Corsi di Laurea in SES, SEFA e SG

Statistica di Base (a.a. 2019/2020)
Valeria Sambucini

ESEMPI DI UTILIZZO DELLA MEDIA GEOMETRICA

In generale si ricorre alla media geometrica nei casi in cui vogliamo determinare il **tasso medio di accrescimento (o decremento)** di un fenomeno in un certo periodo, sulla base dei valori di accrescimento (o decremento) dei diversi sotto-periodi. Tipici esempi sono lo studio delle variazioni dei prezzi o della variazione della dimensione di una popolazione (umana, batterica, vegetale, ...) e il calcolo del il tasso d'interesse medio in regime di capitalizzazione composta.

ESEMPIO – ***Il tasso d'interesse medio annuo***
Consideriamo i seguenti tassi d'interesse composto applicati ad un capitale iniziale S per n anni,

$$i_1, i_2, ..., i_n.$$

Il tasso d'interesse medio annuo ($\bar{i}$) è quel valore che se fosse stato costante negli n anni, avrebbe garantito lo stesso ricavo che si è ottenuto con i tassi $i_1, ..., i_n$. La formula per il calcolo del tasso d'interesse medio annuo è

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\prod_{1=1}^{n}(1+i_i)} - 1 = \sqrt[n]{(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdots(1+i_n)} - 1.$$

Tale formula deriva dal fatto che avendo a disposizione un capitale iniziale pari ad S, alla fine del primo anno, durante il quale il tasso d'interesse è stato pari a i_1, la somma iniziale S diventa

$$S + Si_1 = S(1+i_1).$$

Al capitale ottenuto alla fine del primo anno, viene applicato nel secondo anno un tasso d'interesse i_2. Alla fine del secondo anno la somma investita diventa

$$S(1+i_1) + S(1+i_1)i_2 = S(1+i_1)(1+i_2).$$

Dopo n anni il capitale inizialmente pari a S sarà a diventato

$$S(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n).$$

Pertanto, per ottenere il tasso d'interesse medio annuo ($\bar{i}$) dobbiamo risolvere l'equazione

$$S(1+\bar{i})(1+\bar{i})\cdots(1+\bar{i}) = S(1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n),$$

da cui

$$(1+\bar{i})^n = (1+i_1)(1+i_2)\cdots(1+i_n) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{i} = \sqrt[n]{(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdots(1+i_n)} - 1$$

Esercizio. Nella seguente tabella sono riportati i tassi di interesse composto che una banca ha applicato ai depositi bancari vincolati dal 2000 al 2003:

Anni	2000	2001	2002	2003
Tassi d'interesse	10.2%	4.6%	8.6%	6.5%

Determinare il tasso d'interesse medio annuo.

Soluzione. Applicando la formula

$$\bar{i} = \sqrt[n]{(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdots(1+i_n)} - 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{i} &= \sqrt[4]{(1+0.102)\cdot(1+0.046)\cdot(1+0.086)\cdot(1+0.065)} - 1\\ &= \sqrt[4]{(1.102)\cdot(1.046)\cdot(1.086)\cdot(1.065)} - 1 = \sqrt[4]{1.333192} - 1 = 1.0745 - 1 = 0.0745.\end{aligned}$$

Pertanto il tasso d'interesse medio annuo percentuale è 7.45%.

ESEMPIO – ***Il tasso di accrescimento (o decremento) medio di un fenomeno***
Supponiamo di essere interessati al tasso di accrescimento (o decremento) medio del prezzo di un prodotto negli ultimi n anni, conoscendo i tassi di accrescimento (o decremento) in ciascuno degli n anni di interesse.

Supponiamo di conoscere il prezzo del prodotto all'inizio del periodo e alla fine di ciascun anno

$$P_0, P_1, P_2, ..., P_n.$$

Indichiamo con i_r il rapporto tra il prezzo alla fine dell'anno r e il prezzo alla fine dell'anno $r-1$, ossia

$$i_r = \frac{P_r}{P_{r-1}}, \quad \text{per } r = 1, 2, ...n.$$

Tali quantità sono dette **tassi di variazione** e moltiplicandole per 100 si ottengono i **tassi di variazione percentuali**. Ad esempio, se $i_r = 1.2$ (ossia $i_r \cdot 100 = 120$) vuol dire che il prezzo del bene alla fine dell'anno r ammonta al 120% del prezzo del bene alla fine dell'anno precedente.

