Accenni al calcolo combinatorio

Dario Malchiodi e Anna Maria Zanaboni

ottobre 2017

Principio fondamentale del calcolo combinatorio: se ci sono s_1 modi per operare una scelta e, per ciascuno di essi, ci sono s_2 modi per operare una seconda scelta e, per ciascuno di essi, ci sono s_3 modi per operare una terza scelta e... e per ciascuno di essi ci sono s_t modi per operare la t-esima scelta, allora il numero delle sequenze di possibili scelte è: $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \dots s_t$.
Questo risultato corrisponde al calcolo del numero delle foglie di un albero di profondità t il cui primo livello ha s_1 nodi ciascuno dei quali ha s_2 figli, ciascuno dei quali ha s_3 figli e così via.

1 Permutazioni

Consideriamo un insieme di n oggetti $A = \{a_1, \dots a_n\}$. Chiamiamo *permutazione* degli n oggetti una sequenza ordinata in cui compaiono tutti gli oggetti.

1.1 Permutazioni semplici

Se gli n oggetti di A sono tutti distinguibili, allora una sequenza ordinata di tali oggetti è detta *permutazione semplice*, o soltanto *permutazione* degli n oggetti. Ad esempio, se $A = \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}$ allora tutte le permutazioni degli n oggetti sono:

```
a b c
c a b
b c a
b a c
c b a
a c b
```

Quante sono le permutazioni di n oggetti? Per rispondere a questa domanda applichiamo il principio fondamentale del calcolo combinatorio:

(i) calcoliamo in quanti modi possiamo selezionare l'oggetto da inserire nella prima posizione: avendo a disposizione n oggetti, abbiamo n possibilità;

(ii) per ciasuna delle n possibili scelte fatte al punto precedente, calcoliamo in quanti modi possiamo selezionare l'oggetto da inserire nella seconda posizione: avendo a disposizione $n-1$ oggetti, abbiamo $n-1$ possibilità. In totale abbiamo $n(n-1)$ modi differenti per scegliere il primo e il secondo elemento della sequenza;

(iii) procediamo in modo analogo per tutte le altre posizioni, creando così un albero il cui livello i corrisponde alla scelta per riempire la posizione i-esima; per riempire la posizione i-esima sono rimasti $n-(i-1)$ elementi di A tra cui scegliere, quindi esistono $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(i-1))$ modi differenti per scegliere i primi i elementi della sequenza;

(iv) in particolare, arrivati all'ultima posizione, è rimasto un solo elemento di A da scegliere, e abbiamo costruito un albero di profondità n che ha un numero di foglie pari a: $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$

Quindi il numero di possibili permutazioni semplici di n oggetti è $n!$. Nell'esempio visto poc'anzi abbiamo elencato tutte le possibili $3! = 6$ differenti permutazioni degli oggetti di A.

1.2 Permutazioni di oggetti distinguibili a gruppi

Se gli n oggetti di A non sono tutti distinguibili, ma sono distinguibili a gruppi di numerosità n_1, n_2,... n_k (ovviamente con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), allora una sequenza ordinata di tali oggetti che sia distinguibile dalle altre è detta *permutazione di oggetti distinguibili a gruppi*.
Ad esempio, immaginiamo che l'insieme $A = \{$`a1,a2,b1,b2,b3`$\}$ sia costituito da cinque caramelle di cui due (la `a1` e la `a2`) sono al gusto arancia e le altre tre sono al gusto banana. Dal punto di vista del gusto della caramella possiamo identificare due gruppi distinti di oggetti, uno di numerosità $n_1 = 2$ e l'altro di numerosità $n_2 = 3$. Se ci interessa distinguere le sequenze di caramelle per i gusti che vi compaiono, allora la permutazione `a1 a2 b1 b2 b3` è diversa dalla `a1 b1 b2 b3 a2`, perchè nella prima abbiamo due caramelle all'arancia iniziali e poi tre alla banana e nella seconda abbiamo una caramella all'arancia all'inizio e una alla fine della sequenza e le caramelle centrali sono alla banana. Al contrario, la permutazione `a1 a2 b1 b2 b3` è indistinguibile dalla `a2 a1 b1 b2 b3`, perchè, in entrambe, le prime due caramelle sono all'arancia e le restanti tre sono alla banana.

