Algebra di BOOLE

Come già analizzato, il funzionamento di un calcolatore elettronico è basato sull'impiego di elementi aventi due possibili stati di funzionamento che vengono convenzionalmente indicati con una coppia di informazioni del tipo zero/uno, vero/falso oppure on/off.

E' opportuno fornire, anche se in modo molto sommario, le nozioni fondamentali dell'algebra che permette di trattare adeguatamente i segnali binari. Tale algebra prende nome dal matematico George Boole: **algebra booleana**.

Applicando all'algebra booleana un procedimento di tipo ipotetico-deduttivo, lo studioso E.V. **Huntington** ha ipotizzato da una serie di ipotesi, da cui sono scaturite alcune proprietà denominate **«Teoremi dell'Algebra di Boole».** Tali teoremi trovano vasta applicazione in campo informatico.

Regole dell'algebra di BOOLE

Per la verifica della veridicità di tali teoremi, possiamo procedere utilizzando modelli prestabiliti, dove i concetti ipotizzati nello studio possano trovare riscontro e quindi validare i teoremi stessi.

Qualsiasi modello venga utilizzato, occorre formulare quindi le proprietà da applicare al modello stesso per poter effettuare tale verifica.

Come già accennato i teoremi dell'Algebra booleana permettono di trattare adeguatamente i segnali binari. Occorre quindi definirne le regole fondamentali per poter trattare questa tipologia di segnali. Queste regole andranno poi calate nel modello scelto per verificare la veridicità delle ipotesi studiate. Tali regole sono la:

- Definizione di un elemento nel modello
- Definizione dell'operazione somma (logica)
- Definizione dell'operazione prodotto (logico)
- Definizione dell'elemento 0
- Definizione dell'elemento 1
- Definizione di complemento

Reti di Interruttori

Uno dei modelli al quale è possibile applicare i postulati di Huntington è costituito dalle cosiddette **reti di interruttori**.

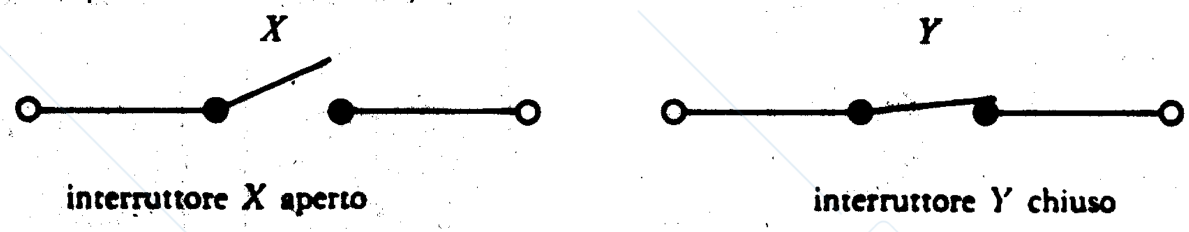
- ❑ **Definizione di un elemento nel modello**
- ❑ Definizione di operazione somma (logica)
- ❑ Definizione di operazione prodotto (logico)
- ❑ Definizione dell'elemento 0
- ❑ Definizione dell'elemento 1
- ❑ Definizione di complemento

In generale, un **elemento** X del modello (chiamato interruttore) è rappresentato dal simbolo

Consideriamo i due circuiti elementari X e Y, costituiti da un singolo interruttore per ogni circuito e ai cui capi si applica una differenza di potenziale. Per semplicità possiamo ipotizzare che sia collegata una lampadina alla fine di ogni circuito.

Ciascuno di tali circuiti può assumere soltanto uno di due possibili stati di funzionamento:

- **aperto** (la lampadina sarà spenta)
- **chiuso** (la lampadina sarà accesa)



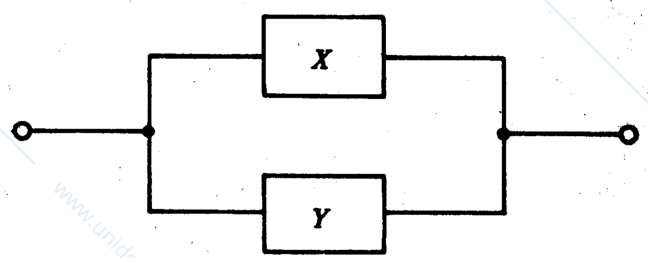
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Reti di Interruttori

- ❑ Definizione di un elemento nel modello
- ❑ **Definizione di operazione somma (logica)**
- ❑ Definizione di operazione prodotto (logico)
- ❑ Definizione dell'elemento 0
- ❑ Definizione dell'elemento 1
- ❑ Definizione di complemento

Somma Logica

Si definisce "somma logica" dei due circuiti elementari X e Y il circuito T = X + Y nel quale i due interruttori X e Y sono collegati in parallelo.



