PROCESSO STOCASTICO: ogni variabile il cui valore cambia nel tempo in modo incerto segue un processo stocastico. I processi stocastici possono essere classificati in processi a tempo continuo e a tempo discreto così come anche le variabili.

PROCESSI MARKOVIANI: sono processi in cui solo il valore corrente della variabile è rilevante per prevedere il futuro. La storia passata è irrilevante. Questo significa che se il prezzo dell'azione segue un processo di Markov, la sua distribuzione probabilistica non dipende dal sentiero temporale seguito in passato dal prezzo dell'azione. L'ipotesi del processo di Markov è coerente con **la forma debole di efficienza** dei mercati secondo la quale il prezzo dell'azione racchiude in sé tutta l'informazione presente nella serie storica dei prezzi. Nei processi Markoviani le **variazioni** in periodi di tempo successivi sono **indipendenti**; questo significa che le **varianze sono additive** mentre le **deviazioni standard non lo sono**.

PROCESSI DI WIENER: sono particolari tipi di processi di Markov con **media nulla e varianza pari a 1**. Drift rate pari a 0 significa che il valore atteso della variabile ad ogni futuro istante di tempo è uguale al suo valore corrente. Il variance rate pari a 1 significa che la varianza delle variazioni di z in un intervallo di lunghezza T è pari a 1 x T. Se consideriamo una variabile z il cui valore cambia continuamente, possiamo dire che il cambiamento di valore in un piccolo intervallo di ampiezza Δt è Δz. la variabile segue un processo di Wiener se rispetta le 2 seguenti condizioni: 1. **$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$** dove epsilon è un'estrazione da una distribuzione normale std il cui termine di errore cresce all'aumentare dell'orizzonte temporale ma in maniera inferiore all'unità. 2. I valori di Δz sono indipendenti. Pertanto i processi di Wiener hanno media 0, varianza pari a T e dev std pari a $\sqrt{T}$. quindi la variabile z è un martingala, cioè un processo stocastico con media 0 e dev std pari a $\sqrt{T}$.

PROCESSI DI WIENER GENERALIZZATI: si differenziano dai processi di Wiener in quanto hanno un **drift rate ed un variance rate pari a delle costanti arbitrarie**. Possiamo quindi dire che una variabile x segue un processo di Wiener generalizzato con drift pari ad a e variance pari a b^2 se dx= a dt + b dz dove b dz è il noise, cioè un qualcosa che aggiunge variabilità al sentiero temporale seguito da x.

PROCESSI DI ITO: si tratta di un processo di Wiener generalizzato si caratterizzano per il fatto che il **drift rate e il variance rate sono funzioni del tempo**. Cioè i parametri a e b sono funzioni della variabile sottostante x e del tempo t. pertanto il processo di Ito può essere identificato attraverso la seguente formula: dx = a (x,t) dt + b (x,t) dz. In questo processo il tasso di deriva e il tasso di varianza possono cambiare con il tempo.

PROCESSO STOCASTICO PER LE AZIONI: i processo di Wiener generalizzati con tasso di deriva costante **non** sono appropriati per descrivere la dinamica dei prezzi delle azioni, perché il rendimento di un'azione non dipende dal prezzo dell'azione; pertanto l'ipotesi di un drift costante deve essere sostituita dall'ipotesi che sia costante il tasso di rendimento atteso dell'azione rispetto al prezzo. Questa ipotesi implica che se supponiamo essere S il prezzo dell'azione, la deriva di S e **μS** dove μ è il tasso di rendimento atteso. Pertanto in un breve intervallo di tempo Δt la variazione attesa di S è **μ S Δt**. Inoltre, il prezzo effettivo di un'azione è soggetto ad una certa volatilità. La deviazione std della variazione del prezzo dell'azione è proporzionale al prezzo dell'azione stessa. Quindi **σ S dz**. Mettendo insieme queste informazioni è possibile descrivere quello che è il processo seguito dal prezzo dell'azione: **dS = μ S dt + σ S dz (random walk o moto geometrico Browniano).** La versione in tempo discreto è: ΔS = **$\mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon\sqrt{\Delta t}$.**

LEMMA DI ITO: se conosciamo il processo stocastico seguito da x, il lemma di ito ci dice qual è il processo stocastico seguito da una certa funzione G(x,t). dato che il valore dei derivati è una funzione del prezzo del sottostante, il lemma pertanto svolge un ruolo importante nel calcolo dei derivati. Se supponiamo che una variabile x segua un processo di Ito per cui: dx = a (x,t) dt + b (x,t) dz la variabile x ha un drift pari ad a e un variance rate pari a b^2. In base al lemma di Ito, la funzione G di x e t segue il seguente processo: $dG =$

$(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$ applicando questa equazione per il prezzo delle azioni che seguono un processo pari a **dS = µ S dt + σ S dz,** il processo per una funzione G(S,t) è

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

BLACK & SCHOLES: prima di addentrarci nell'equazione differenziale è utile capire quali sono i concetti sottostanti al modello; l'ipotesi di partenza è che è possibile formare un portafoglio privo di rischio che permette di uguagliare il tasso di rendimento del portafoglio al tasso risk free. Il motivo per cui è possibile fare questa assunzione è dovuto al fatto che il prezzo dell'azione e dell'opzione sono entrambi influenzati dalla stessa fonte di incertezza che è la variazione del prezzo dell'azione. È possibile però costruire un portafoglio di azioni e opzioni che elimina questa fonte di incertezza. Questo significa che, quando si forma un appropriato portafoglio di azioni e opzioni, il profitto o la perdita sulla posizione in titoli viene sempre compensato dalla perdita o dal profitto sulla posizione in opzioni. Inoltre il modello prevede che, per restare privo di rischio, il portafoglio deve essere aggiustato continuamente. Le ipotesi sottostanti al modello sono:

- Il prezzo dell'azione segue un processo di Wiener generalizzato dove µ e σ sono costanti;
- Le vendite allo scoperto sono consentite
- Non esistono tasse o costi di transazione
- L'azione non paga dividenti durante la vita del derivato
- Non esistono opportunità di arbitraggio
- I titoli vengono negoziati continuamente
- Il tasso risk free è sempre lo stesso per tutte le scadenze.

VALUTAZIONE NEUTRALE VERSO IL RISCHIO: per la valutazione dei derivati è possibile utilizzare il principio di valutazione neutrale verso il rischio, cioè un principio secondo il quale gli investitori non richiedono un rendimento maggiore dovuto al maggior rischio che corrono. Sappiamo che nel mondo reale questa non è un'ipotesi plausibile in quanto gli operatori sono avversi al rischio. è stato osservato però, che il valore dei derivati in un mondo neutrale verso il rischio è uguale a quello che si osserva nel mondo reale. Questo può sembrare strano, ma c'è una spiegazione a questa apparente incongruenza; cioè che quando si valuta un derivato in termini di prezzo del sottostante le attitudini verso il rischio non sono importanti. Se gli investitori diventano più avversi al rischio i prezzi delle azioni scendono, ma la formula che lega i prezzi dei derivati ai prezzi delle azioni sottostanti resta inalterata. La valutazione neutrale verso il rischio è un importante principio che figura nell'equazione differenziale di B&S in quanto, in essa, non figurano variabili che influenzano la propensione al rischio degli investitori. Ne segue quindi che la propensione al rischio non può influenzare la soluzione dell'equazione; pertanto possiamo ipotizzare un mondo neutrale verso il rischio in quanto ci permette di fare delle semplificazioni notevoli sui calcoli.

