzate di modulo e fase* (Fig. 6.5). Tali carte riportano, rispettivamente, il modulo e la fase di una rete anticipatrice al variare della frequenza normalizzata $\omega\tau$ calcolati per diversi valori di m . Una volta selezionato il valore desiderato di m ed $\omega\tau$, per ricavare la posizione dove piazzare la rete ($\bar{\tau}$), dovremo risolvere:

$$\omega_c \bar{\tau} = \omega\tau \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{\omega\tau}{\omega_c}$$

dove ω_c denota il valore della pulsazione di attraversamento desiderata, ovvero della pulsazione corrispondente ad un modulo di 0 dB.

La rete derivativa risulterà quindi:

$$C_D(s) = \frac{1 + \bar{\tau}s}{1 + \frac{\bar{\tau}}{m}s} = \frac{1 + \frac{\omega\tau}{\omega_c}s}{1 + \frac{\omega\tau}{\omega_c m}s}$$

6.3 Reti a banda integrativa

Una *rete a banda integrativa* (o *rete ritardatrice*) viene utilizzata per ridurre il modulo del sistema alle alte frequenze, mantenendo invariato il guadagno in continua. Tale operazione

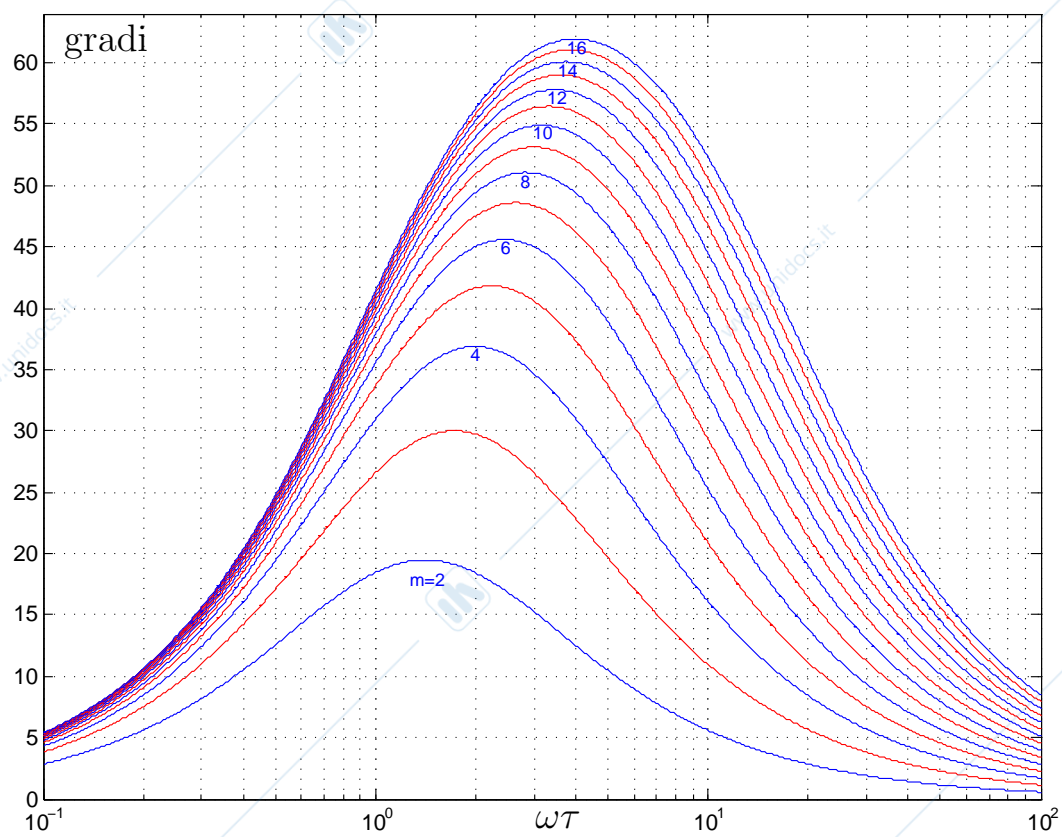
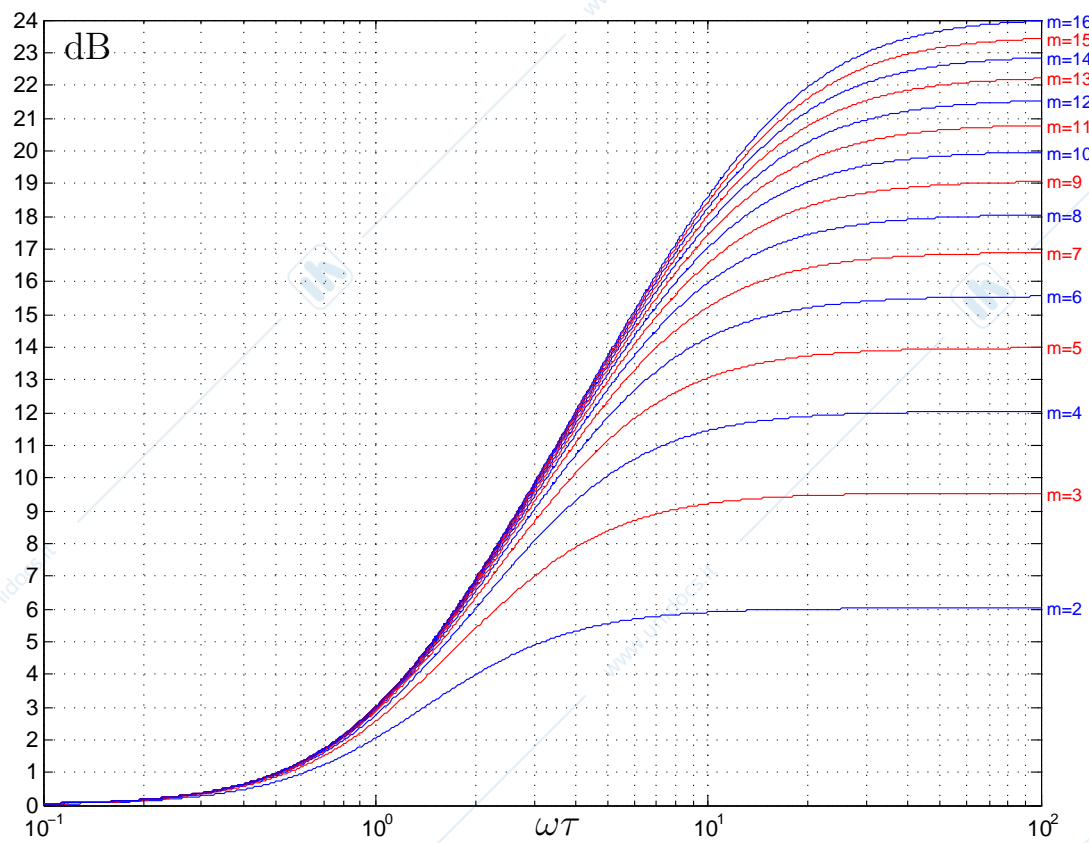


Figura 6.5: Carte normalizzate di modulo e fase.

tenderà a diminuire la banda del sistema. La funzione di trasferimento di una rete a banda integrativa è la seguente:

$$C_I(s) = \frac{1 + \frac{\tau}{m}s}{1 + \tau s} = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \text{dove } 0 < \frac{1}{m} \triangleq \alpha < 1, \tau > 0.$$

Lo zero ed il polo della rete valgono:

$$z = -\frac{m}{\tau} = -\frac{1}{\alpha\tau}, \quad p = -\frac{1}{\tau},$$

e la loro posizione nel piano complesso è illustrata in Fig. 6.6, mentre il diagramma di Bode della rete è riportato in Fig. 6.7.

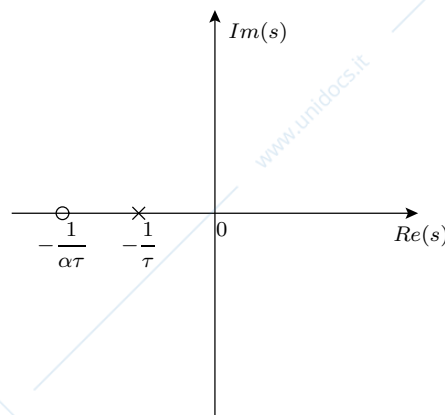


Figura 6.6: Posizione dello zero e del polo di una rete ritardatrice nel piano complesso.

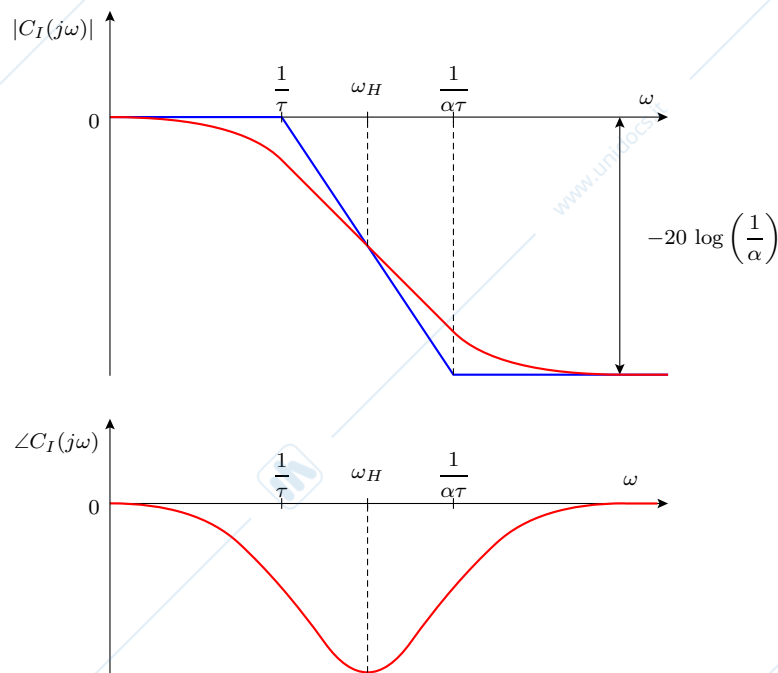


Figura 6.7: Diagramma di Bode di una rete ritardatrice.

Dal diagramma di Bode si deduce che questo tipo di rete opera come un filtro passa basso, attenuando le alte frequenze e producendo un ritardo di fase. La frequenza alla quale si ha la massima perdita di fase è pari alla media geometrica tra la posizione del polo e dello zero, cioè:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\alpha\tau}} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}.$$

La massima perdita di fase risulta:

$$\phi_{min} = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

mentre il valore minimo del modulo è pari a:

$$\gamma_{min} = -20 \log \frac{1}{\alpha}. \quad (6.3)$$

Poiché tale rete viene solitamente utilizzata per ridurre il modulo del sistema attenuando la fase il meno possibile, si usa scegliere un valore di τ in modo tale che il polo e lo zero si trovino sufficientemente a sinistra della frequenza di attraversamento desiderata. Una possibile scelta può essere quella di posizionare il polo due decadi a sinistra rispetto alla frequenza ω_c , cioè $\tau = \frac{100}{\omega_c}$.