Il circuito così ottenuto risulta chiuso (cioè assume il valore 1) quando **X o Y o entrambi sono chiusi** (cioè hanno il valore 1).

Reti di Interruttori

- ❑ Definizione di un elemento nel modello
- ❑ Definizione di operazione somma (logica)
- ❑ **Definizione di operazione prodotto (logico)**
- ❑ Definizione dell'elemento 0
- ❑ Definizione dell'elemento 1
- ❑ Definizione di complemento

Prodotto Logico

Si definisce "prodotto logico" dei due circuiti elementari X e Y il circuito T = X . Y nel quale i due interruttori X e Y sono collegati in serie.

Il circuito così ottenuto risulta chiuso (cioè assume il valore 1) quando X e Y sono **entrambi chiusi** (cioè hanno il valore 1).

Reti di Interruttori

- Definizione di un elemento nel modello
- Definizione di operazione somma (logica)
- Definizione di operazione prodotto (logico)
- **Definizione dell'elemento 0**
- **Definizione dell'elemento 1**
- Definizione di complemento

Elemento 0

L'elemento "zero" di tale modello è costituito da un circuito sempre **aperto**:

0

Elemento 1

L'elemento "uno" è costituito da un circuito sempre **chiuso**:

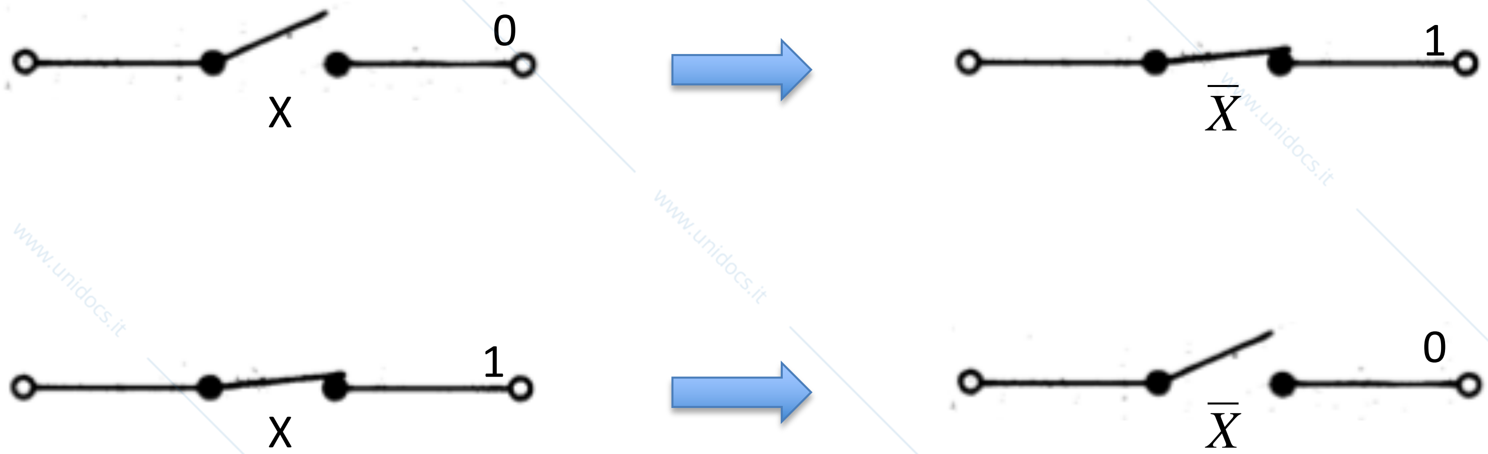
1

Reti di Interruttori

- ❑ Definizione di un elemento nel modello
- ❑ Definizione di operazione somma (logica)
- ❑ Definizione di operazione prodotto (logico)
- ❑ Definizione dell’elemento 0
- ❑ Definizione dell’elemento 1
- ❑ **Definizione di complemento**

Complemento di X

Come complemento di un circuito elementare X si assume un circuito aperto quando X é chiuso e viceversa.