Possiamo poi definire la **variazione relativa** come

$$v_r = \frac{P_r - P_{r-1}}{P_{r-1}} = \frac{P_r}{P_{r-1}} - 1 = i_r - 1, \quad \text{per } r = 1, 2, ...n,$$

da cui ovviamente $i_r = 1 + v_r$. Moltiplicano per 100 la variazione relativa otteniamo la **variazione percentuale** che misura la variazione del prezzo del bene tra la fine dell'anno $r-1$ e la fine dell'anno r, fatto uguale a 100 il prezzo alla fine dell'anno $r-1$. Ad esempio, se $i_r = 1.2$, allora $v_r \cdot 100 = (i_r - 1)\cdot 100 = 20$ e possiamo affermare che si è verificata una variazione percentuale del 20%, ossia il prezzo ha subito dalla fine dell'anno $r-1$ alla fine dell'anno r un incremento del 20%.

Per il periodo in questione (n anni) vogliamo calcolare la **variazione relativa media annua**. Si tratta di calcolare *la variazione che, se fosse risultata costante per tutto il periodo considerato, avrebbe portato allo stesso prezzo finale del prodotto.*

Il prezzo finale P_n lo posso ottenere dall'espressione della variazione relativa per l'anno n nel seguente modo

$$v_n = \frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-1}} \qquad \rightarrow \qquad P_n = P_{n-1}v_n + P_{n-1} = P_{n-1}(1+v_n).$$

Notiamo che anche P_{n-1} può essere scritto in funzione di v_{n-1} e P_{n-2} e, pertanto, avremo che

$$P_n = P_{n-1}(1+v_n) = P_{n-2}(1+v_{n-1})(1+v_n),$$

e così via ... Alla fine si ottiene che

$$P_n = P_{n-1}(1+v_n) = P_{n-2}(1+v_{n-1})(1+v_n) = ... = P_0(1+v_1)\cdot ... \cdot(1+v_{n-1})(1+v_n).$$

Avendo ottenuto che $P_n = P_0(1+v_1)\cdot ... \cdot(1+v_{n-1})(1+v_n)$, per ottenere la variazione relativa media annua, $\bar{v}$, è necessario risolvere l'equazione

$$P_0(1+\bar{v})\cdot ... \cdot(1+\bar{v})(1+\bar{v}) = P_0(1+v_1)\cdot ... \cdot(1+v_{n-1})(1+v_n),$$

che può anche essere scritta come

$$P_0(1+\bar{v})^n = P_0(1+v_1)\cdot\ldots\cdot(1+v_{n-1})(1+v_n).$$

Risolvendo rispetto a $\bar{v}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \sqrt[n]{(1+v_1)\cdot\ldots\cdot(1+v_{n-1})(1+v_n)}-1\\ &= \sqrt[n]{i_1\cdot\ldots\cdot i_{n-1}\cdot i_n}-1.\end{aligned}$$

Quindi, la variazione relativa media annua si ottiene come media geometrica dei rapporti tra i prezzi da un anno all'altro diminuita di 1.

Esercizio. La seguente tabella riporta i tassi di variazione annuali del prezzo di un prodotto dal 2001 al 2005

Anni	Tassi di variazione
2001	1.2
2002	1.35
2003	1.5
2004	1.3
2005	1.25

1. Calcolare la variazione relativa media annua
2. Sapendo che il prezzo del prodotto nel 2000 era pari a 1500 euro, ottenere l'ammontare del prezzo del prodotto nel 2005.

Soluzione.

1. Applicando la formula

$$\bar{v} = \sqrt[n]{i_1\cdot\ldots\cdot i_{n-1}\cdot i_n}-1,$$

otteniamo

$$\bar{v} = \sqrt[5]{i_1\cdot\ldots\cdot i_5)}-1 = \Big(1.2\cdot 1.35\cdot 1.5\cdot 1.3\cdot 1.25\Big)^{1/5}-1 = 1.3161-1 = 0.3161.$$

Nel periodo considerato il prezzo del prodotto è aumentato mediamente del 31.61%.

2. Sapendo che $P_{2000} = P_0 = 1500$ euro, dobbiamo determinare $P_{2005} = P_n = P_5$. Avremo che

$$\begin{aligned}P_{2005} &= P_{2000}(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)(1+v_4)(1+v_5)\\ &= P_{2000}\cdot i_1\cdot i_2\cdot i_3\cdot i_4\cdot i_5\\ &= 1500\cdot 1.2\cdot 1.35\cdot 1.5\cdot 1.3\cdot 1.25 = 5923 \text{ euro}.\end{aligned}$$

Si poteva anche usare

$$P_{2005} = P_{2000}(1+\bar{v})^5 = 1500(1+0.3161)^5 = 5923 \text{ euro}.$$