Osservazione: un posizionamento della rete ritardatrice a frequenze troppo basse può produrre il cosiddetto *effetto coda* (Fig. 6.8), ovvero la risposta del sistema può impiegare un tempo lungo per assestarsi al suo valore di regime. Questo è dovuto al fatto che un polo ad anello chiuso si trova in prossimità dell'asse immaginario.

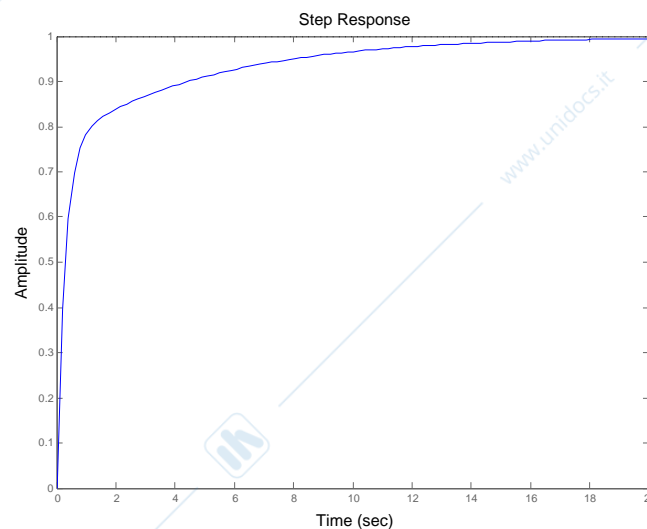


Figura 6.8: Effetto coda.

Dal punto di vista circuitale, una rete ritardatrice può essere realizzata allo stesso modo di una anticipatrice (Fig. 6.4) con la sola differenza che in questo caso dovrà essere $R_1 > R_2$.

Esempio 6.1

Sia dato il sistema riportato in Fig. 6.9 dove

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.2s)}.$$

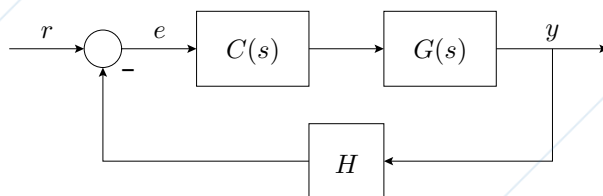


Figura 6.9: Sistema di controllo in retroazione dell'esempio 6.1.

Vogliamo determinare i valori di $C(s)$ e H in modo tale che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

1. Rapporto ingresso-uscita $y/r = 1$.
2. Errore di inseguimento alla rampa lineare a regime $e_{rampa} \leq \frac{1}{30}$.
3. Picco di risonanza $M_r \leq 3$ dB.
4. Banda passante $B_w \geq 12$ rad/s.

Affinché sia soddisfatta la 1) è necessario che $H = 1$, e che quindi il sistema sia in retroazione unitaria.

Vogliamo adesso progettare un controllore della forma $C(s) = \frac{k_c}{s^h} C'(s)$ con $C'(0) = 1$.

Poiché la 2) richiede un errore di inseguimento alla rampa finito, significa che il sistema deve essere di tipo 1. Poiché la $G(s)$ è già di tipo 1, non sarà necessario aggiungere un polo nell'origine al controllore ($h = 0$). Per la determinazione del valore k_c è sufficiente ricordare che:

$$e_{rampa} = \frac{k_d^2}{k_g k_c}.$$

Essendo $k_d = 1$ e $k_g = 1$, la 2) sarà soddisfatta $\forall k_c: k_c \geq 30$: fissiamo quindi $k_c = 30$.

Rimane adesso da determinare la funzione di trasferimento $C'(s)$. Innanzitutto trasformiamo le specifiche richieste nei corrispondenti valori di ϕ_m e ω_c .

$$M_r = 3 \text{ dB} = 1.41 \quad \longrightarrow \quad \phi_m = \frac{2.3 - M_r}{1.25} = 0.71 \text{ rad} \simeq 41^\circ$$

$$\omega_c = [0.5 \div 0.8] B_w \quad \rightarrow \quad \omega_c = [6 \div 9.6]. \quad \text{Fissiamo } \omega_c = 8 \text{ rad/s.}$$

Il diagramma di Bode della funzione $\bar{G}(s) = k_c G(s)$ è riportato in Fig. 6.10. Da tale diagramma si può osservare che alla pulsazione di 8 rad/s il modulo vale circa 3.8 dB e la fase -187° .

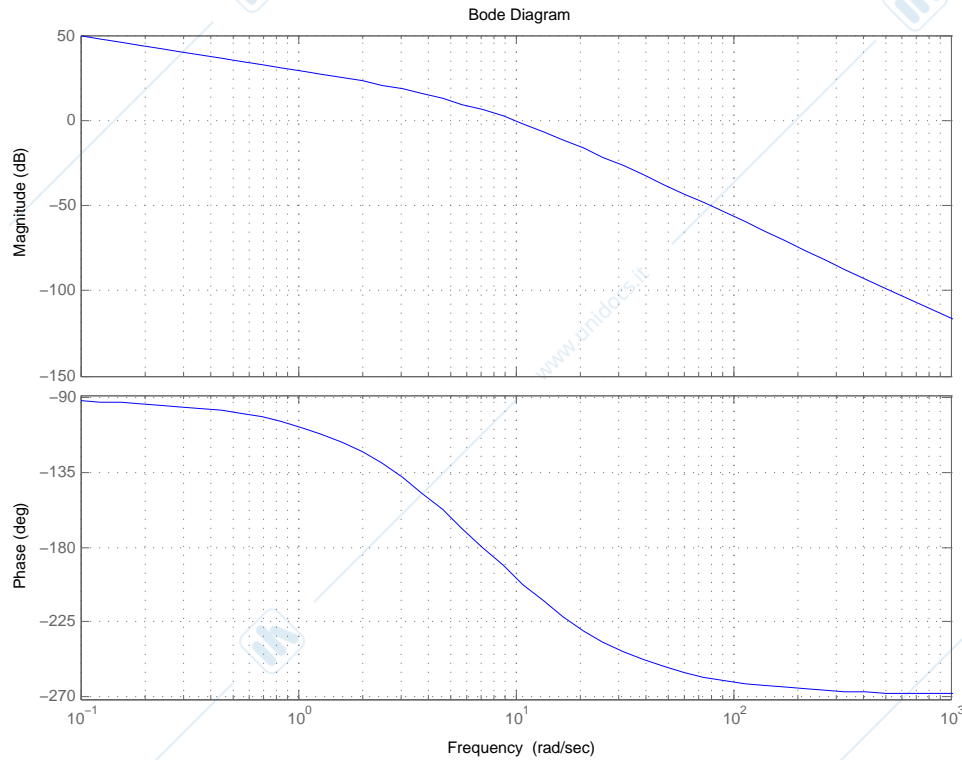


Figura 6.10: Diagramma di Bode del sistema non controllato $\bar{G}(j\omega)$.

Dovremo quindi aumentare la fase di $\Delta\phi_m = (7 + 41 + \varepsilon)$ gradi ed abbassare il modulo di 3.8 decibel. Risulta quindi necessario l'uso sia di una rete anticipatrice che di una ritardatrice. Per semplicità si è soliti progettare per prima la rete anticipatrice. Sarà opportuno abbondare sul valore di ε poiché questa rete sarà posta in cascata ad una ritardatrice che produrrà una piccola diminuzione di fase. Fissiamo quindi:

$$\Delta\phi_m = 7 + 41 + \varepsilon = 55^\circ.$$

Dalla (6.2) risulta che:

$$\alpha = \frac{1 - \sin 55}{1 + \sin 55} \simeq 0.1 \quad \rightarrow \quad m = 10.$$

Poiché vogliamo centrare questa rete alla frequenza ω_c risulterà:

$$\frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}} = \omega_c \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\alpha}} \simeq 0.4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{\tau} \simeq -2.5 \text{ rad/s} \\ p = -\frac{1}{\alpha\tau} \simeq -25 \text{ rad/s.} \end{cases}$$

La rete anticipatrice sarà quindi:

$$C_a(s) = \frac{1 + 0.4s}{1 + 0.04s}$$

Il diagramma di Bode della funzione $\bar{G}(s)$ in cascata con la rete anticipatrice $C_a(s)$ è riportato in Fig. 6.11.

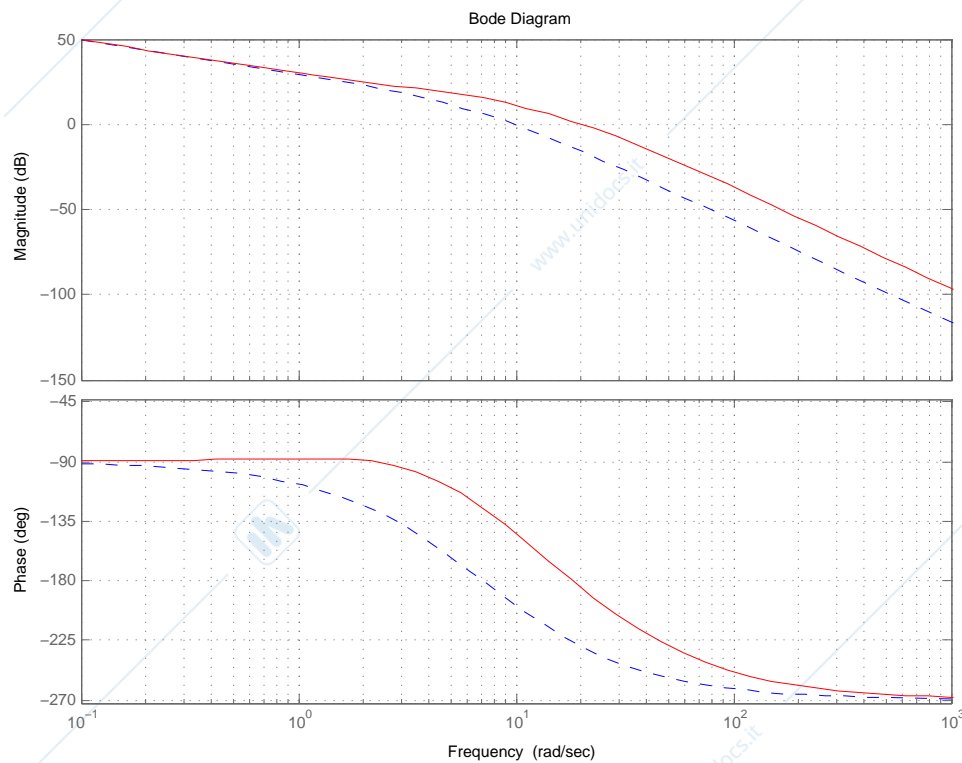


Figura 6.11: Diagramma di Bode del sistema $\bar{G}(j\omega)$ (---) e di $\bar{G}(j\omega)C_a(j\omega)$ (—).