Reti di Interruttori

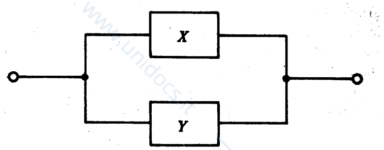
Tavole di verità

Ogni circuito assumerà un **valore (T) in uscita** (aperto o chiuso) o (0 e 1) che dipende dalla combinazione e dalla posizione (serie o parallelo) degli interruttori che lo compongono.

I possibili valori di uscita di un circuito possono essere desunti utilizzando le Tavole di verità che in base alle possibili combinazioni di ingresso e al tipo di circuito, riportano i corrispondenti valori di uscita.

Le seguenti Tabelle di verità (a. e b.) raccolgono i possibili valori assunti dai circuiti:

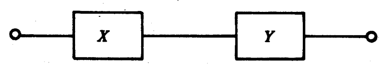
- somma logica **T = X + Y** (a.)



X	Y	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a.

- prodotto logico **T = X . Y** (b.)



X	Y	T
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

b.

Applicazione regole algebra con le Reti di Interruttori

Le tavole di verità relative ad un circuito composto da più circuiti elementari hanno tante colonne quanti sono i circuiti elementari componenti (interruttori) e tante righe quante sono le combinazioni dei loro stati di funzionamento (valori 0 e 1).

Esempio: 2 interruttori (2 colonne 4 righe)
3 interruttori (3 colonne 8 righe)
4 interruttori (4 colonne 16 righe)

Le righe (combinazioni degli stati di funzionamento) dipendono da 2 (possibili stati di funzionamento, 0 e 1) elevato al numero di (interruttori) circuiti elementari componenti.

Due circuiti si dicono equivalenti quando hanno tavole di verità identiche, cioè quando assumono lo stesso valore per una stessa combinazione di valori degli interruttori componenti.

Teoremi Fondamentali

Dallo studio dei postulati dell'algebra booleana (che omettiamo per brevità), scaturiscono quindi i teoremi fondamentali dell'algebra booleana. Tali teoremi possono essere applicati (come vedremo) alle funzioni booleane, le quali operando sulle variabili booleane producono anch'esse valori 1 e 0 (vero o falso) e sono utilizzate per la costruzione di algoritmi adatti alla risoluzione informatica di problemi.

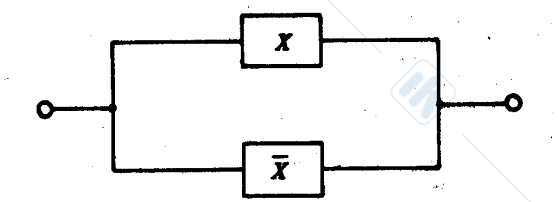
Teoremi fondamentali

$X + \overline{X} = 1$	$X \,.\, \overline{X} = 0$
$X + 1 = 1$	$X \,.\, 0 = 0$
$X + 0 = X$	$X \,.\, 1 = X$
$X + (Y \,.\, Z) = (X + Y) \,.(X + Z)$	$X \,.\, (Y + Z) = (X \,.\, Y) + (X \,.Z)$
..	
..	

Una volta quindi definito il modello e le sue regole di funzionamento, possiamo verificare la veridicità dei precedenti teoremi.

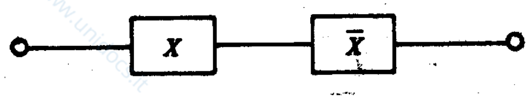
Verifica dei teoremi attraverso le tavole di verità dei rispettivi circuiti

$X + \overline{X} = 1$	**$X \cdot \overline{X} = 0$**
$X + 1 = 1$	$X \cdot 0 = 0$
$X + 0 = X$	$X \cdot 1 = X$
$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$	$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$
..	
..	