WARRATS e STOCK OPTION: i warrats e le stock option si differenziano dalle calls in quanto il loro esercizio comporta l'emissione di nuove azioni da parte della società. Dato che il prezzo di esercizio è più basso del prezzo di mercato, l'emissione di nuove azioni comporta una diluizione del patrimonio aziendale. Ma questo non crea nessun effetto sulla valutazione dei warrats perché il prezzo delle azioni tiene già conto della probabilità di esercizio. Supponiamo che la società sia interessata a calcolare il costo dell'emissione. Supponiamo che S_0 è il valore corrente dell'azione, **N** il numero di azioni in circolazione e **M** il numero di warrants da emettere. Ogni warrants da diritto ad un'azione dietro versamento di un importo **K**. Il valore corrente della società sarà NS_0. Se i warrats vengono esercitati, la società riceve un flusso di cassa pari a MK e pertanto il valore del patrimonio diventa NS + MK. Pertanto il prezzo di un'azione, dopo l'esercizio del warrants sara: NS+MK/M+N e il valore finale di ogni warrats è; (NS+MK/N+M)-K

OPZIONI SU INDICI AZIONARI: le opzioni su indici azionari sono scritte su 100 x il prezzo in dollari dell'indice. Gli indici più comuni sono: S&P 100, S&P 500, Dow Jones e Nasdaq 100. Sono tutte opzioni europee tranne quelle sullo S&P 100 che sono anche americane. Tutte le opzioni vengono regolate per contanti piuttosto che con la consegna dei titoli. Pertanto, quando l'opzione viene esercitata, il possessore della call riceve dal venditore un importo pari $(S_0 – K)*100$; analogamente il possessore della put riceve un importo in denaro pari a $(K – S_0)*100$. Di rilevante importanza è il parametro **β che ci dice l'andamento dei tassi di rendimento del portafoglio rispetto a quelli dell'indice**. In particolare un **β=1** implica che i tassi di rend del portafoglio rispecchiano quelli dell'indice. La dimensione di ogni contratto sullo S&P 500 è pari a 100 volte il prezzo spot dell'indice, pertanto con β=1 il gestore compra 1 put per ogni $100*S_0$ gestiti. Se il **β è diverso da 1** il gestore, per proteggersi contro la possibilità che l'indice scenda sotto il prezzo di esercizio deve acquistare β puts per ogni $100*S_0$ gestiti.

OPZIONI SU VALUTE: questo tipo di opzioni vengono principalmente negoziate sui mercati OTC. Questo tipo di opzioni danno la possibilità ad un soggetto di coprirsi dall'esposizione sui tassi di cambio. Una società che **riceverà sterline** può coprirsi dal rischio di cambio **comprando una put** sulla sterlina. In questo modo si garantisce che il valore della sterlina non sarà inferiore al prezzo di esercizio. Al contrario, una società che dovrà **pagare in sterline** può coprirsi **acquistando una call** sulla sterlina. In questo modo si garantisce che il valore della sterlina non sia superiore del al prezzo di esercizio. Queste opzioni si differenziano dal contratto forward il quanto quest'ultimo blocca il tasso di cambio, invece le opzioni offrono un'assicurazione.

RANGE FORWARD: qst tipo di contratto è una variante del forward ordinario e vengono spesso utilizzati per coprire il rischio di cambio. Esistono 2 tipologie di range forward: **CORTO**: è formato da una posizione **lunga sulla put** con prezzo di esercizio basso K1 , e da una posizione **corta sulla call** con prezzo di es alto k2. se un soggetto sa di dover ricevere tra 3 mesi 1 mln di sterline il soggetto, per coprirsi può entrare in un forward corto. Infatti se alla scadenza si ha S < K1 la put lunga viene esercitata e la valuta estera viene venduta al tasso di cambio k1 basso. Se S> K2 la call corta viene esercitata e la valita viene venduta al tasso di cambio k2; invece se S è compreso tra k1 e k2 entrambe le opzioni vengono abbandonate. Al contrario, se un soggetto deve pagare tra 3 mesi 1 mln di sterline entrerà in un forward **LUNGO** che è formato da una put corta con prezzo di esercizio basso K1 e da una posizione lunga su una call con prezzo di esercizio alto k2. Se alla scadenza, S < K la put corda viene esercitata; se S >K viene esercitata la call lunga, se invece S è compreso tra k1 e k2 entrambe le opzioni vengono esercitate.

OPZIONI SU FUTURES: mentre le opzioni ordinarie danno al possessore il diritto di comprare o vendere a pronti un'attività entro una certa data e ad un certo prezzo, un'opzione su futures da la possibilità, ma non l'obbligo, di entrare in un contratto futures a un certo prezzo, entro una certa data. Cioè l'esercizio di queste opzioni da al possessore lil diritto di comprare o vendere l'attività sottostante a una data futura. Sono opzioni caratterizzare dal mese in cui scade il futures sottostante, non dal mese in cui scade l'opzione ed in genere sono americane, cioè possono essere esercitate in qualsiasi momento della loro vita. se viene esercitata una **call su futures,** il compratore riceve una posizione lunga sul futures più un importo in contanti pari alla differenza tra l'ultimo prezzo futures di liquidazione e il prezzo di esercizio. Quindi il payoff della call è **max(F_T – K; 0**). Se viene esercitata una **put su futures** invece il compratore riceve una posizione corta sul futures più un importo in denaro pari alla differenza tra il prezzo di esercizio e il prezzo di liquidazione. Il payoff della put è pari a **max(K - F_T ; 0).**
In genere i **contratti future sono preferiti rispetto alle opzioni su spot**; i motivi sono vari: in primis il **contratto futures è più liquido** e più facile da negoziare rispetto all'attività sottostante. Inoltre i **prezzi** futures che si formano vengono **resi noti immediatamente**. Inoltre l'esercizio dell'opzione non porta di norma alla consegna del sottostante, pertanto queste opzioni vengono **regolate in denaro**. Questo è un aspetto che piace tanto agli investitori, specialmente quelli con capitali limitati. Un altro aspetto che va a favore di questo tipo di opzioni è che le **contrattazioni** dei futures e delle opzioni sui futures **avvengono nella stessa borsa** e questo facilita le operazioni di copertura. Infine i **costi di transazione sono più bassi** rispetto a quelli delle opzioni su spot. Le futures option europee equivalgono alle spot option quando la

scadenza delle future option coincide con la scadenza del futures sottostante. Per la valutazione delle futures options, se sono europee, si può utilizzare la formula di Black valida per un'opzione scritta su un'azione che offre un dividend yield noto; andando a porre $S_0 = F_0$ e q = r. se sono americane si valutano con gli alberi dove a = 1. In generale per le futures option americane non vale che se il futures e l'opzione hanno la stessa scadenza una futures option ha lo stesso valore della spot option; e tali differenza diventa più marcata quanto maggiore è la scadenza del futures.

OPZIONI FUTURES – STYLE: si tratta di contratti futures scritti sul payoff di un'opzione. Normalmente chi compra o vende un'opzione paga o riceve un premio; per le opzioni futures style non è così, non viene pagato o ricevuto alcun premio in quanto sono opzioni soggette al meccanismo di marketing to market, cioè il contratto viene liquidato ogni giorno e il prezzo finale di liquidazione è pari al payoff dell'opzione. Mentre i futures sono una scommessa sui futuri prezzi dei futures, i futures style sono scommesse sui futuri payoff delle opzioni. Il prezzo futures di una futures-style call è $F_0N(d1) – KN(d2)$ e il prezzo do una put future style è $KN(-d2) – FN(-d1)$.

LETTERE GRECHE: le lettere greche aiutano un'istituzione finanziaria ad affrontare il problema di gestione del rischio. ogni greca misura una diversa dimensione del rischio si una posizione su opzioni. Per il calcolo delle greche i traders utilizzano il modello di B&S per le opzioni europee e gli alberi binomiali nel caso di opzioni americane. La stima della volatilità è pari alla volatilità implicita nell'opzione.

DELTA: è la derivata del prezzo dell'opzione rispetto al prezzo del sottostante. Misura la pendenza della curva che lega il prezzo dell'opzione al prezzo dell'attività sottostante. Il delta ci dice quante azioni è necessario comprare o vendere per rimanere coperti. Pertanto se supponiamo un delta pari a 0,6 significa che se il prezzo dell'azione aumenta di un certo importo, il prezzo dell'opzione aumenterà del 60% rispetto all'importo. Quando il delta delle azioni compensa il delta delle opzioni il delta è nullo. Il delta hedging consiste proprio nel creare un portafoglio neutrale in termini di delta. Una posizione con delta nullo è detta **neutrale in termini di delta.** La posizione dell'investitore resta coperta in termini di delta per un periodo di tempo relativamente breve, pertanto il portafoglio deve essere ribilanciato periodicamente. Questo appena detto è uno **schema di copertura dinamica**, che è il contrario dello schema di copertura statica che una volta impostati, non devono essere mai aggiustati. Il **delta di una call è N(d1)** mentre il **delta di una put è N(d1) -1.** Se il prezzo dell'azione aumenta il delta anche aumenta e per coprirsi è necessario acquistare azioni. Il delta di un portafoglio può essere calcolato andando a fare la sommatoria dei delta delle singole opzioni. Se consideriamo i contratti **Forward** il delta è pari a 1 perché quando il prezzo spot di un titolo cambia in misura pari a ΔS anche il valore del contratto forward cambia in misura pari a ΔS. quindi per coprire un Forward lungo è necessario assumere una posizione corta sull'azione. Se l'attività sottostante offre un dividend yield q, il delta del forward è e^{-qT}. Per ciò che concerne invece i contratti **futures,** se il prezzo spot del titolo aumenta di ΔS, il prezzo del futures aumenta in misura pari a e^{rT} ΔS; pertanto il delta è e^{rT}. Se il titolo offre un dividend yield il delta del futures è pari a $e^{(r-q)T}$.