Alla frequenza $\omega_c = 8 \text{ rad/s}$ risulta che il modulo vale 13.9 dB e la fase -132° .

Vogliamo adesso ridurre il modulo di 13.9 dB riducendo il meno possibile la fase. Utilizzeremo una rete integrativa centrata ad una bassa frequenza minore della banda del controllo, e tale che la massima riduzione in modulo sia pari a 13.9 dB . Per la (6.3) si ha:

$$\gamma_{\min} = -20 \log \frac{1}{\alpha} = -13.9 \quad \longrightarrow \quad \alpha = 10^{-\frac{13.9}{20}} \simeq 0.2.$$

Adesso è necessario determinare il valore di τ . Possiamo scegliere τ in modo tale che il polo sia posizionato due decadi a sinistra rispetto al valore di ω_c . Questo garantisce in generale che la variazione di fase della rete ritardatrice alla frequenza ω_c sia piccola

($< 10^\circ$). Quindi:

$$\begin{cases} p = -\frac{1}{\tau} = -\omega_c/100 = -0.08 \text{ rad/s} & \rightarrow \tau = \frac{100}{\omega_c} = 12.5 \\ z = -\frac{1}{\alpha\tau} = -0.4 \text{ rad/s.} \end{cases}$$

La rete ritardatrice risulterà:

$$C_r(s) = \frac{1 + 2.5 s}{1 + 12.5 s}$$

mentre il controllore finale sarà:

$$C(s) = k_c C_a(s) C_r(s).$$

Il diagramma di Bode della funzione controllata è riportato in Fig. 6.12. Da tale diagramma è possibile verificare che $\phi_m \simeq 46^\circ$ e $\omega_c \simeq 7.95 \text{ rad/s}$. Questo significa che le specifiche ad anello aperto sono state soddisfatte, ma non garantisce che anche le specifiche di partenza lo siano. A tal fine è necessario valutare il picco di risonanza e la banda passante del sistema ad anello chiuso. Possiamo quindi tracciare il diagramma di Nichols (Fig. 6.13) e valutare i valori di picco di risonanza e banda passante. In questo caso, il picco di risonanza risulta minore di 3 dB in quanto il diagramma è esterno alla curva a 3 dB (risulta $M_r = 2.38 \text{ dB}$), mentre la banda passante è circa 13.8 rad/s. Possiamo quindi concludere che il controllore progettato soddisfa le specifiche richieste.

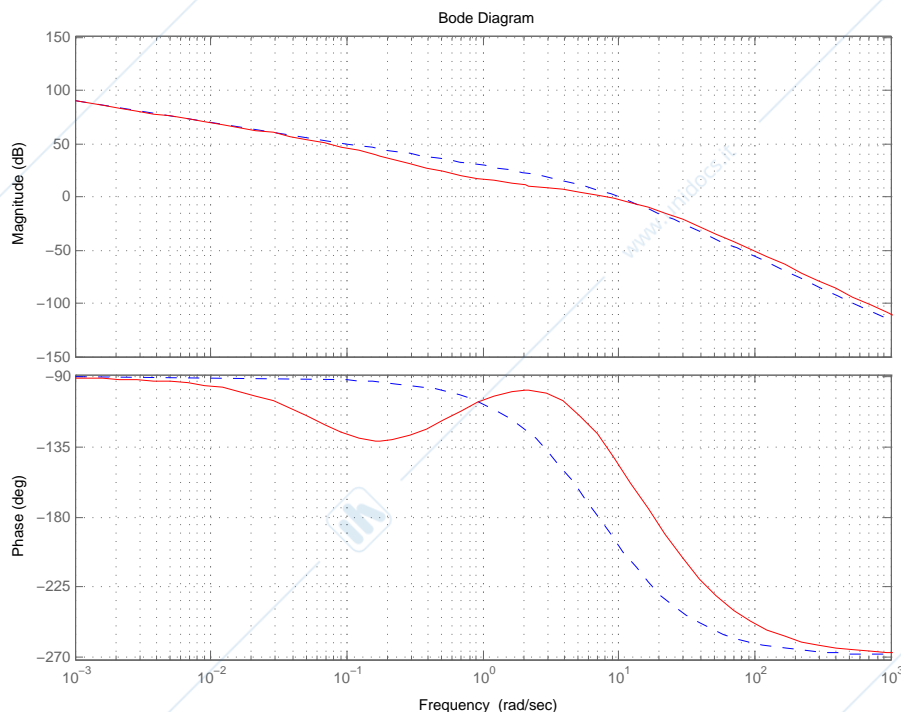


Figura 6.12: Diagramma di Bode del sistema $\bar{G}(j\omega)$ (---) e di $\bar{G}(j\omega) C_a(j\omega) C_r(j\omega)$ (-).

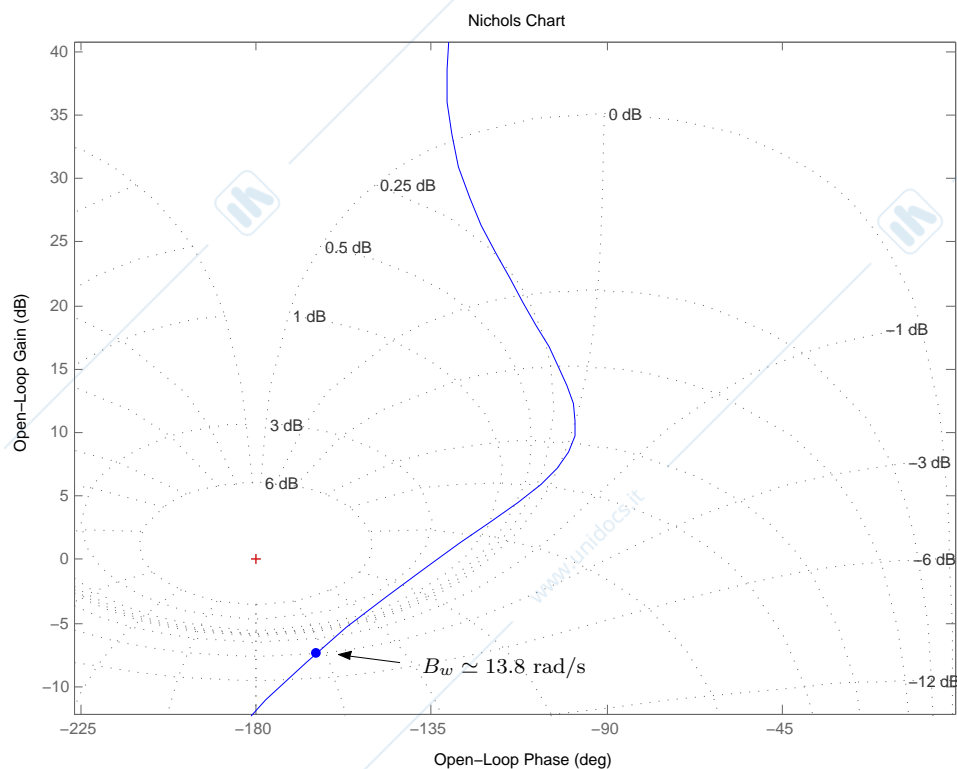


Figura 6.13: Diagramma di Nichols del sistema $G(j\omega)C(j\omega)$.

Esempio 6.2

Sia dato il sistema riportato in Fig. 6.14.

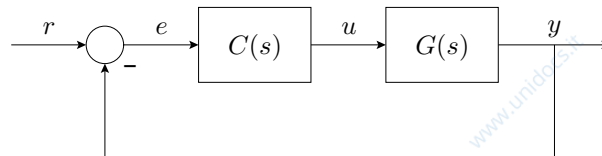


Figura 6.14: Sistema di controllo in retroazione dell'esempio 6.2.

Sia $T_{ru}(s)$ la funzione di trasferimento tra il riferimento ed il comando, cioè:

$$T_{ru}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Una possibile richiesta può essere quella di voler limitare il valore del modulo di $T_{ru}(j\omega)$ oltre una certa frequenza, ovvero:

$$|T_{ru}(j\omega)| \leq \delta \quad , \quad \forall \omega \geq \bar{\omega}. \quad (6.4)$$

Solitamente $\bar{\omega}$ è situato alle alte frequenze, dove vale $|C(j\omega)G(j\omega)| \ll 1, \forall \omega \geq \bar{\omega}$.

Avremo quindi:

$$|T_{ru}(j\omega)| \simeq |C(j\omega)| \quad , \quad \forall \omega \geq \bar{\omega}.$$

Supponiamo di aver progettato un controllore mediante una rete anticipatrice ed una ritardatrice, cioè:

$$C(s) = k_c \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \frac{1 + \beta t s}{1 + t s} \quad , \quad \alpha, \beta < 1.$$

Per valori di ω sufficientemente grandi (ad esempio $\omega \geq \bar{\omega}$) vale:

$$T_{ru}(j\omega) \simeq \lim_{\omega \rightarrow \infty} |T_{ru}(j\omega)| \simeq \lim_{\omega \rightarrow \infty} |C(j\omega)| = |k_c| \frac{\beta}{\alpha}.$$

Affinché la (6.4) sia soddisfatta dovrà quindi valere:

$$|k_c| \frac{\beta}{\alpha} \leq \delta. \quad (6.5)$$

Risulta quindi immediato che la (6.5) rappresenta un ulteriore vincolo da tenere in considerazione durante la progettazione della rete di controllo.

I Controllori PID

7.1 Generalità dei controllori PID

Una classe di controllori molto utilizzata in applicazioni industriali sono i controllori PID (o controllori standard). Si stima che oltre il 95% di tutti i sistemi di controllo utilizzati per il controllo di processo sia realizzato mediante regolatori PID (la maggior parte dei quali sono solamente PI). Tali controllori elaborano il segnale errore in ingresso attraverso tre blocchi (uno ad azione proporzionale, uno ad azione integrativa e uno ad azione derivativa), i cui guadagni sono i gradi di libertà in fase di progetto del controllore (Fig. 7.1). Questa classe di controllori risulta particolarmente adatta per il controllo di basso livello di processi con dinamiche non troppo ostili e con richieste di prestazioni non eccessivamente spinte.

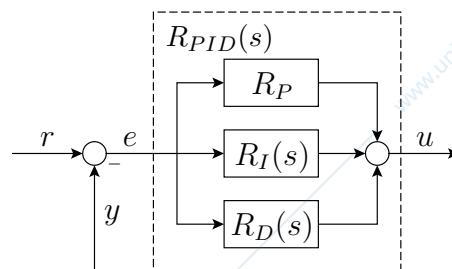


Figura 7.1: Schema di un PID ideale.