$T = X + \overline{X} = 1$

X	$\overline{X}$	T
0	1	1
1	0	1



$T = X \cdot \overline{X} = 0$

X	$\overline{X}$	T
0	1	0
1	0	0

Fig. 1.8

Verifica dei teoremi attraverso le tavole di verità dei rispettivi circuiti

$X + \overline{X} = 1$ $\quad$ $X \,.\, \overline{X} = 0$

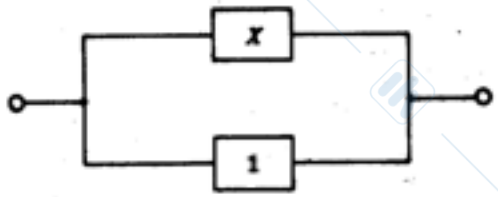
$X + 1 = 1$ $\quad$ **$X \,.\, 0 = 0$**

$X + 0 = X$ $\quad$ $X \,.\, 1 = X$

$X + (Y \,.\, Z) = (X + Y) \,.(X + Z)$ $\quad$ $X \,.\, (Y + Z) = (X \,.\, Y) + (X \,.Z)$

..

..



$T = X + 1 = 1$

X	1	T
0	1	1
1	1	1

$T = X \cdot 0 = 0$

X	0	T
0	0	0
1	0	0

Verifica dei teoremi attraverso le tavole di verità dei rispettivi circuiti

$X + \overline{X} = 1$ $\qquad$ $X \cdot \overline{X} = 0$

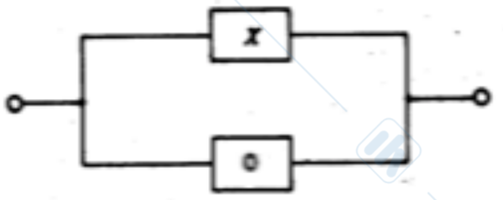
$X + 1 = 1$ $\qquad$ $X \cdot 0 = 0$

$\mathbf{X + 0 = X}$ $\qquad$ $\mathbf{X \cdot 1 = X}$

$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$ $\qquad$ $X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$

..

..



$T = X + 0 = X$

X	0	T
0	0	0
1	0	1

$T = X \cdot 1 = X$

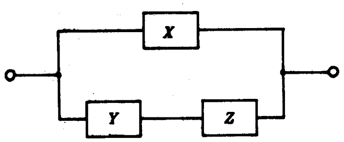
X	1	T
0	1	0
1	1	1

Verifica dei teoremi attraverso le tavole di verità dei rispettivi circuiti

Proprietà distributive:
- della operazione " + " rispetto a "."
- della operazione "." rispetto a " + "

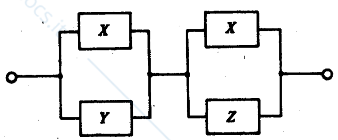
$X + \overline{X} = 1$	$X \cdot \overline{X} = 0$
$X + 1 = 1$	$X \cdot 0 = 0$
$X + 0 = X$	$X \cdot 1 = X$
$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$	**$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$**
..	
..	

$$X + (Y \,.\, Z) = (X + Y) \,.\, (X + Z)$$



$T = X + (Y \cdot Z)$

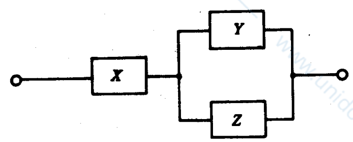
X	Y	Z	T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$T = (X + Y) \cdot (X + Z)$

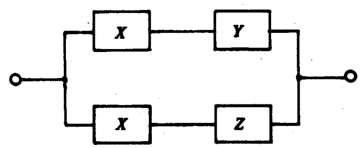
X	Y	Z	T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$X \,.\, (Y + Z) = (X \,.\, Y) + (X \,.\, Z)$$



$T = X \cdot (Y + Z)$

X	Y	Z	T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$T = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$

X	Y	Z	T
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Teorema di De Morgan

Analizzando questi teoremi di base, **Notiamo che ciascuna identità resta valida se si scambiano gli operatori logici e gli elementi 0 e 1 che esprimono i valori delle variabili.**

$X + \overline{X} = 1$ $\qquad$ $X \,.\, \overline{X} = 0$

$X + 1 = 1$ $\qquad$ $X \,.\, 0 = 0$

$X + 0 = X$ $\qquad$ $X \,.\, 1 = X$

$X + (Y \,.\, Z) = (X + Y) \,.(X + Z)$ $\qquad$ $X \,.\, (Y + Z) = (X \,.\, Y) + (X \,.Z)$

..

..

Queste identità sono note come teorema di **De Morgan.**