THETA: il theta è la derivata del prezzo dell'opzione rispetto al tempo; misura la variazione del valore del portafoglio al ridursi della vita residua delle opzioni. Di solito il theta si una call o di una put è **negativo**, cioè al diminuire della vita residua, l'opzione tende a valere meno. questa greca è un parametro diverso rispetto al delta e al gamma perché c'è incertezza sul futuro prezzo dell'azione, ma non c'è incertezza sul passare del tempo. Pertanto non ha senso proteggersi dal passare del tempo. Quindi possiamo dire che il theta è una proxy del gamma.

GAMMA: è la derivata seconda del portafoglio rispetto al prezzo dell'attività sottostante, nonché la derivata del delta del portafoglio rispetto al prezzo del sottostante. Se il ϒ è piccolo il delta cambia molto lentamente e gli aggiustamenti per mantenere un portafoglio neutrale in termini di delta non vanno fatti di frequente; al contrario, se il ϒ è grande il delta è molto sensibile alle variazioni del prezzo dell'attività sottostante. Il ϒ misura l'errore di strategia di copertura che viene commesso e questo errore è tanto maggiore quanto maggiore è la curvatura della relazione tra il prezzo dell'opzione e il prezzo dell'azione. Quando il ϒ **è positivo** il valore del portafoglio si riduce se non ci sono variazioni di S, ma aumenta se si verifica una forte variazione, negativa o positiva, di S. quando il ϒ **è negativo** il val del portafoglio aumenta se S è costante, ma si riduce se si verificano delle forti variazioni positive o negative del prezzo dell'azione. Per rendere un portafoglio neutrale in termini di ϒ è necessario assumere un numero di opzioni pari a: - gamma del portafoglio/ ϒ dell'opzione. Per aggiustare il ϒ non si possono acquistare o vendere azioni perché le azioni hanno un ϒ = 0, ma è necessario utilizzare le opzioni. La neutralità in termini di delta offre protezione della variazioni di prezzo relativamente piccole, mentre la neutralità in termini di ϒ offre una protezione dalle variazioni di prezzo relativamente grandi.

VEGA: è la derivata del valore dell'opzione rispetto alla volatilità. La volatilità a cui si fa riferimento per il calcolo delle greche è quella implicita. Il modello di B&S si basa sull'ipotesi che la volatilità sia costante, ma sappiamo bene che nel mondo reale questa assunzione non è veritiera, in quanto la volatilità cambia con il tempo. Questo significa che il valore dell'opzione può cambiare non solo perché cambia il valore del sottostante, ma anche perché varia la volatilità. Il Vega tiene conto proprio di questo aspetto. Se il **Vega è alto** il valore dell'opzione è molto sensibile a piccole variazioni della volatilità. Se il **Vega è basso** il prezzo dell'opzione non è molto sensibile alle variazioni di volatilità. Come per il ϒ, anche le posizioni sul sottostante hanno il Vega nullo, pertanto non può essere modificato assumendo una posizione sul sottostante. Un problema importante si pone quando le opzioni presenti nel portafoglio hanno volatilità implicite diverse; ma se assumiamo che le volatilità variano in egual misura possiamo rendere il **portafoglio neutrale in termini di Vega** mettendo a rapporto il Vega del portafoglio con il Vega della singola opzione. La neutralità in termini di Vega ci offre protezione contro le variazioni di volatilità. Il Vega ci dice quante opzioni è necessario comprare (vendere) all'aumentare (diminuire) della volatilità.

RHO: è la derivata del prezzo dell'opzione rispetto al tasso di interesse. Questa variabile misura la sensitività del valore dell'opzione rispetto ai tassi di interesse. Nella prassi r viene posto pari al tasso risk free e questo implica che, quando le opzioni presenti nel portafoglio hanno diverse scadenze, il trader è esposto alle variazioni dell'intera struttura a termine dei tassi. Se ci troviamo di fronte ad opzioni scritte su valute esistono 2 rho, uno per il tasso interno e uno per il tasso estero (rf).

METODO DELLE DIFFERENZE FINITE: consente di valutare i derivati risolvendo l'equazione differenziale che ne descrive il comportamento. L'equazione differenziale viene convertita in un insieme di equazioni che vengono risolte iterativamente. Si divide la vita dell'opzione in N intervalli uguali e si stabilisce un prezzo max di S ed infine si considerano M intervalli di S della stessa dimensione. Uno di questi intervalli corrisponde al prezzo corrente. Una volta arrivati a questo punto viene predisposta una griglia dove sull'asse delle ordinate vi è il prezzo dell'azione, mentre sull'asse delle ascisse vi è il tempo. Poniamo $f_{i,j}$ il valore di f al tempo i quando il prezzo dell'azione è j. Possiamo calcolare la derivata di f rispetto a S nei punti interni attraverso un'approssimazione simmetrica, cioè facendo una media tra l'approssimazione in avanti e indietro. Per il calcolo della derivata di f rispetto al tempo, viene utilizzata l'approssimazione in avanti mentre il **ϒ** viene calcolato prendendo l'approssimazione in avanti e sottraendo l'approssimazione all'indietro e si divide tutto per ΔS. Una volta calcolate queste derivate, le inseriamo nell'equazione differenziale e si ottiene il sistema che è dato da: $f_{i+1,j} = a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1}$. Questo appena presentato è il **metodo implicito.** Se consideriamo una put, definiamo i valori nei 3 bordi della griglia dove, se S = 0 allora f = K, se S_{max} -> f = 0 e se t = T allora f = max (k – j ΔS, 0). Il valore negli altri punti si determina con un sistema di M-1 equazioni simultanee. In ogni punto si confronta il valore così determinato con il valore intrinseco per decidere se l'esercizio anticipato è conveniente o meno. questo è un metodo molto buono dal punto di vista teorico, ma è un po' complicato perché quanto più sono i dati, più è probabile che il software vada il tilt. Un metodo per semplificare questo aspetto è quello di prendere le derivate prima e seconda rispetto a S ed assumerle uguali nei punti i,j e i+1, j. Ma ha il vantaggio che l'utente non deve usare alcun accorgimento per assicurarne la convergenza. Dall'altro lato abbiamo il **metodo esplicito** che equivale all'approccio degli alberi trinomiali. I metodi delle differenze finite consentono di valutare i derivati sia di stile americano che europeo, ma non possono essere facilmente utilizzati nei casi in cui il valore finale del derivato dipende dalla storia passata del sottostante. Possono essere utilizzati anche quando il valore del derivato dipende da più variabili stocastiche, ma i tempi di calcolo aumentano esponenzialmente. Il metodo di calcolo delle lettere greche è simile a quello che viene utilizzato per gli alberi, cioè il delta, ϒ e teta possono essere calcolati direttamente in base ai valori f i,j della griglia, mentre per il vega bisogna modificare leggermente la volatilità e ricalcolare il valore del derivato usando sempre la stessa griglia.

MASSIMA VEROSIMIGLIANZA: il metodo della max verosimiglianza è uno dei metodi utilizzati dai modelli Garch e EWMA per la stima dei parametri sulla base dei dati storici. Questo ci permette di determinare i parametri che massimizzano la probabilità che il campione venga osservato. Ad esempio supponiamo di osservare un portafoglio di 10 titoli dei quali uno solo ha registrato una riduzione di prezzo. La probabilità di ribasso del titolo ovviamente è pari al 10%. Questa è la stessa risposta che viene fornita dal metodo della max verosimiglianza perché ponendo p la probabilità di ribasso, allora la probabilità che il prezzo del titolo scenda e che tutti gli altri restino costanti è pari a $p(1-p)^9$. Per determinare il valore di p che massimizza l'espressione è necessario calcolare la derivata prima rispetto a p e porla uguale a 0. Risolvendo in questo modo otteniamo che p= 10%. Lo stesso discorso può essere fatto per la stima della varianza quando il campione è composto da m osservazioni e la distribuzione sottostante è normale con media nulla e varianza costante. La densità di probabilità è data da $\frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{v}}}\ e^{\frac{u^2}{2v}}$. Per stimare la varianza è necessario massimizzare questa espressione. massimizzare questa espressione equivale a massimizzare il logaritmo dell'espressione stessa. Pertanto l'espressione, inserendo i logaritmi e eliminando le costanti moltiplicative, diventa $-m\ln(v) - \sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^2}{v}$. Calcolando la derivata prima rispetto a v e ponendola pari a 0 otteniamo $v = \frac{1}{m}\sum u^2$.