I controllori PID ideali

Il segnale di uscita di un controllore PID ideale è dato da:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

con $K_P, K_I, K_D \geq 0$ (nell'ipotesi che il guadagno di processo sia positivo).

La funzione di trasferimento di un PID ideale è:

$$R_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}. \quad (7.1)$$

Una forma alternativa alla (7.1) più utilizzata in pratica è la seguente:

$$R_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \left(\frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s} \right) \quad (7.2)$$

$T_I = K_P / K_I \longleftrightarrow$ costante di tempo integrale (o di reset).

$T_D = K_D / K_P \longleftrightarrow$ costante di tempo derivativa.

La struttura descritta in (7.2) è detta ISA PID.

Casi particolari

Non sempre risulta necessario dover utilizzare tutti i gradi di libertà di un controllore PID per ottenere le prestazioni desiderate. E' infatti opportuno ricordare che a parità di prestazioni, è sempre preferibile realizzare un controllore semplice. Casi particolari dei controllori PID sono i regolatori P , PI e PD nei quali vengono posti a zero alcuni parametri. Le funzioni di trasferimento di tali controllori sono le seguenti:

- $R_P = K_P$ [Controllore Proporzionale]
- $R_{PI}(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{1 + T_I s}{T_I s}$ [Controllore Proporzionale-Integrale]
- $R_{PD}(s) = K_P + K_D s = K_P (1 + T_D s)$ [Controllore Proporzionale-Derivativo]

Come si evince dalla (7.1) e dalla (7.2), i regolatori PID ideali hanno un polo nell'origine e 2 zeri in

$$z_{1,2} = \frac{-K_P \pm \sqrt{K_P^2 - 4K_D K_I}}{2K_D} = \frac{-T_I \pm \sqrt{T_I(T_I - 4T_D)}}{2T_I T_D}$$

Al variare dei parametri, i due zeri possono essere complessi, reali distinti o reali coincidenti (se $T_i = 4T_D$). In ogni caso essi avranno sempre parte reale negativa. Spesso, per semplificare la taratura, si preferisce avere 2 zeri reali coincidenti. In questo caso i due zeri risulteranno $z_{1,2} = -\frac{2}{T_I} = -\frac{1}{2T_D}$.

Realizzazione causale dei controllori PID

Poiché le funzioni di trasferimento (7.1)-(7.2) non sono proprie, risultano irrealizzabili in pratica. Per avere una funzione di trasferimento propria si aggiunge un polo al blocco derivatore ottenendo:

$$R_{PID}^r(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + \frac{T_D}{N} s} \right) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + \frac{K_D}{K_P N} s}$$

in cui il polo aggiunto è in $s = -N/T_D$.

Poiché al crescere di N , $R_{PID}^r \rightarrow R_{PID}$, e $|R_{PID}(j\omega)| \rightarrow \infty$ per $\omega \rightarrow \infty$, allora per moderare l'eccitazione del comando da parte delle componenti ad alta frequenza dei disturbi in anello d , bisogna selezionare N il più basso possibile, compatibilmente con il posizionare il polo aggiuntivo fuori dalla banda del controllo. Solitamente $N = 5 \div 20$, ma ci possono essere casi particolari in cui $N < 5$, ad es. $N = 1$.

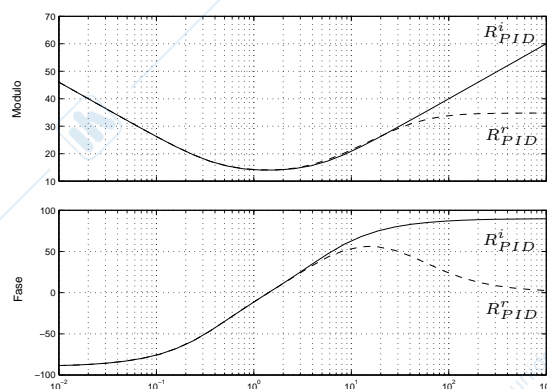


Figura 7.2: Diagramma di Bode di un controllore PID ideale (—) e reale (---).

Esempio 7.1 Si data la seguente funzione di trasferimento da controllare

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+3)}$$

Si assuma di voler utilizzare un controllore PID ideale con: $K_P = 3$, $K_I = 2$, $K_D = 1$ ($T_I = 3/2$, $T_D = 1/3$), ovvero

$$R_{PID}(s) = 3 + \frac{2}{s} + s = \frac{(s+1)(s+2)}{s}$$

Risulterà:

$$L(s) = R_{PID}(s) G(s) = \frac{5(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$$

per cui avremo:

$$\omega_c \simeq 1.84 \text{ rad/s} \quad , \quad \phi_m = 39.6^\circ \quad , \quad K_m \rightarrow \infty,$$

dove con ω_c denotiamo la frequenza di attraversamento degli 0dB, con ϕ_m il margine di fase e con K_m il margine di guadagno.

Se si considera un PID reale con $N = 5$ (polo aggiuntivo in $-N/T_D = -15$) si ottiene:

$$\omega_c \simeq 1.93 \text{ rad/s} \quad , \quad \phi_m = 37^\circ \quad , \quad K_m \simeq 16.6 \text{ dB}.$$

In Fig. 7.3 è riportata la risposta al gradino del sistema per i due controllori.

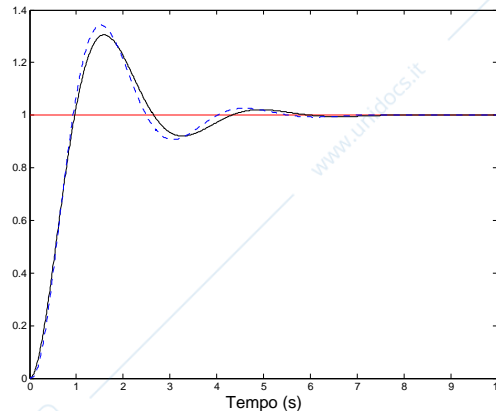


Figura 7.3: Risposta al gradino del sistema controllato mediante PID ideale (—) e reale con $N = 5$ (---).

Osserviamo adesso gli andamenti di y e u per $N = 5$ e $N = 30$ nel caso in cui il sistema sia soggetto ad un disturbo sull'uscita a spettro costante. In Fig. 7.4 viene riportata l'uscita del sistema per le due scelte di N . Si può notare che le due uscite sono quasi perfettamente coincidenti. In Fig. 7.5 sono invece riportati i segnali di comando; in questo caso si può notare come la scelta di un valore di $N = 5$ produca una migliore attenuazione delle oscillazioni dovute al disturbo.

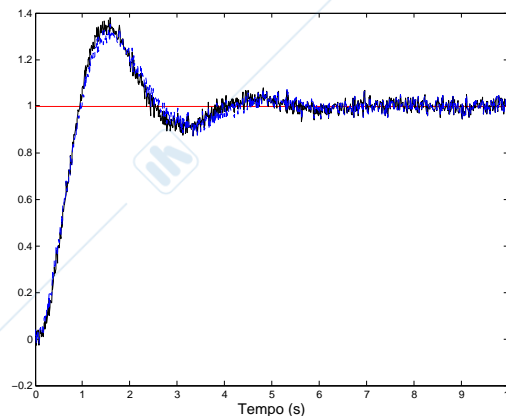


Figura 7.4: Risposta al gradino per $N = 5$ (—) e $N = 30$ (---).

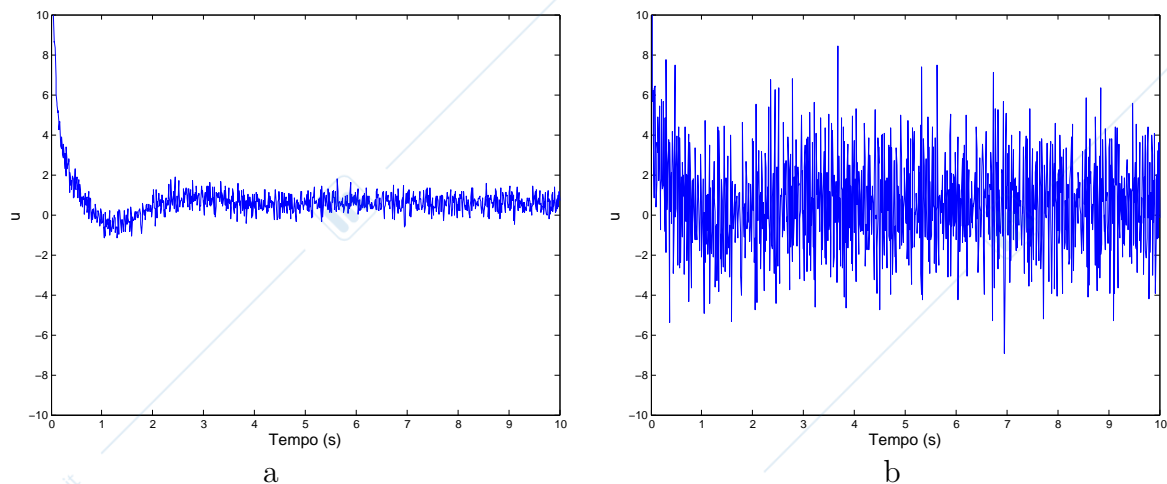


Figura 7.5: Andamento del comando u per $N = 5$ (a) e per $N = 30$ (b).

7.2 Blocco derivatore sull'uscita del sistema

Poiché il riferimento in un sistema controllato può contenere segnali a gradino o comunque segnali con rapida variazione, negli istanti in cui si ha una variazione, il blocco derivatore fornisce un contributo al segnale di attuazione molto elevato che può non essere accettabile in quanto troppo sollecitante per l'attuatore. Si usa allora sottoporre ad azione derivativa l'uscita y piuttosto che il segnale di errore e come riportato in Fig. 7.6b.

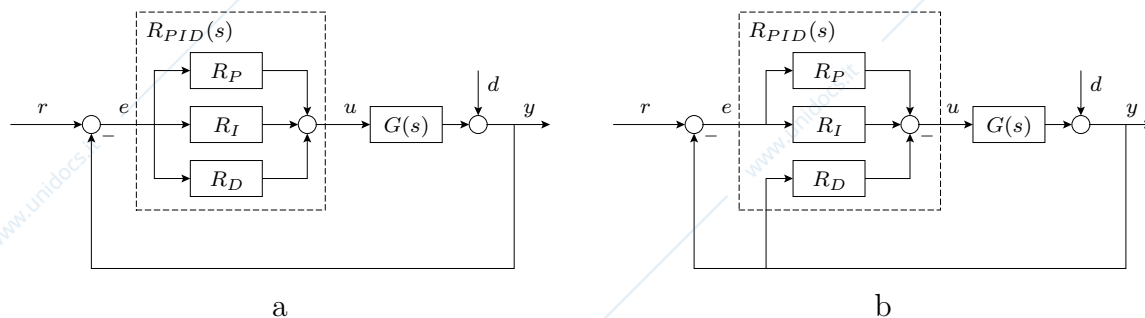


Figura 7.6: PID con azione derivativa sul segnale di errore (a), e sull'uscita (b).