Quante sono dunque le permutazioni di n oggetti distinguibili a gruppi di numerosità n_1, n_2,... n_k? Torniamo al nostro esempio e fissiamo una configurazione di gusti, fissiamo cioè le posizioni in cui compare la caramella all'arancia e quelle in cui compare la caramella alla banana, per esempio la posizione 1 e la posizione 5 per l'arancia, la 2, la 3 e la 4 per la banana:

```
arancia banana banana banana arancia
```

(In questo caso abbiamo solo due gruppi e quindi, fissate le posizioni di elementi del primo gruppo, automaticamente sono anche fissate quelle degli elementi del secondo gruppo). Le permutazioni semplici che corrispondono a questa configurazione sono:

```
a1 b1 b2 b3 a2
a1 b3 b1 b2 a2
a1 b2 b3 b1 a2
a1 b3 b2 b1 a2
a1 b2 b1 b3 a2
a1 b1 b3 b2 a2
a2 b1 b2 b3 a1
a2 b3 b1 b2 a1
a2 b2 b3 b1 a1
a2 b3 b2 b1 a1
a2 b2 b1 b3 a1
a2 b1 b3 b2 a1
```

Le abbiamo ottenute lasciando fissati i gusti nelle posizioni scelte e permutando su tali posizioni le caramelle del gusto corrispondente. Utilizzando il principio fondamentale del calcolo combinatorio possiamo dire che alla singola configurazione `arancia banana banana banana arancia` corrispondono $n_1! \cdot n_2! = 2! \cdot 3! = 12$ permutazioni semplici.

Se chiamiamo $P_{n;n_1,...n_k}$ il numero di configurazioni differenti e ricordiamo che il numero di permutazioni semplici è $n!$, possiamo scrivere:
$n! = P_{n;n_1,...n_k} \cdot n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!$, da cui segue che il numero delle permutazioni di n oggetti distinguibili a gruppi di numerosità n_1, n_2,... n_k è:
$P_{n;n_1,...n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!} = \binom{n}{n_1!, n_2!, \ldots, n_k!}$.

Questa quantità è detta anche *coefficiente multinomiale*.

2 Disposizioni e combinazioni

Consideriamo un insieme di n oggetti distinti $A = \{a_1, \dots a_n\}$ e selezioniamo k oggetti di questo insieme. Le modalità di selezione possono essere svariate.

- Se vogliamo distinguere le configurazioni contenenti gli stessi oggetti ma estratti in ordine differente allora pariamo di *disposizioni di n oggetti su k posti*, che sono configurazioni in cui sono importanti sia l'oggetto selezionato che la sua posizione. Specifichiamo una disposizione indicando tra parentesi tonde gli oggetti estratti. Ad esempio, fissato $k = 3$, la disposizione (a_i, a_j, a_r) è diversa dalla disposizione (a_r, a_j, a_i) perchè, sebbene gli oggetti selezionati siano gli stessi, essi compaiono in ordine differente.

- Se invece siamo solo interessati a quali oggetti sono stati estratti e non alla loro posizione nella sequenza, allora pariamo di *combinazioni di n oggetti presi k alla volta*. Specifichiamo una combinazione indicando tra parentesi graffe gli oggetti estratti. Ad esempio, fissato $k = 3$, la combinazione $\{a_i, a_j, a_r\}$ e la $\{a_r, a_j, a_i\}$ sono la stessa combinazione.

Inoltre:

- Se gli oggetti di A possono essere usati una sola volta, allora parliamo di disposizioni o combinazioni *senza ripetizione*. Gli esempi di disposizioni o combinazioni visti sopra sono senza ripetizione.

- Se invece immaginiamo che nel selezionare ciascuno dei k oggetti abbiamo a disposizione sempre l'insieme A completo, e quindi il singolo oggetto a_i può essere selezionato anche più di una volta, allora parliamo di disposizioni o combinazioni *con ripetizione*. Ad esempio, fissato $k = 3$, la sequenza (a_r, a_i, a_i) è una disposizione con ripetizione perchè l'oggetto a_i ricorre due volte, e analogamente $\{a_r, a_i, a_i\}$ è una combinazione con ripetizione.

Abbiamo dunque quattro possibili modi di selezionare k oggetti da un insieme di n oggetti, che corrispondono a quattro tipi di configurazioni diverse:

(a) le *disposizioni senza ripetizione*, dette anche *disposizioni semplici*, che richiedono ovviamente che sia $k \leq n$,

(b) le *combinazioni senza ripetizione*, dette anche *combinazioni semplici*, con $k \leq n$,

(c) le *disposizioni con ripetizione*,

(d) le *combinazioni con ripetizione*.

Vediamo ora come calcolare, data una particolare modalità di selezione, il numero di possibili scelte distinte.