Agli stessi risultati arriveremmo se utilizzassimo **EXCEL:** andiamo a fissare i valori iniziali di omega, alfa e β. Aggiorniamo le stime dei tassi di varianza e calcoliamo la funzione obiettivo: $-m\ln(v) - \sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^2}{v}$. Dopo di ciò utilizziamo il Risolutore per trovare i parametri che massimizzano la funzione obiettivo.

PUNTAMENTO DELLA VARIANZA: è un altro metodo per la stima dei parametri del Garch che consiste nel fissare un tasso di varianza medio di lungo periodo V_L uguagliandolo alla varianza campionaria calcolata in base ai dati da analizzare. In questo modo restano da stimare solo i parametri alfa e β.

MODELLO DI HESTON:

Possiamo dire che i modelli omoschedastici come B&S, sono utili, ma non riflettono bene la realtà, in quanto la volatilità varia nel tempo e non è vero che la variazione dell'opzione dipende solo dalla volatilità del sottostante. Un modello molto utilizzato è quello di Heston che è un modello più generale del modello di B&S in quanto, se si fanno determinate assunzioni come a=b=0 si ottiene il modello di B&S come caso speciale. Ciò che differenzia il modello di Heston da B&S sono le volatilità delle volatilità e la correlazione tra le due variabili stocastiche che prende come riferimento: una è il prezzo del sottostante e l'altra è la volatilità. Il processo seguito da queste due variabili è:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{Vt}\, S_t\, d\, W_{st}\ ;\ dV_t = a(V_m - V_t)dt + b\sqrt{Vt}\, dW_{Vt}$$

dove V_m è la volatilità di media di lungo periodo; V_t la volatilità corrente; a è la velocità di aggiustamento; b è la volatilità della volatilità; $d\,W_s\, dW_V$ = rho dt. Pertanto il modello descrive il drift che dipende da dove si posiziona la volatilità di lungo periodo rispetto quella attuale, con una velocità di aggiustamento pari ad a; inoltre viene poi aggiunto un noise pari a $b\sqrt{Vt}dW_{Vt}$. Possiamo intuire che le calibrazioni in questo caso ricoprono un ruolo importante, perché dobbiamo sempre ipotizzare delle dinamiche e delle variabili che siano definiti da parametri stimati dai dati storici. Tuttavia i dati storici possono essere molto diversi dalle situazioni attuali, quindi se bisogna fare il pricing è necessario che le stime siano calibrate in modo che ci sia coerenza con i valori di mercato.

Dal punto di vista grafico quanto più b è elevato tanto più pronunciato è lo smile. Quando rho = 0 e b>0 aumenta la curtosi, cioè le code sono più spesse e questo significa che sono più probabili le grandi variazioni. Se rho < 0 si ottiene una skewness negativa e quindi un'inclinazione negativa del grafico.

CORRELAZIONI: anche per aggiornare le correlazioni possiamo usare modelli simili a quelli utilizzati per le volatilità (EWMA, Garch, Arch, schemi di ponderazione). La **correlazione** tra due variabili è data dal rapporto tra la covarianza e il prodotto delle deviazioni standard di ogni variabile. La cov è pari ad $E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$. Se utilizziamo gli schemi di equiponderazione le stime dei tassi di varianza di X e di Y basate sulle m osservazioni più recenti sono: $\frac{1}{m}\sum x^2$la stessa cosa vale per y, mentre la stima della cov = $\frac{1}{m}\sum x_{n-i}y_{n-i}$. In alternativa si può utilizzare l'EWMA; in questo caso cov = $\lambda cov_{n-1} + (1-\lambda)x_{n-1}y_{n-1}$. Bisogna fare attenzione che vi sia coerenza tra il modo in cui si calcolano le varianze e covarianze, cioè i pesi assegnati devono essere coerenti. Una volta che tutte le var e cov sono state stimate, si può costruire la **matrice delle var cov**. È necessario che questa matrice sia coerente, e non tutte le matrici simmetriche sono coerenti. Affinché una matrice possa essere internamente coerente è necessario che w^T omega $w \geq 0$ dove w sono i vettori. Le matrici che soddisfano questa proprietà sono dette **semidefinite positive**.

RISCHIO DI CREDITO: il rischio di credito è la possibilità che i debitori non rispettino gli impegni presi. Proprio per questo motivo esistono le società di rating che hanno il compito di dare una valutazione, un punteggio ad ogni società, così da permettergli di capire chi ha di fronte. Le società di rating più importanti sono Moody's e S&P le quali classificano le obbligazioni di una società in base al merito creditizio. Una misura fondamentale da considerare quando si valuta il rischio di credito è la **probabilità di insolvenza** (λ). Tali probabilità crescono con la scadenza se la società ha un rating è elevato e diminuiscono se il rating è basso. Le prob di insolvenza possono essere **condizionate** o **non condizionate**. Quelle non condizionate sono quelle che vengono determinate sulla base delle informazioni disponibili in t0, mentre le prob di insolv condizionate sono le prob che l'insolvenza si verifichi un certo anno, condizionate dall'assenza di insolvenza negli anni precedenti. Tale prob è data dal rapporto tra la prob di insolvenza non condizionata Q(t) e la prob di sopravvivenza V(t). dove $V(t)= e^{-\lambda t}$; $Q(t)= 1- e^{-\lambda t}$. un altro importante parametro che non bisogna perdere di vista è il **tasso di recupero (R),** cioè la probabilità che la società riesca a ripagare i propri debiti a seguito dell'insolvenza. Questo tasso è dato dal rapporto tra il valore di mercato subito dopo l'insolvenza e il valore nominare del titolo. Vi è una relazione negativa tra il tasso di recupero e la prob di insolvenza.
Le **prob di insolvenza possono essere determinate sulla base dei prezzi delle obbligazioni oppure sulla base dei dati storici**. Quando vengono determinate sulla base dei prezzi delle obbligazioni tali prob sono pari al rapporto tra lo spread e (1-R) dove lo spread è dato dalla differenza tra il tasso di rendimento promesso dall'obbligazione e il tasso risk free che è il libor/swap – 10 pb. Altrimenti viene anche utilizzato lo spread degli asset swap che misura la distanza tra i tassi di rendimento delle obbligazioni e la Libor/swap curve. Le **prob di insolvenza stimate sulla base dei dati storici** sono date dal rapporto tra – ln[1-Q(t)]/t. queste prob sono, generalmente, molto più basse di quelle stimate in base ai prezzi delle obbligazioni. Il rapporto tra le intensità di insolvenza basate sui prezzi delle obbligazioni e quelle basate sui dati storici tende a diminuire col peggiorare della qualità creditizia, mentre la differenza tra le due misure tende ad aumentare. Le prob di ins stimate in base ai prezzi delle obbligazioni sono prob neutrali vs il rischio, cioè il valore corrente dei pagamenti è attualizzato al tasso risk free, mentre quelle stimate sui dati storici sono effettive. La differenza tra queste due prob determina gli **extra rendimenti.** le **ragioni** per cui le prob di insolv basate sui prezzi delle obbligazioni sono molto maggiori rispetto a quelle basate sui prezzi storici sono molteplici; in primis perché le obbligazioni sono **poco liquide** e pertanto gli investitori richiedono un rendimento più elevato. Poi perché vi è una certa **avversione al rischio da parte dei bond traders** che

tendono ad includere nei prezzi delle obbligazioni degli scenari di depressione molto maggiori di quelli che si sono osservati storicamente. Poi un altro motivo è dovuto al **rischio sistematico**, cioè per il fatto che le insolvenze sulle obbligazioni si verificano in maniera dipendente le une con le altre, tendono ad influenzarsi. Ci sono periodi in cui le insolv sono molto frequenti e periodi in cui non lo sono. Le variazioni dei tassi di insolvenza danno luogo ad un rischio sistematico che non può essere diversificato, pertano gli investitori richiedono un extra rendimento. Infine un altro fattore che influenza sulla divergenza tra le due prob di insolvenza è il rischio non sistematico, che non può essere diversificato proprio perché parliamo di obbligazioni e non di azioni; le obbligazioni sappiamo che hanno una distribuzione del tasso di rendimento molto asimmetrica, pertanto risulta molto difficile diversificare il rischio.