Andiamo adesso a calcolare le espressioni dell'uscita e del comando in funzione del segnale di riferimento e del disturbo per le due strutture riportate in Fig. 7.6.

Per quanto riguarda lo schema in Fig. 7.6a, risulta:

$$Y(s) = \frac{R_{PID}(s) G(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)} R(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + R_{PID}(s) G(s)}}_{S(s)} D(s)$$

$$U(s) = \frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)} R(s) - \underbrace{\frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}}_{Q(s)} D(s),$$

mentre per quanto riguarda lo schema in Fig. 7.6b, si ha:

$$Y(s) = \frac{R_{PI}(s)G(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)} R(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + R_{PID}(s)G(s)}}_{S(s)} D(s)$$

$$U(s) = \frac{R_{PI}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)} R(s) - \underbrace{\frac{R_{PID}(s)}{1 + R_{PID}(s)G(s)}}_{Q(s)} D(s).$$

Confrontando le espressioni sopra riportate si può concludere che:

- I poli ad anello chiuso delle due configurazioni sono gli stessi.
- Le funzioni di trasferimento $S(s) = Y(s)/D(s)$ e $Q(s) = U(s)/D(s)$ sono identiche nelle due configurazioni.
- La funzione $T(s) = Y(s)/R(s)$ ha sempre guadagno unitario e $S(s)$ ha uno zero nell'origine; quindi il sistema riesce ancora ad inseguire un riferimento a gradino senza errori e a garantire la reiezione dei disturbi costanti.

Facendo riferimento all'esempio 7.1, in Fig. 7.7 è riportata la risposta a gradino del PID reale (con $N = 5$) sia per il caso di blocco derivatore collegato al segnale errore che per quello collegato all'uscita. Risulta evidente come l'ampiezza del comando nei primi istanti di tempo sia ridotta nello schema con derivatore sull'uscita.

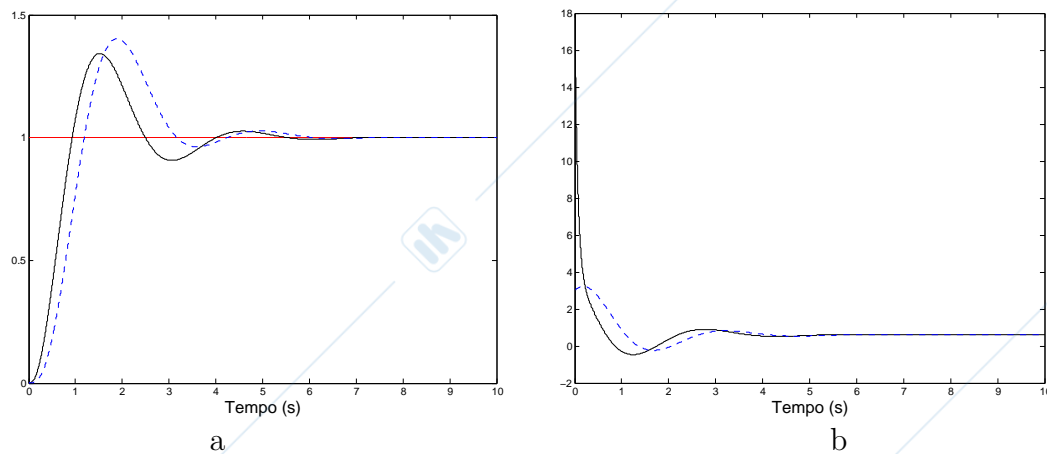


Figura 7.7: (a) Risposta al gradino del sistema dell'esempio 7.1 ($N = 5$) con azione derivativa sull'errore (—) e sull'uscita (---). (b) Relativo segnale di comando $u(t)$.

7.3 Desaturazione dell'azione integrale (schemi anti-windup)

Gli attuatori utilizzati nei sistemi di controllo presentano sempre dei vincoli sull'ampiezza delle uscite, che non possono superare dei valori massimi e minimi. Quando si utilizza un regolatore con azione integrale, è possibile che l'uscita del controllore raggiunga i suddetti vincoli; in tal caso l'azione dell'attuatore non può crescere, anche se l'errore di regolazione $e(t)$ non è nullo.

Assumiamo per comodità di avere un compensatore puramente integrale del tipo K_I/s . La situazione reale che spesso si incontra è quella riportata in Fig. 7.8 (attuatore in saturazione), in cui:

$$m(t) = \begin{cases} -U_M & , \text{ se } u(t) < -U_M \\ u(t) & , \text{ se } |u(t)| \leq U_M \\ U_M & , \text{ se } u(t) > U_M \end{cases}$$

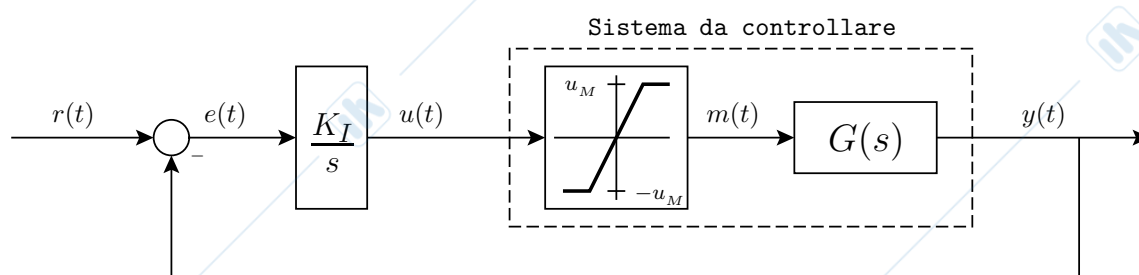


Figura 7.8: Schema in cui l'attuatore presenta una saturazione.

Il fenomeno del windup

In presenza di saturazione, come detto in precedenza, può verificarsi che l'uscita dell'attuatore non cresca, pur rimanendo l'errore di regolazione $e(t)$ non nullo. Conseguentemente, il termine integrale continua a crescere, ma tale incremento non produce alcun effetto sulla variabile di comando dell'impianto. Tale situazione, oltre a non far funzionare correttamente il regolatore, rende inattivo il regolatore anche quando l'errore diminuisce o si inverte di segno; infatti, il sistema di regolazione può riattivarsi solo allorché il segnale $u(t)$ rientra nella zona di linearità della caratteristica dell'attuatore (*scarica del termine integrale*). Questo fenomeno si chiama comunemente *carica integrale* o *integral windup*. È opportuno notare che le componenti proporzionale e derivativa non sono affette da questo problema, per cui possiamo ricondurci al caso in cui si abbia solamente il termine integrativo.

Esempio 7.2

Sia data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4}{s+2}.$$

Assumiamo di utilizzare un controllore integrale con $K_I = 1$. In condizioni di linearità risulta:

$$\omega_c \simeq 1.57 \text{ rad/s} \quad , \quad \phi_m \simeq 52^\circ.$$

Supponiamo adesso che l'attuatore presenti una saturazione con $U_M = 0.53$. I risultati della simulazione per un ingresso a gradino sono mostrati in Fig. 7.9.

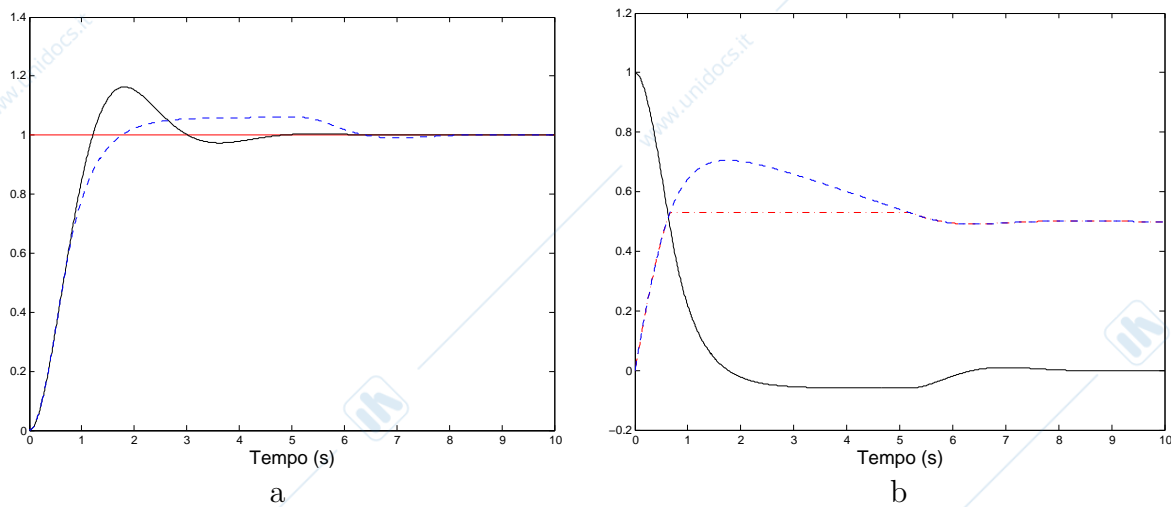


Figura 7.9: (a) Risposta di un sistema in assenza (—) e in presenza (---) di saturazione. (b) Andamento dei segnali di $e(t)$ (—), $u(t)$ (---) ed $m(t)$ (· ·) in presenza di saturazione.

Schema di desaturazione (generale)

Dato un controllore $C(s)$ con un polo in 0, uno schema di controllo con anti-windup deve essere tale che:

- se il comando non satura, lo schema deve essere equivalente al controllore $C(s)$;
- se il comando satura, lo schema deve essere tale da non far crescere eccessivamente il contributo del termine integrale, garantendo una rapida desaturazione.

Il problema del windup può essere evitato interrompendo l'azione integrale non appena l'uscita del controllore raggiunge il livello di saturazione dell'attuatore. Questo si realizza inserendo esplicitamente un blocco di saturazione all'interno dello schema di controllo.

Una possibile soluzione di carattere generale è riportata in Fig. 7.10.