(a) Per calcolare il numero $d_{n,k}$ di possibili *disposizioni senza ripetizione di n oggetti distinti su k posti* procediamo in modo analogo a quanto fatto per le permutazioni semplici, fermandoci però alla posizione k-esima. L'albero costruito ha profondità k e un numero di foglie pari a:
$d_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) =$
$= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \cdot \left(\frac{(n-k)(n-k-1)\dots 1}{(n-k)(n-k-1)\dots 1}\right) =$
$= \frac{n!}{(n-k)!}$.
Si osservi che, per $k = n$, nella disposizione si utilizzano tutti gli elementi di A, quindi le permutazioni semplici sono un caso particolare di disposizioni semplici.

(b) Per calcolare il numero $c_{n,k}$ di possibili *combinazioni senza ripetizione di n oggetti distinti presi k alla volta* osserviamo che, fissati k oggetti, alla combinazione contenente quei k oggetti corrispondono $k!$ distinte disposizioni contenenti gli stessi k oggetti.

Quindi il numero totale di disposizioni semplici è uguale al numero di combinazioni moltiplicato per $k!$, cioè:
$d_{n,k} = c_{n,k} \cdot k!$, da cui segue che:
$c_{n,k} = d_{n,k}/k! = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

(c) Per calcolare il numero $D_{n,k}$ di possibili *disposizioni con ripetizione di n oggetti distinti su k posti* procediamo in modo analogo a quanto fatto per le disposizioni senza ripetizione, tenendo presente però che in ciascun nodo dell'albero abbiamo sempre n possibili oggetti tra i quali scegliere, mentre la profondità dell'albero è, come in quel caso, ancora k. Quindi avremo che:
$D_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$

(d) Diamo soltanto la formula per calcolare il numero $C_{n,k}$ di *combinazioni con ripetizione di n oggetti distinti presi k alla volta*:
$C_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

La Tabella seguente contiene uno schema riassuntivo dei casi considerati.

	sequenze (ordinate)	insiemi (non ordinati)
senza ripetizione	DISPOSIZIONI $d_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	COMBINAZIONI $c_{n,k} = \binom{n}{k}$
con ripetizione	DISPOSIZIONI $D_{n,k} = n^k$	COMBINAZIONI $C_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

3 Qualche esercizio

1. Dato l'insieme $A = \{a_1, \dots a_n\}$ e indicato con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A, calcolare la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$.

   Soluzione 1
   Ricordiamo che l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottinsiemi propri e impropri di A: contiene l'insieme vuoto, tutti i sottinsiemi costituiti da un solo elemento di A, tutti i sottinsiemi costituiti da due soli elementi di A e così via, e contiene anche A stesso.

Siccome il numero di sottinsiemi costituiti da k elementi è $c_{n,k} = \binom{n}{k}$, si ha che la cardinalità di $\mathcal{P}(A)$ è $|\mathcal{P}(A)| = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$, dove il primo addendo è dovuto alla presenza dell'insieme vuoto.
Sfruttando le proprietà del coefficiente binomiale otteniamo:

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la formula del binomio di Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, ponendo $a = 1$ e $b = 1$.

Soluzione 2
Se rappresentiamo ogni sottinsieme S di A come una n-upla di elementi binari in cui nella posizione i-esima compare il simbolo 1 se l'elemento a_i appartiene a S e compare il simbolo 0 se l'elemento a_i non vi appartiene, allora l'insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutte le n-uple che possiamo costruire a partire dai due simboli 0 e 1. Quindi:

$$|\mathcal{P}(A)| = D_{n,2} = 2^n$$

2. Quanti numeri telefonici di 7 cifre tutte diverse si possono avere?
   [$d_{10,7} = 604800$]

3. Lanciando 3 dadi quante combinazioni di numeri si posso ottenere?
   [$C_{6,3} = 56$]

4. In quanti modi lanciando 3 dadi possono uscire facce tutte diverse?
   [se distinguo i dadi: $d_{6,3} = 120$, se non distinguo i dadi: $c_{6,3} = 20$]

5. Quanti sono gli anagrammi della parola ROMA?
   [permutazioni semplici $d_{4,4} = 24$]

6. Quanti sono gli anagrammi della parola MATEMATICA?
   [permutazioni di oggetti distinguibili a gruppi: $P_{10;3,2,2,1,1,1} = 151200$]

7. In quanti modi 3 persone possono occupare 4 posti numerati?
   [in quanti modi posso assegnare 4 posti a 3 persone: $d_{4,3} = 24$].