MODELLO DI MERTON: è un modello che ha a che fare con il rischio di credit; è stato formulato nel 1974 da Merton proprio per superare il problema che i rating vengono rivisti poco frequentemente. Infatti questo modello prende in considerazione i prezzi delle azioni che offrono delle stime più aggiornate delle prob di insolvenza. In particolare, il modello prevede la possibilità di uguagliare le azioni di una società con le opzioni scritte sul valore delle attività aziendali. Se il valore delle attività aziendali è minore del debito la società ovviamente dichiarerà fallimento e il valore delle azioni sarà nullo, al contrario se il val delle attività aziendali è maggiore del valore del debito la società sarà in grado di rimborsare le obbligazioni. In questo caso il valore delle azioni è pari alla differenza tra il val delle attività aziendali e il debito. Da questo possiamo capire che le azioni sono come una call scritta sul valore delle attività aziendali con prezzo di es pari al debito e scadenza al tempo T. pertanto il valore corrente dell'azione è $V_0N(d1) – De^{-rT}N(d2)$ dove $N(d1)= \ln(V/D)+(r+ \sigma^2 /2)T/\sigma \sqrt{T}$ e $N(d2)=d1 – \sigma \sqrt{T}$. Il vantaggio di questo modello è che da esso possiamo determinare sia le prob di insolv effettive che quelle neutrali vs il rischio attraverso la funzione monotona.

CVA E DVA: l'aggiustamento del valore del credito è la stima del valore attuale delle perdite attese dalla banca nel caso in cui la controparte dovesse risultare insolvente, mentre **l'aggiustamento del valore del debito** è la stima del valore attuale dei guadagni attesi dalla banca nel caso in cui dovesse risultare essa stessa insolvente. Mentre il valore in assenza da insolvenza è definito no default value ed è il valore di un contratto nell'ipotesi che nessuna delle due parti fallirà. Pertanto, il valore complessivo dei contratti è pari: DVA + f nd – CVA. Il CVA (DVA) è dato dalla sommatoria delle perdite (guadagni) attese moltiplicati per la prob neutrale vs il rischi che la controparte (o la banca stessa) fallisca. Tale prob è la prob di insolv stimate sulla base dei prezzi delle obbligazioni, cioè il rapporto tra lo spread e (1-R) mentre per il calcolo delle perdite attese è necessario ricorrere al metodo di Monte Carlo, in cui in ogni simulazione si calcola l'esposizione verso la controparte. L'esposizione è pari al max tra il valore complessivo dei contratti (V) e 0. Se $V<0$ l'esposizione è nulla altrimenti è pari a V. quando però vi sono delle garanzie sui contratti la valutazione delle perdite è più complessa in quando bisogna tener conto del periodo di grazia (periodo in cui la società, prima dell'insolvenza, smette di prestare le garanzie). Il metodo di calcolo del CVA e DVA si basa sull'ipotesi che le prob di insolvenza della controparte e l'esposizione della banca non siano dipendenti, ma non sempre questa ipotesi viene rispettata; infatti quando c'è una dipendenza positiva, per cui la prob di insolv della controparte tende ad essere alta quando l'esposizione della banca è alta si parla di **rischio appropriato,** altrimenti si parla di **rischio appropriato.**

MITIGAZIONE DEL RISCHIO DI CREDITO: le banche mettono in atto una serie di manovre finalizzate a mitigare, ridurre al massimo il rischio di credito. una tra queste è il **netting**, cioè la clausola di saldo netto. Questa clausola tiene conto di tutti i contratti in essere tra le parti qualora la controparte dovesse risultare insolvente; questo fa si che le perdite della banca siano inferiori rispetto a quelle che avrebbe senza la clausola. Se ad esempio ci sono in essere 3 contratti pari a +10, +30, -25 mln senza il netting la perdita complessiva sarebbe di 40 mln, con il netting è di 15 mln. un altro modo per mitigare il rischio è l'**haircut,** cioè il taglio di capelli. Le garanzia di solito vengono depositate in contanti o in titoli, qualora la controparte scegliesse la seconda alternativa, i titoli dati in garanzia vengono ridotti di una certa percentuale rispetto al loro val di mercato. Un ulteriore metodo con cui la banca può mitigare il rischio di credito è rappresentato dall'inserimento nel contratto di **clausole risolutive determinate dal peggioramento del rating** della controparte.

DEFAULT CORRELATION: è la correlazione tra le insolvenze, cioè la tendenza di due società a fallire più o meno contemporaneamente. I motivi dell'esistenza della default correlation sono molteplici, ma sicuramente uno è dovuto al fatto che le società lavorano nello stesso settore; pertanto una crisi di settore mette in difficoltà tutte le società che operano al suo interno. Esistono 2 classi di modelli che misurano la default correlation: modelli a forma ridotta e modelli strutturali.

Modello a forma ridotta: è un modello della default correlation (la tendenza di 2 società a fallire più o meno contemporaneamente). In questi modelli si ipotizza che l'intensità di insolvenza delle varie società seguano un processo stocastico e siano correlate con le variabili macroeconomiche. C'è una correlazione tra le insolvenze di due società se, quando l'intensità di insolvenza è elevata allora lo è anche quella della società B. questi modelli sono attraenti dal punto di vista matematico, ma il principale inconveniente è che il campo di variazione delle possibili default correlation è limitato. Anche quando c'è perfetta correlazione tra due int. Di insolv. La correlazione tra le due società è di solito molto bassa.

Modelli strutturali: si basano su idee simili al modello di Merton cioè l'ipotesi secondi la quale le società falliscono se il valore delle attività scende al di sotto di un certo livello. Questi modelli hanno il vantaggio che la correlazione può essere alta quanto si vuole. L'aspetto negativo è che la stima può essere molto lenta.

Copula Gaussiana: questo modello è molto famoso per ciò che concerne la default correlation il quale fa riferimento al tempo mancante all'insolvenza. Questo modello determina la correlazione tra il time to default delle diverse società ed **ipotizza che alla fine tutte falliranno**. Questo modello può essere utilizzato sia con le prob. Effettive sia con quelle neutrali vs il rischio. la coda sx della distribuzione del time to default può essere stimata in base ai dati forniti dalle agenzie di rating oppure in base ai prezzi delle obbligazioni. Siano t_1 e t_2, i times to default di due società. Se le distribuzioni probabilistiche di t_1 e t_2, fossero normali, la distribuzione congiunta sarebbe una **normale bivariata**. Tuttavia, le distribuzioni probabilistiche delle 2 variabili non sono normali. Questo è il motivo per cui si utilizzano le copule Gaussiane. Attraverso questo modello trasformiamo t_1 e t_2 in due nuove variabili x_1 e x_2 dove: $x_1 = N^{-1}[Q_1(t_1)]$ dove: Q sono le distribuzioni; N^{-1} è l'inversa della funzione di distribuzione della normale standardizzata. Per costruzione, x_1 e x_2 si distribuiscono in modo normale con media nulla e deviazione standard pari a 1. Si suppone poi che le x si distribuiscano secondo una normale bivariata con coefficiente di correlazione rho12. Quando si fa quest'ipotesi si dice che si sta utilizzando una copula Gaussiana. L'aspetto interessante del modello delle copule Gaussiane è che **può essere esteso al caso in cui le società siano più di due**. Supponiamo che le società siano n e che il time to default della i-esima società sia ti. Sia Q(ti) la probabilità che la i-esima società fallisca nel periodo (0, 1) e $x_i = N^{-1}[Q_i(t_i)]$. Ipotizziamo che le x_i si distribuiscano secondo una normale multivariata. La default correlation viene misurata come correlazione tra x_i e x_j. Questa è la cosiddetta copula correlation. L'approccio delle copule gaussiane è un modo utile per rappresentare la struttura delle correlazioni tra variabili che non sono distribuite in modo normale. questo modello però presenta dei **problemi**, cioè è necessario analizzare le correlazioni per coppie di imprese. A superare questo problema è il modello a una fattore.

Modello a un fattore: qst modello prevede che invece di determinare i coefficienti di correlazione a coppia di società, basta determinare un coefficiente comune a tutte che influenza l'insolvenza di ognuna di esse. In particolare si suppone che: $x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i$ dove **F** è il fattore comune e **Z** è il fattore che influenza solo l'insolvenza della singola società; queste due variabili si distribuiscono come due normali std ed **a** è il coefficiente di correlazione. Sia **$Q_i(T)$** la prob che la società fallisca. Secondo il modello della copula l'insolvenza si verifica quando la prob di fallimento è maggiore del tempo residuo di fallimento cioè quando $Z_i < \frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i F}{\sqrt{1-a_i^2}}$ pertanto la prob di insolvenza condizionata al fattore F è $Q_i(T|F) = N(\frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i F}{\sqrt{1-a_i^2}}$.