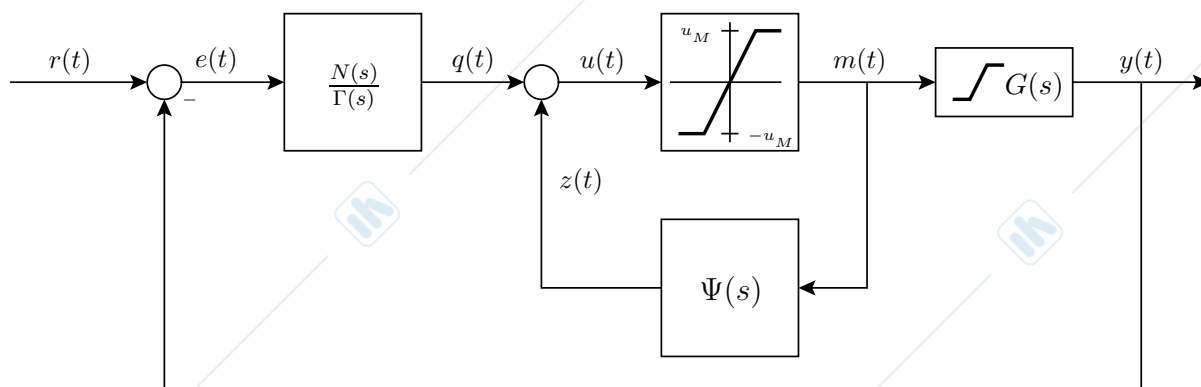


Figura 7.10: Schema di realizzazione di un controllore con dispositivo anti-windup.

Supponiamo che il controllore PID che deve essere realizzato sia della forma generale

$$R_{PID}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \text{con } D(0) = 0,$$

in cui la condizione $D(0) = 0$ implica la presenza di un blocco integrale nel controllore.

Supponiamo che sia $N(0) > 0$. Allora, riferendosi allo schema riportato in Fig. 7.10, si sceglie $\Gamma(s)$ in modo tale che la funzione di trasferimento

$$\Psi(s) = \frac{\Gamma(s) - D(s)}{\Gamma(s)}$$

sia asintoticamente stabile, strettamente propria e con guadagno unitario ($\Psi(0) = 1$). Si può allora osservare che:

- Se l'attuatore opera in regione di linearità, la funzione di trasferimento fra $e(t)$ e $m(t)$ coincide con la $R_{PID}(s)$ desiderata.
- Se il segnale errore $e(t)$ permane dello stesso segno per un tempo elevato, allora anche $q(t)$, in funzione della dinamica di $\Gamma(s)$, assumerà lo stesso segno; $m(t)$ satura al valore massimo U_M dell'attuatore. Dato che $\Psi(0) = 1$, anche $z(t)$ si assesterà al valore U_M , sempre con una dinamica che dipende da $\Gamma(s)$. Se $e(t)$ cambia di segno, anche $q(t)$ cambia segno e quindi il segnale $u(t) = q(t) + z(t)$ scende subito sotto il valore di saturazione U_M , attivando il comportamento lineare dell'attuatore. Le prestazioni del sistema di desaturazione dipendono dalla scelta del polinomio $\Gamma(s)$, che costituisce il nucleo del progetto del desaturatore.

E' opportuno notare che lo schema riportato in Fig. 7.10 è generale e può essere applicato anche a controllori non necessariamente di tipo PID.

Esempio 7.3

Facendo riferimento alle funzioni dell'esempio 7.2, assumiamo:

$$\Gamma(s) = s + 8 \quad \Rightarrow \quad \Psi(s) = \frac{8}{s + 8}.$$

La risposta del sistema desaturato è riportata in Fig. 7.11.

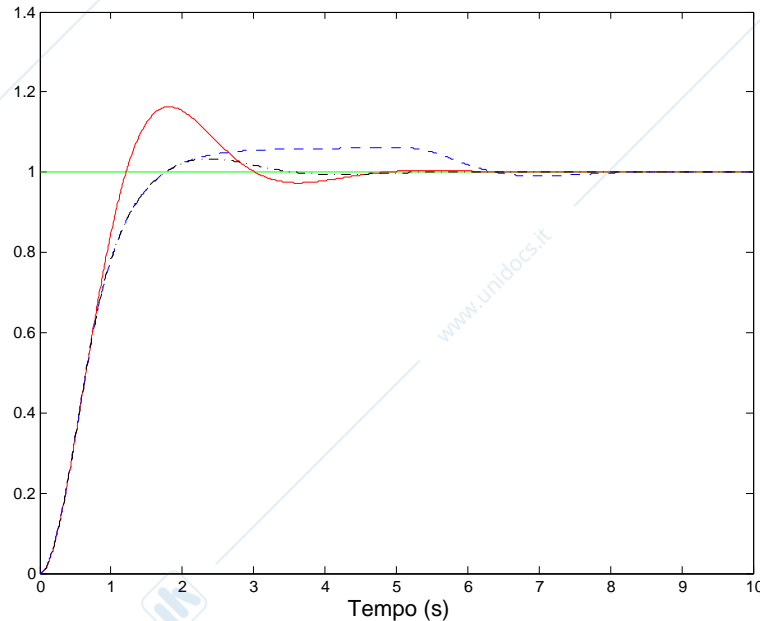


Figura 7.11: Risposta del sistema senza saturazione (—), con saturazione (---) e con saturazione e anti windup (-.).

Schema di desaturazione #1 (PID)

Un possibile schema di desaturazione per un controllore di tipo PID, basato sulla struttura riportata in Fig. 7.10, è illustrato in Fig. 7.12.

Per semplicità di trattazione possiamo trascurare la parte relativa all'azione derivativa, in quanto sappiamo non essere interessata al problema del windup (tra l'altro, in alcune configurazioni, la parte derivativa viene inserita a valle del blocco di saturazione). Possiamo quindi concentrarci sullo studio della parte PI, ovvero:

$$R_{PI}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{s T_I} \right) = K_P \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

Una possibile scelta è quella di porre $\Gamma(s) = 1 + s T_I$. In questo caso otteniamo:

$$\Psi = \frac{1}{1 + s T_I}.$$

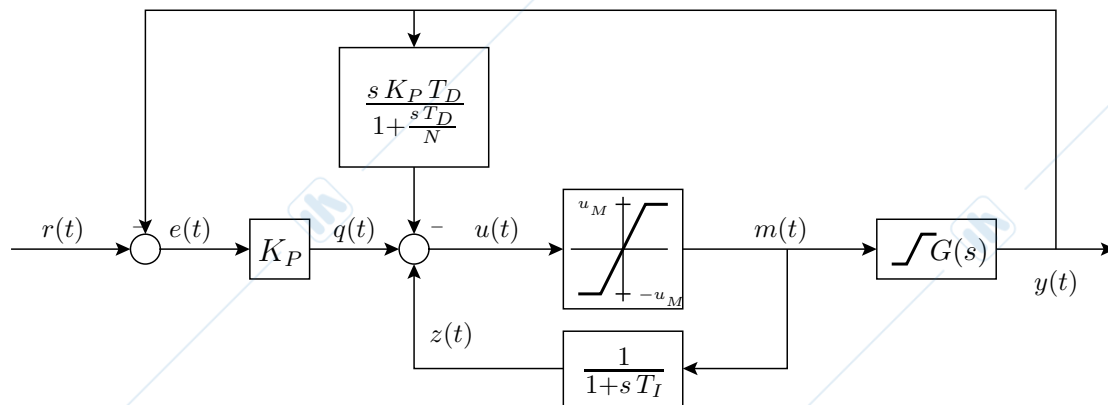


Figura 7.12: Schema anti-windup per un controllore PID.

Schema di desaturazione #2 (PID)

Un altro possibile schema di desaturazione per un controllore di tipo PID, è riportato in Fig. 7.13. Se il comando è nella regione di linearità dell'attuatore, risulterà $p(t) = 0$ e $f(t) = 0$, ed il controllore avrà la funzione di trasferimento R_{PID} desiderata.

Nel caso in cui l'attuatore sia in saturazione, $p(t) \neq 0$, e $f(t) = p(t)/T_t$, per cui il segnale in ingresso all'integratore viene diminuito, fino al momento in cui il comando è pari al valore di saturazione U_M . Valori di T_t piccoli comportano una desaturazione molto rapida, ma anche facilmente soggetta all'azione dei disturbi, mentre per valori di T_t grandi la desaturazione può risultare lenta.

Si può dimostrare che per $T_t = K_P$ questo schema di desaturazione coincide con quello riportato in Fig. 7.12.

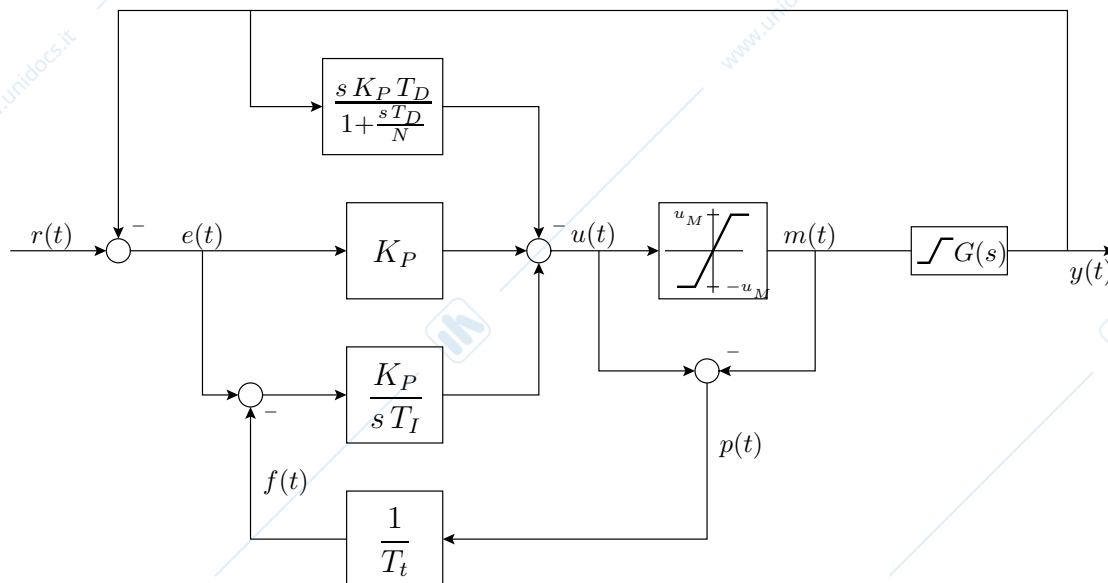


Figura 7.13: Schema anti-windup per un controllore PID.

Schema di desaturazione #3 (PID)

Un ulteriore schema di desaturazione è quello basato sulla così detta *integrazione condizionata*. Questa tecnica prevede di porre a zero l'ingresso del termine integrale e_i non appena l'attuatore raggiunge la saturazione. Facendo riferimento allo schema di Fig. 7.14, risulta:

$$e_i(t) = \begin{cases} e(t) & , \text{ se } u(t) = m(t) \\ 0 & , \text{ se } u(t) \neq m(t) \end{cases}$$

Il segnale in uscita dal comparatore è di tipo booleano, e sarà il segnale logico che permetterà allo switch di cambiare stato. Il funzionamento del meccanismo di desaturazione in questo caso risulterà estremamente intuitivo.