Credit Metrics: è una procedura interna per il calcolo del VaR creditizio. In quest'approccio, si stima la distribuzione probabilistica delle perdite creditizie simulando con il metodo Monte Carlo le variazioni di rating per ogni controparte. Se vogliamo determinare la distribuzione probabilistica delle perdite nel prossimo anno. In ogni simulazione, determiniamo, per ogni controparte, una delle possibili migrazioni di rating e l'eventuale insolvenza. Poi rivalutiamo i contratti in essere per determinare le perdite creditizie complessive dovute alle variazioni di rating e alle insolvenze. Dopo un certo numero di simulazioni, siamo in grado di ottenere una distribuzione probabilistica per le perdite creditizie, che può essere quindi utilizzata per determinare il VaR creditizio. Quest'approccio può essere molto oneroso per quanto riguarda i tempi di calcolo. Tuttavia ha il vantaggio di considerare tutte le perdite creditizie, sia quelle che derivano dalla riduzione del rating sia quelle dovute alle insolvenze.

DERIVATI CREDITIZI: sono contratti il cui valore dipende dal merito creditizio di uno o più soggetti e sono contratti che consentono di negoziare i rischi creditizi. Un derivato creditizio può essere uninominale o plurinominale. Il derivato creditizio uninominale più diffuso è il credit default swap, mentre uno dei contratti plurinominali è il collateralised debt obligation.

CDS: i credit default swap sono derivati creditizi che offrono protezione contro il rischio di insolvenza di una determinata società. In altre parole, il CDS consente all'investitore di trasformare l'obbligazione in un titolo privo di rischio. I soggetti che fanno parte di questo contratto sono 2 e sono: il soggetto che vuole proteggersi dal rischio di credito (buyer) e il soggetto che offre protezione (seller) nel caso in cui dovesse verificarsi l'evento creditizio della società di riferimento. attraverso questo contratto, qualora dovesse verificarsi l'evento creditizio, il buyer ha il diritto di vendere alla pari le obbligazioni della società, e in cambio esso si impegna ad effettuare dei pagamenti periodici a favore del venditore fino alla scadenza del CDS o fino a quando si verifica l'evento creditizio. Di solito i pagamenti vengono effettuati con cadenza trimestrale, semestrale o annuale in via posticipata. Nel caso in cui dovesse verificarsi il credit event il seller può risolvere il contratto in due modi: attraverso la **consegna fisica** (caso meno comune)**,** cioè il buyer consegna al seller tutti i titoli della società e in cambio gli viene corrisposto il valore nominale delle obbligazioni oppure **liquidazione per contanti.** Questo è il caso più comune in quanto, alcuni giorni dopo l'evento creditizio, l'ISDA organizza un'asta per determinare il prezzo di mercato delle obbligazioni. Una volta determinato il prezzo, il seller deve corrispondere la differenza tra il valore nominale e il prezzo di mercato subito dopo l'evento creditizio. Un parametro importante è il **CDS spread** che mette in rapporto il pagamento annuo che il buyer deve corrispondere al seller rispetto al nozionale. Tale valore dovrebbe essere uguale alla differenza tra il rendimento promesso dall'obbligazione e il rendimento del titolo risk free, quando non sono uguali, la differenza viene chiamata **CDS bond basis**. Il **payoff del CDS** è L(1-R) e il contratto prevede che il buyer possa decidere quali obbligazioni consegnare al seller (cheapest to deliver). Le prob di insolvenza da utilizzare per la valutazione dei CDS sono quelle neutrali vs il rischio.

BINARY CREDIT DEFAULT: sono strutturati allo stesso modo dei CDS solo che li caratterizza il fatto che il payoff che il seller deve corrispondere al buyer in caso di insolvenza è già determinato all'interno del contratto. ciò che differenzia il binary dai CDS ordinari è il comportamento che hanno di fronte al recovery rate è che i CDS non sono sensibili al tasso di recupero mentre i Binary si perché le prob di insolvenza sono circa pari a 1/(1-R) mentre il payoff dei CDS è (1-R); pertanto si elidono e il tasso non incide sul valore dei CDS. Non possiamo dire la stessa cosa nel caso dei Binary in quanto il payoff non dipende da R.

INDICI CREDITIZI: gli indici creditizi misurano gli spread di portafogli di CDS. Gli indici più usati sono i **CDX NA IG** che misurano gli spread di 125 società Nord Americane di elevata qualità creditizia e **iTraxx Europe**.

CDS FORWARD: sono contratti con i quali una parte si impegna a comprare e l'altra si impegna a vendere un CDS scritto su un certo soggetto di riferimento ad una data futura. Se il soggetto di rif fallisce prima della scadenza, il contratto cessa di esistere.

OPZIONI SU CDS: sono opzioni per acquistare o vendere un CDS scritto su un soggetto di riferimento. ad esempio se un investitore acquista una call scritta su un CDS che ha uno spread di esercizio pari a 150 bp e scadenza tra 5 anni; se tra 5 anni lo spread del CDS sarà > di 150 bp la call viene esercitata, altrimenti no.

BASKET CDS: questo tipo di contratti si riferisce ad un gruppo di soggetti di riferimento, ed è previsto un pagamento da parte del seller qualora uno di questi fallisce. All'interno del contratto viene specificato poi quando avviene il pagamento, se dopo la prima o seconda o n insolvenza. Dopo che ll'insolvenza si verifica il contratto cessa di esistere.

TOTAL RETURN SWAP: sono dei contratti che vengono spesso utilizzati come strumenti di finanziamento. sono dei contratti attraverso i quali due soggetti si scambiano il tasso di rendimento di un'obbligazione con il Libor maggiorato di uno spread. Colui che paga il tasso fisso è il **total return payer** (istituzione finanziaria), mentre colui che paga il tasso variabile è il **total return receiver,** cioè colui che vuole finanziarsi. Un esempio può essere che il receiver, che ha bisogno di finanziarsi per comprare delle obbligazioni; per finanziarsi si mette in contatto con il payer ed entra un total return swap. Il payer acquista al posto del receiver i coupon bonds in cambio di un tasso variabile che di solito è il Libor + spread. Il payer, per ridurre la sua esposizione al rischio, mantiene la proprietà delle obbligazioni per tutta la vita del total return swap. Se il receiver dovesse fallire il payer non deve affrontare tutti i problemi legali per far valere i propri diritti.

COLLATERALISED DEBT OBLIGATIONS (CDO): sono un tipo di contratto derivato plurinominale dove le attività cartolarizzate sono costituite da obbligazioni.

CDO SINTETICHE: questa tipologia di CDO vengono create sulla base di portafogli composti da CDS. Il rischio di credito di una posizione lunga su un'obbligazione è simile al rischio di credito di una posizione corta su CDS. L'originator della CDO può costruire un portafoglio di posizioni corte su CDS piuttosto che formare un portafoglio di posizioni lunghe su obbligazioni. In particolare, la CDO sintetica è strutturata in modo che le perdite dovute alle insolvenze vengano assorbite dalle diverse tranches. Possiamo definire ad es 3 tranches: **l'equity tranche** che copre il 5% del nozionale e assorbe il primo 5% delle perdite sui CDS; **mezzanine tranche** che copre il 15% del nozionale ed assorbe le perdite tra il 15 e il 20% sui CDS e la **senior tranche.**

OPZIONI ESOTICHE: sono opzioni fuori standard che vengono negoziate nei mercato OTC

packages: sono portafogli formati da calls e puts europee, forwards, denaro contante e sottostante. Spesso sono strutturati in modo da avare un costo iniziale nullo. Un esempio di packages a costo nullo è il range forward (utilizzato per le opzioni su valute) che può essere lungo o corto. Queste opzioni non hanno problemi valutativi in quanto, spacchettando il portafoglio in singoli strumenti è possibile applicare B&S e fare poi la sommatoria.

Opzioni americane perpetue: un esempio potrebbe essere la possibilità di conversione della posizione obbligazionaria in azioni che hanno una durata molto lunga cosicchè la trasformazione in azioni avviene con elevata prob in un arco temporale molto lungo. Questo tipo di opzione prevede il pagamento di un importo fisso Q quando il prezzo del sottostante S colpisce una certa barriera H. il valore del derivato è $f = Q\left(\frac{S_0}{H}\right)^{\alpha}$

Dove $\alpha = \frac{-w \pm\sqrt{w^2+2\sigma^2 r}}{\sigma^2}$ e $w = r - q - \sigma^2/2$ rappresenta il rispettivamente il drift e il noise a seconda se la barriera viene raggiunta dal basso o dall'alto. se quando S=H la call viene esercitata allora il payoff sarà Q = H – K e quindi $f = (H-k)\left(\frac{S_0}{H}\right)^{\alpha}$. È ottimale esercitare l'opzione quando i prezzi del sottostante per la call e per la put sono rispettivamente: $S_u = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1}$ e $S_d = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}$.

Opzioni americane fuori standard: mentre nelle opzioni americane std l'esercizio anticipato può avvenire in qualsiasi istante e il prezzo d'esercizio è sempre lo stesso, le opzioni fuori std hanno caratteristiche diverse. Ad es: l'esercizio anticipato può essere limitato ad alcune date (opzione Bermuda); l'esercizio anticipato può essere consentito solo in una parte della vita dell'opzione, dopo un periodo iniziale di blocco (lock-out period); il prezzo d'esercizio può cambiare durante la vita dell'opzione. Si valutano con gli alberi.

Gap option: sono opzioni in cui c'è differenza tra lo strike k e la barriera H da cui dipende l'esercizio dell'opzione. La **gap call** è una call che paga S_T – K quando S_T > H. il gap è dato dalla differenza tra H – K. Se H > K -> gap positivo altrimenti negativo. La **gap put** è una put che paga K – S_T quando S < H. Se H < K il gap è negativo. La valutazione è con B&S -> $c_{gap} = S_0 e^{-qT} N(d_1) - ke^{-rT} N(d_2)$ dove $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{H}\right)+\left(r-q+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$.

Opzioni forward start: sono opzioni che vengono pagate in t0 ma decorrono a partire da un periodo futuro T1 e scadono ad una data successiva T2. Vengono spesso utilizzate negli schemi di incentivazione dei dipendenti e di solito le caratteristiche dell'opzione vengono determinate in modo che l'opzione sia ATM nel momento in cui inizia a decorrere. Sappiamo inoltre che una call ATM ha un valore proporzionale a S, pertanto la call forward start ha un valore che è pari a c S_1/S_0.

Cliquet option: sono portafogli di call o put i cui prezzi di esercizio vengono determinati sulla base del prezzo del sottostante nell'istante in cui parte l'opzione. Vengono di solito utilizzate nel mercato valutario da una società importatrice o esportatrice sistematica che ad esempio vuole coprirsi dalle variazioni del tasso di cambio. In questo modo gli strike si aggiustano con il passare del tempo. In particolare questo portafoglio potrebbe essere formato da 20 opzioni ATM a 3 mesi (totale 5 anni). quando una delle 20 opzioni scade ne viene emessa un'altra ATM e così via fino alla scadenza. La prima opzione è ordinaria, le successive sono forward start. Valutazione: Monte Carlo.

Opzioni composte: sono opzioni scritte su opzioni e ne esistono di 4 tipi: call su call, put su put, call su put, put su call. Hanno 2 prezzi di esercizio e 2 date d'esercizio. Se consideriamo una call su call, nella prima data si es il possessore dell'opzione composta ha la facoltà di pagare il primo prezzo di esercizio e ricevere una call. La seconda call da al possessore il diritto di comprare l'attività sottostante dietro versamento del secondo prezzo di es. l'opzione verrà esercitata se il valore della call sottostante è maggiore del primo prezzo di esercizio. Vengono valutate in termini di integrali della distribuzione normale bivariata.

Opzioni Chooser: sono caratterizzate dal fatto che, dopo un periodo di tempo prefissato, il possessore può scegliere se l'opzione è una put o una call. L'opzione inizia in t0 e termina in t2; in t1 può scegliere se l'opzione è una call o una put. Questa opzione equivale ad un **package** con una call che scade in t2 e una put che scade in t1 ed esse hanno stesso k e stessa scadenza. Pertanto vale la put call parity.

Opzioni con Barriera: sono opzioni il cui valore finale dipende dal fatto che il prezzo dell'azione raggiunga o meno un certo livello. Sono molto utilizzate in quanto sono meno care rispetto alle altre opzioni. Si distinguono in *opzioni soggette a cancellazione (know out) e opzione attesa a validazione (know in).* le prime cessano di esistere quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge una certa barriera. Le know in invece iniziano ad esistere quando il prezzo del sottostante raggiunge la barriera. Tali opzioni si distinguono in *up e down* a seconda se la barriera viene raggiunta dal basso o dall'alto; pertanto si hanno 8 possibili combinazioni. Se H < K l'opzione va valutata come una standard perché da H si passa per arrivare a K. Le opzioni con barriere e quelle ordinarie sono collegate: una **call ordinaria è pari alla somma di una call up and in + una call up and down**; stesso discorso vale per le put. Un aspetto importante è la frequenza con cui si osserva il prezzo dell'attività sottostante; si ipotizza di solito che il prezzo venga osservato almeno una volta al giorno. Le opzioni con barriera godono di proprietà diverse da quelle std: ad es il ***Vega* può essere *negativo***, cioè se consideriamo una up and out call quando il prezzo dell'azione è vicino alla barriera, se aumenta la volatilità, aumenta la probabilità che la barriera venga toccata e che quindi si cancelli l'opzione.

Di conseguenza, l'aumento della volatilità porta ad una riduzione del valore dell'opzione con barriera. La valutazione può essere fatta con le formule chiuse come B&S usando la distribuzione del max/min valore raggiunto dal prezzo.

Opzioni binarie o digitali: esistono 2 tipologie di opzioni binarie: **cash or nothing** e **asset or nothing**. Ad es una **call cash or nothing** paga 0 quando S < K e paga un importo prefissato Q quando S > K. La prob che S > K è $N(d_2)$ pertanto il valore della call $_{c/n} = Qe^{-rT} N(d_2)$. La **put cash or nothing** paga 0 se S > K e Q e S < K -> $put_{c/n}= Qe^{-rT}N(-d_2)$. Una **call asset or nothing** ha valore nullo se il prezzo dell'azione termina al di sotto di K ed ha valore pari a S se S > K -> $call_{a/n} = S_0e^{-qT}N(d_1)$. Una **put asset or nothing** ha un valore nullo se il prezzo dell'azione termina al di sopra di K e una valore pari a S altrimenti -> $put_{a/n} = S_0e^{-qT}N(-d_1)$. Le opzioni ordinarie e le binarie sono collegate tra loro. Infatti una call è pari alla differenza tra una call asset or nothing e una call cash or nothing. Stessa cosa vale per le put. La valutazione viene fatta con B&S, ma sono difficili da coprire perché se ad es quando l'opzione è vicina alla scadenza ad è ATM il delta è infinito.

Opzioni lookback: sono opzioni il cui valore dipende dal prezzo min o max raggiunto dall'azione durante la vita dell'opzione e si distinguono il floating lookback e fixed lookback. Le **floating lookbak call** consentono di comprare l'attività sottostante al prezzo minimo raggiunto durante la vita dell'opzione. Il val finale è $S_t – S_{min}$. Le **floating lookbak puts** consentono di vendere l'attività sottostante al prezzo massimo raggiunto durante la vita dell'opzione. Il val finale è $S_{max} – S_t$. nel caso delle opzioni fixed il prezzo di esercizio è prefissato. Se parliamo di una call il valore finale dalla fixed lookback option è $max(S_{max} – K; 0)$ se parliamo di una put il valore finale è $max(k – S_{min}; 0)$.

Opzioni asiatiche: sono opzioni il cui valore finale dipende dal prezzo medio del sottostante osservato durante la vita dell'opzione. Si può avere una prezzo medio, parliamo in questo caso di **average price options** oppure uno strike definito su un prezzo medio, parliamo di **average strike option.** Il val finale di un average price call è $max (0, S_{med} – K)$ mentre quello di una put è $max (0, K – S_{med})$. Il valore finale di un' average strike call è $max (0, S_T – S_{med})$ mentre quello di una put è $max (0, S_{med} – S_T)$. per ciò che concerne la valutazione, se si assume che il prezzo dell'azione sia log normale e che il prezzo medio sia una media geometrica dei prezzi, vi sono formule analitiche per la valutazione di queste opzioni. Se invece (caso più comune) le opzioni sono definite in termini di medie aritmetiche, le formule analitiche non ci sono, ma esiste un'approssimazione, cioè bisogna calcolare i primi due momenti della distribuzione della media aritmetica ed assumere che questa distribuzione sia log normale.