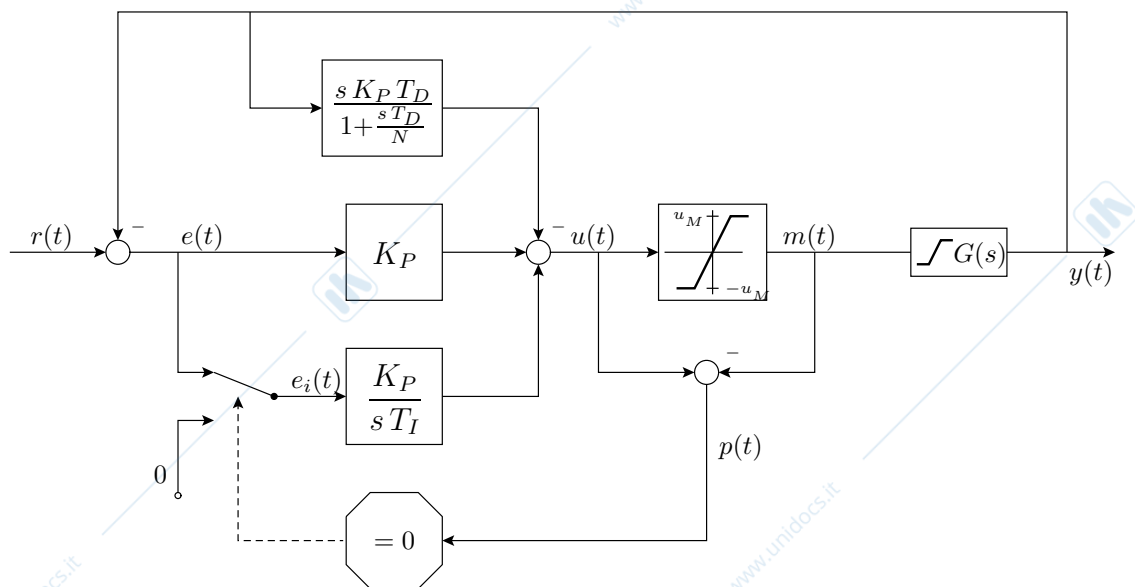


Figura 7.14: Schema anti-windup per un controllore PID.

7.4 Metodi di taratura automatica

In molte applicazioni industriali, la costruzione di un buon modello dell'impianto può essere piuttosto onerosa, soprattutto a fronte di esigenze di controllo non particolarmente spinte. Per questi casi sono disponibili diverse tecniche di taratura dei parametri di un controllore PID (K_P , T_I e T_D) che fanno riferimento a poche e semplici prove da eseguirsi sull'impianto.

Nel seguito verranno presentate alcune tecniche di taratura automatica, che come si è già detto, ci permetteranno di effettuare la sintesi del controllore senza disporre a priori di un modello matematico del sistema da controllare.

E' opportuno precisare che i controllori che si ottengono mediante queste tecniche difficilmente risulteranno ottimizzati per il processo da controllare. Questo significa che sarà necessario effettuare delle modifiche ai parametri ottenuti in modo da ottenere risultati migliori.

7.4.1 Metodi ad anello aperto

Questi metodi effettuano la taratura del controllore PID dopo aver individuato un modello del processo da controllare mediante un opportuno esperimento effettuato in anello aperto. Risulta evidente che tanto più il modello ricavato sarà fedele al sistema reale, tanto migliori saranno le prestazioni del controllore tarato con questi metodi.

Uno dei modelli maggiormente usato per effettuare la taratura di un PID consiste in un sistema rappresentabile mediante una funzione di trasferimento del primo ordine con ritardo, cioè:

$$G_{appr}(s) = \frac{\mu}{1 + sT} e^{-sL} \quad (7.3)$$

dove μ denota il guadagno statico, T la costante di tempo e L il ritardo presente nel sistema.

E' stato verificato che diversi processi industriali possono essere approssimati con successo dalla (7.3). E' naturale che se il processo in questione ha una risposta al gradino oscillante, tale approssimazione potrebbe non essere particolarmente accurata.

Poiché l'obiettivo è quello di determinare i 3 parametri incogniti (μ , T , L) mediante un semplice esperimento, l'ingresso che viene solitamente utilizzato a tale scopo è un gradino (di una certa ampiezza). Questo tipo di ingresso, oltre ad essere estremamente semplice da applicare, in generale non produce situazioni potenzialmente pericolose per l'impianto. Risulta comunque evidente che il sistema in questione debba essere asintoticamente stabile affinché possa essere utilizzato questo metodo.

Riassumendo, i parametri incogniti della (7.3) saranno determinati sulla base della risposta a gradino (detta anche *reaction curve*) ad anello aperto. Per determinare tale risposta è opportuno osservare alcune accortezze:

- il gradino in ingresso deve essere il più grande possibile, in modo tale da ottenere il maggior rapporto segnale-rumore;
- ripetere l'esperimento con gradini di diversa ampiezza in modo da verificare la linearità del sistema. Nel caso in cui il sistema non risulti particolarmente lineare è consigliabile stimare il modello mediante i dati ricavati dall'esperimento effettuato nelle condizioni operative in cui si prevede di controllare il processo;
- è consigliabile normalizzare la risposta ottenuta dividendo l'uscita del sistema per l'ampiezza del gradino in ingresso (nel seguito assumeremo sempre di aver effettuato questa normalizzazione).

Osservazione: Si definisce *tempo di ritardo normalizzato* (*normalized dead time*) la quantità

$$\tau = \frac{L}{L + T}.$$

Chiaramente $0 \leq \tau < 1$. Questa quantità è talvolta anche detta *rapporto di controllabilità*, in quanto fornisce una indicazione sulla difficoltà di controllare il sistema in esame. Come può suggerire l'intuito, sistemi con τ prossimo a 0 saranno generalmente semplici da controllare, mentre sistemi con τ prossimo ad 1 saranno più difficoltosi.

Metodo della tangente

Un primo metodo per la valutazione dei parametri della (7.3) può essere ottenuto direttamente dal grafico della risposta al gradino. In Fig. 7.15 è riportata una tipica risposta al gradino (normalizzata).

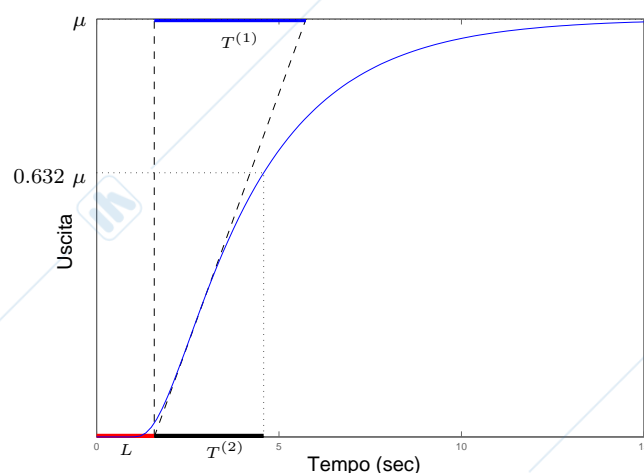


Figura 7.15: Determinazione dei parametri del sistema ad anello aperto con il metodo della tangente.

E' evidente che il valore del guadagno μ è immediatamente determinabile dal grafico, in quanto risulta pari al valore dell'uscita del sistema a regime.

$$\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

Nel caso in cui sia presente un disturbo di misura, tale determinazione può non risultare immediata. A tal fine si può assumere μ come il valor medio dell'uscita a regime.

Tracciando la tangente alla curva nel punto di massima pendenza sarà inoltre possibile individuare una approssimazione del ritardo L , come evidenziato in Fig. 7.15.

Per il calcolo della costante di tempo T esistono vari metodi. Nel seguito ne riportiamo due.

1. Determinare T come la differenza tra il tempo in cui la retta tangente interseca il valore di regime ed il tempo di ritardo ($T^{(1)}$ in Fig. 7.15).
2. Determinare T come la differenza tra il tempo in cui la risposta raggiunge il 63.2% del valore di regime ed il tempo di ritardo ($T^{(2)}$ in Fig. 7.15).

E' possibile verificare che nel caso in cui l'uscita del sistema sia effettivamente generata dalla (7.3), entrambi i metodi forniranno lo stesso valore di T pari al vero valore della costante di tempo.

Metodo delle aree

Un metodo alternativo al precedente è il cosiddetto metodo delle aree, che è suddiviso nelle seguenti due fasi:

1. Determinare l'area A_0 compresa tra il valore di regime e l'uscita (Fig. 7.16). Poiché la risposta al gradino (unitario) del sistema (7.3) vale

$$y(t) = \begin{cases} \mu \left(1 - e^{-\frac{t-L}{T}}\right) & , \text{ se } t \geq L \\ 0 & , \text{ se } t < L \end{cases}$$

avremo:

$$A_0 = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt = \mu L + \int_L^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt = \mu L + \int_L^{\infty} \mu e^{-\frac{t-L}{T}} dt = \mu(L+T)$$

per cui:

$$L + T = \frac{A_0}{\mu}$$

2. Determinare l'area A_1 sottesa dall'uscita fino al tempo $L + T$ (Fig. 7.16). Nel caso di un sistema (7.3) avremo:

$$A_1 = \int_0^{L+T} y(t) dt = \int_L^{L+T} \mu \left(1 - e^{-\frac{t-L}{T}}\right) dt = \mu T e^{-1}$$

per cui

$$T = \frac{A_1 e}{\mu} \quad , \quad L = \frac{A_0}{\mu} - T = \frac{A_0 - A_1 e}{\mu}.$$

E' opportuno notare che il metodo delle aree è meno sensibile ai disturbi di misura rispetto a quello della tangente. Per contro il metodo delle aree è intrinsecamente diviso in due fasi: non è infatti possibile determinare l'area A_1 senza prima aver determinato l'area A_0 .

Metodo di Ziegler-Nichols (in anello aperto)

Uno dei metodi classici di taratura automatica è quello di Ziegler-Nichols in anello aperto. Questo metodo si basa sulla conoscenza dei parametri μ , L , e T di un modello del primo ordine con ritardo che approssima il processo da controllare.

I parametri del regolatore P , PI o PID vengono determinati utilizzando la Tabella 7.1. Tanto più l'impianto è approssimabile con la funzione di trasferimento riportata in (7.3), tanto migliori saranno le prestazioni del controllore.

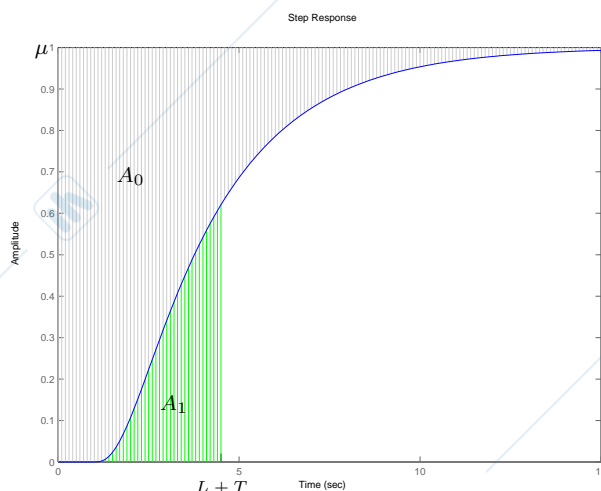


Figura 7.16: Metodo delle aree.

Notare che nel caso di un controllore PID, poiché $T_I = 4T_D$, gli zeri del regolatore PID sono coincidenti in posizione $z_{1,2} = -1/L$.

Generalmente il controllore ottenuto mediante questo metodo garantisce buone prestazioni nella reiezione dei disturbi, mentre l'inseguimento del set-point non è talvolta soddisfacente.

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{T}{\mu L}$		
PI	$\frac{0.9T}{\mu L}$	$3L$	
PID	$\frac{1.2T}{\mu L}$	$2L$	$0.5L$

Tabella 7.1: Tabella per la determinazione dei parametri mediante il metodo di Ziegler-Nichols ad anello aperto.

Metodo di Cohen e Coon

Anche questo metodo si basa sulla risposta al gradino del sistema in anello aperto. I parametri utilizzati per la taratura sono gli stessi utilizzati per il metodo di Ziegler-Nichols ad anello aperto. Anche questo metodo privilegia la reiezione dei disturbi; risulta infatti che a fronte di un disturbo a gradino la risposta presenti un *rapporto di decadimento* pari a $1/4$ (ossia la seconda oscillazione è smorzata di un fattore 4 rispetto alla prima).

I parametri del regolatore P , PI o PID vengono determinati utilizzando la Tabella 7.2.

	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{1+R/3}{\mu R}$		
PI	$\frac{0.9+R/12}{\mu R}$	$\frac{L(30+3R)}{9+20R}$	
PID	$\frac{1.33+R/4}{\mu R}$	$\frac{L(32+6R)}{13+8R}$	$\frac{4L}{11+2R}$

Tabella 7.2: Tabella per la determinazione dei parametri mediante il metodo di Cohen-Coon, dove $R = L/T$.

7.4.2 Metodi ad anello chiuso

Metodo di Ziegler-Nichols (in anello chiuso)

Questo metodo a differenza dei precedenti non ricava i valori dei parametri del controllore sulla base della risposta al gradino in anello aperto, bensì in anello chiuso. La condizione sotto la quale è possibile utilizzare questo metodo è che il sistema ad anello aperto sia asintoticamente stabile e che esista un valore del guadagno per cui il sistema entra in oscillazione.

Il procedimento consiste nel chiudere il sistema in retroazione su un controllore proporzionale (con un valore iniziale di K_P molto piccolo), in modo che la risposta ad un gradino in anello chiuso risulti stabile. A questo punto si aumenta il guadagno del controllore finché il sistema non entra in oscillazione (condizione critica di stabilità). Indicando con \bar{K}_P e \bar{T} il guadagno critico e il periodo dell'oscillazione dell'uscita (vedi Fig. 7.17), i parametri del regolatore P , PI o PID vengono determinati utilizzando la Tabella 7.3.

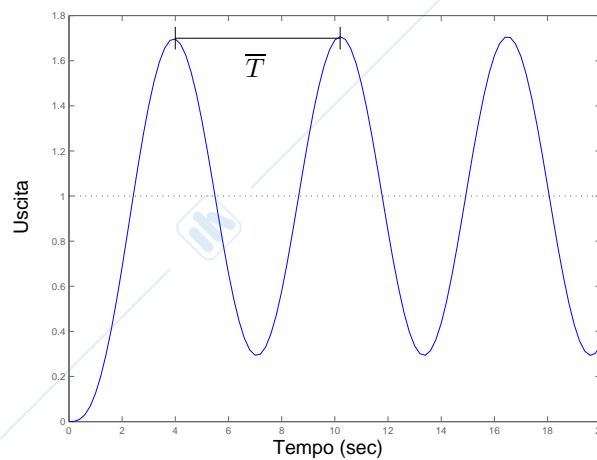


Figura 7.17: Risposta del sistema ad anello chiuso con guadagno $K_P = \bar{K}_P$.

	K_P	T_I	T_D
P	$0.5 \bar{K}_P$		
PI	$0.45 \bar{K}_P$	$0.8 \bar{T}$	
PID	$0.6 \bar{K}_P$	$0.5 \bar{T}$	$0.125 \bar{T}$

Tabella 7.3: Tabella per la determinazione dei parametri mediante il metodo di Ziegler-Nichols ad anello chiuso.

E' evidente che il valore del guadagno critico \bar{K}_P coincide con il margine di guadagno del sistema. Come per il metodo di Ziegler-Nichols ad anello aperto, anche in questo caso i due zeri vengono scelti coincidenti ($T_I = 4 T_D$). Inoltre è possibile evidenziare la similarità tra i valori contenuti in Tab. 7.1 e quelli in Tab. 7.3. Le due tabelle sono infatti pressoché identiche nel caso $\bar{K}_P = \frac{2T}{\mu L}$ e $\bar{T} = 4L$.

Dato che l'applicazione di questo metodo richiede che il sistema sia portato alla soglia dell'instabilità, l'applicazione di questa tecnica è consentita solo per quei sistemi che possono essere spinti in tale condizione, ossia per quei sistemi in cui il margine di guadagno è finito. Inoltre, questo metodo si presta male ad essere applicato a processi con costanti di tempo elevate (es. processi di temperatura con costanti di tempo dell'ordine delle ore), in quanto per la determinazione del periodo delle oscillazioni potrebbe essere necessario un tempo eccessivamente lungo.

Si può dimostrare che il periodo \bar{T} delle oscillazioni risulta

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$$

dove

$$\omega_\pi: \angle G(j\omega_\pi) = \pi.$$

Risulterà quindi che (essendo \bar{K}_P il margine di guadagno)

$$G(j\omega_\pi) = -\frac{1}{\bar{K}_P}.$$

L'influenza data dalle 3 componenti di un controllore PID nei confronti di un generico punto $G(j\bar{\omega})$ sono riportate in Fig. 7.18.

Sia $L(s) = C(s)G(s)$ la funzione di anello, dove $C(s)$ denota la funzione di trasferimento del controllore. Analizziamo come viene modificato il punto $G(j\omega_\pi)$ dall'inserimento di un controllore tarato con i valori della Tabella 7.3:

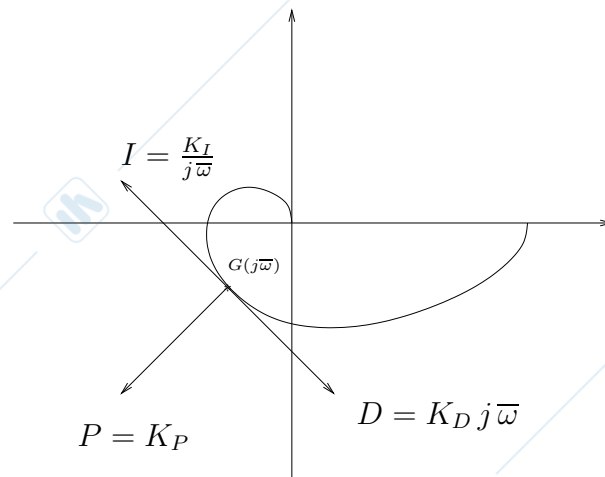


Figura 7.18: Effetti delle componenti di un PID su un generico punto $G(j\bar{\omega})$.

- *Controllore P.* Poiché $K_P = 0.5 \bar{K}_P$, risulterà $L(j\omega_\pi) = -0.5$, per cui il sistema controllato presenterà un margine di guadagno pari a 2.
- *Controllore PI.* Poiché $C(j\omega_\pi) = K_P \left(1 + \frac{1}{j\omega_\pi T_I}\right) = 0.45 \bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j1.6\pi}\right)$ vale che

$$L(j\omega_\pi) = -\frac{1}{\bar{K}_P} \cdot 0.45 \bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j1.6\pi}\right) \simeq -0.45 + j0.08 = 0.457 e^{-j(180^\circ + 11^\circ)}.$$

Un controllore PI introduce quindi alla frequenza ω_π una diminuzione di fase di 11° e una diminuzione di modulo di 6.76 dB. Poiché la pulsazione ω_π non sarà più quella in cui la fase della funzione $L(j\omega)$ vale -180° , nulla potremo dire sul margine di guadagno (e neppure su quello di fase).

- *Controllore PID.* Ripetendo il ragionamento effettuato per i controllori PI, è semplice dimostrare che $C(j\omega_\pi) = 0.6 \bar{K}_P \left(1 + \frac{1}{j\pi} + \frac{j\pi}{4}\right)$ e che

$$L(j\omega_\pi) \simeq -0.6 (1 + j0.47) = 0.66 e^{-j(180^\circ - 25^\circ)}.$$

un controllore PID aumenta quindi la fase di 25° e riduce il modulo di 3.6 dB (alla frequenza ω_π).

Nel caso che la $G(s)$ abbia un andamento piuttosto morbido, questo controllore garantirà un margine di fase di circa $30^\circ \div 40^\circ$.

Assegnazione del margine di guadagno e di fase

La conoscenza del punto $G(j\omega_\pi)$ ci può consentire di effettuare una assegnazione del margine di guadagno del sistema controllato mediante un PID. Abbiamo visto in precedenza

come questo sia semplice per un controllore puramente proporzionale. Anche nel caso di un PID dovremo fissare

$$K_P = \frac{\overline{K}_P}{\gamma_m}$$

dove γ_m denota il margine di guadagno desiderato. A questo punto sarà sufficiente che la somma dei contributi dati dall'azione integrativa e derivativa alla frequenza ω_π sia nulla, ovvero:

$$\frac{1}{j\omega_\pi T_I} + j\omega_\pi T_D = 0$$

cioè

$$1 - \omega_\pi^2 T_I T_D = 0 \quad \longleftrightarrow \quad T_I T_D = \frac{1}{\omega_\pi^2}.$$

E' evidente che esistono infinite soluzioni. Volendo porre gli zeri del PID coincidenti, come visto in precedenza, dobbiamo imporre $T_I = 4T_D$, ottenendo

$$T_I = \frac{2}{\omega_\pi} = \frac{\overline{T}}{\pi}, \quad T_D = \frac{1}{2\omega_\pi} = \frac{\overline{T}}{4\pi}.$$

Con un ragionamento analogo sarà possibile imporre un determinato margine di fase ϕ_m al sistema controllato. I valori dei parametri del PID sono riportati di seguito:

$$K_P = \overline{K}_P \cos(\phi_m), \quad T_I = \frac{\overline{T} (1 + \sin(\phi_m))}{\pi \cos(\phi_m)}, \quad T_D = \frac{\overline{T} (1 + \sin(\phi_m))}{4\pi \cos(\phi_m)}.$$

La frequenza di crossover ω_c risulterà uguale a ω_π .