Opzioni di scambio: sono opzioni che consentono di cedere un'attività che vale U e riceverne un'altra che vale V. il valore finale dell'opzione è max(V – U, 0). Supponendo che i prezzi delle attività seguano un moto geometrico Browniano il valore corrente dell'opzione è: $V_0e^{-qvT} N(d1) – Ue^{-quT} N(d2)$ formula di Margrabe.

DERIVATI SUI TASSI DI INTERESSE: sono contratti il cui valore dipende dal livello dei tassi di interesse. Questo tipo di derivati sono molto più difficili da valutare rispetto ai derivati su azioni o valute e i motivi sono vari: in primis il **processo stocastico** seguito dal tasso di interesse è più complesso di quello seguito dal prezzo di un'azione (random walk); per i tassi non vale questo perché i tassi sono influenzati dalle scelte di politica monetaria Inoltre i tassi di interesse non sono singoli, è un'intera curva; pertanto bisogna tener conto di tutta la **struttura a termine** dei tassi; anche per ciò che concerne la volatilità, in ogni punto della curva corrisponde una volatilità differente e quindi bisogna considerare anche la **struttura a termine delle volatilità**. Infine i tassi di interesse vengono utilizzati sia per definire i valori finali dei derivati che per attualizzarli. I 3 prodotti più diffusi sono i **bond option, i swaption e i cap/floor.**

BOND OPTION: le opzioni su obbligazioni sono opzioni che danno al compratore il diritto di acquistare o vendere un'obbligazione una certa obbligazione ad un dato prezzo, entro una certa data. Queste opzioni si distinguono i 2 categorie: **callable bonds:** sono obbligazioni che il soggetto emittente può rimborsare anticipatamente. Il prezzo di esercizio della call è il prezzo prefissato che deve essere pagato dall'emittente al portatore e di solito queste obbligazioni non possono essere rimborsati anticipatamente nei primi anni di vita. il rendimento che viene riconosciuto è maggiore rispetto alle altre obbligazioni privi di questa clausola di divieto di rimborso nei primi anni di vita. poi ci sono i **puttable bonds,** cioè delle obbligazioni che danno al soggetto investitore la possibilità di richiedere il rimborso anticipato all'emittente. Questo tipo di bonds offrono all'investitore un rendimento più basso rispetto a quello dei titoli privi di questo clausola. La **valutazione** delle bond option avviene attraverso il modello di B&S in quanto viene assunta la costanza della volatilità. Pertanto la **c= P(0,T) [F_0N(d1) – KN(d2)]** mentre la **p = P(0,T)[KN(-d2) – F_0N(-d1)]** dove N(d1)= ln (F/K)+(σ^2/2)T/$\sigma\sqrt{T}$. In questo caso il prezzo forward e il prezzo di esercizio sono **prezzi effettivi** e non prezzi secchi perché il prezzo a termine di un titolo dipende dal carry interest e dal cost of carry. Inoltre le volatilità sono **volatilità a termine** perché le obbligazioni sono caratterizzate dal fenomeno di pull to part, cioè il fenomeno secondo il quale la volatilità è più contenuta man mano che ci si avvicina alla scadenza. Di solito, le volatilità che vengono quotate per le bond option, sono volatilità dei tassi forward piuttosto che volatilità dei prezzi. Pertanto per convertire le volatilità dei prezzi in volatilità dei tassi è necessario ricorrere al concetto di duration modificata; la volatilità dei prezzi e pari al prodotto tra la volatilità dei tassi, il valore corrente del forward e la duration modificata. Di solito le opzioni sui bond vengono quotate in volatilità del tasso piuttosto che del prezzo perché i confronti sono immediati.

CAP E FLOOR: sono strumenti derivati sui tassi di interesse che permettono al detentore di proteggersi dalle variazioni eccessive in rialzo o in ribasso dei tassi di interesse. Il **cap** è un portafoglio di calls (caplet) scritte su un tasso di interesse che di solito è il Libor e l'Euribor. Per poter capire questo tipo di derivati dobbiamo pensare ad un soggetto che si vuole finanziare e tale finanziamento è a tasso variabile che viene aggiornato il base al valore del Libor. Il cap assicura che il tasso che il soggetto paga non superi una determinata soglia (cap rate) anche se il tasso Libor la supera. Il **payoff del cap** è Lδmax(tasso libor osservato e il cap rate; 0). Per ls valutazione possiamo utilizzare il modello di Black in quanto si assume che il tasso di interesse sia log normale. quindi il valore del caplet è **LδP(0,T)[F_KN(d1)-R_kN(d2).** Per ciò che concerne la **volatilità** si possono utilizzare 2 approcci: **spot volatilities** cioè si calcola una volatilità differente per ogni caplet oppure quello delle **flat volatilities** cioè utilizzare un'unica volatilità per tutti i caplets che varia a seconda della vita del cap. gli operatori preferiscono valutare con le spot volatilities in quanto permettono di identificare i caplets sottovalutati e quelli sopravvalutati.
I **floors** assicurano contro una riduzione eccessiva del tasso di interesse, ponendo un limite inferiore agli interessi dei prestiti a tasso variabile. I floors sono un portafoglio di puts scritte sul tasso di interesse. Il **payoff** è Lδmax(tasso che fa da soglia e il tasso osservato sul mercato; 0). Ci sono poi i **collars** che sono una combinazione di un cap lungo e di un floor corto, cioè pongono i limiti inferiori e superiori agli interessi dei prestiti a tasso variabile.
Quando i **tassi di interesse** sono **negativi**, il modello std non potrebbe essere più utilizzato in quanto esso si basa sull'ipotesi che i tassi si distribuiscono in modo log normale; ed è impossibile che i tassi siano negativi se si distribuiscono in modo log normale; pertanto, il problema può essere risolto in 2 modi: aggiungendo uno **spread** al tasso così da farlo diventare positivo oppure attraverso la **normale di Bachelier** la quale ipotizza che i tassi di interesse seguano una distribuzione normale, pertanto possono essere anche negativi.

SWAPTION: le swap option sono opzioni su interest rate swap che danno al portatore il diritto di entrare in un contratto swap ad un tasso swap prefissato, offrendo al possessore la garanzia che il tasso di interesse fisso che pagano non superi una determinata soglia. Per capire meglio di cosa parliamo possiamo ipotizzare che un soggetto voglia contrarre un prestito a tasso variabile tra 6 mesi e tale tasso è ancorato al Libor. Il contratto prevede la revisione semestrale del tasso ed è intenzionato a convertire i pagamenti a tasso variabile in pagamenti a tasso fisso. A questo punto il soggetto potrebbe acquistare uno swaption ed ottenere il diritto di ricevere il Libor a 6 mesi e di pagare un certo tasso fisso (6%) annuo. Se tra 6 mesi il tasso swap osservato è inferiore al 6% la swaption viene lasciata da parte altrimenti viene esercitata. La **valutazione** viene fatta sempre con il modello di black in quanto si assume che il tasso swap sia log normale. il **payoff** è pari al rapporto tra il nozionale e il numero di pagamenti annui moltiplicato per il max tra (il tasso swap osservato e il tasso fissato; 0). Mentre il cap è un portafoglio di caplet su tassi di interesse, la swaption è un'opzione sul tasso swap il cui valore è **L/m P(0,T)[livello corrente dello swap N(d1) – tasso swap fissato N(d2)].** Anche in questo caso, davanti a **tassi di interesse negativi** si può aggiungere uno **spread** al tasso di interesse oppure utilizzare il **modello normale di Bachelier**.

DELTA DEI DERIVATI SUI TASSI DI INTERESSE: il rischio delta è il rischio associato ad uno spostamento della zero curve. Dato che esistono diversi modi in cui la zero curve può spostarsi, sono diversi i delta che si possono calcolare:

- Calcolo dell'impatto di uno spostamento parallelo della zero curve, in misura pari a 1 pb. (DV01)
- Calcolo dell'impatto di piccole variazioni del prezzo dei titoli utilizzati per costruzione la curva.
- Dividere la zero curve in gruppi e calcolare l'impatto dello spostamento parallelo in un gruppo;
- Effettuare l'analisi delle componenti principali, cioè andare a stimare come cambia l'inclinazione della curva e come cambia la rotazione.

Gli operatori tendono a preferire il secondo approccio perché sostengono che l'unico motivo per cui la zero curve può cambiare è il cambiamento della quotazione di uno dei contratti utilizzati per costruirla.

Giustificazione teorica della valutazione dei caplet con B&S: è possibile dimostrare che l'estensione del modello di Black utilizzata per valutare i caplets è coerente in un mondo definito da un numerario pari al prezzo di uno ZCB con scadenza in t_{k+1}. Il prezzo del caplet è $L\delta_k P(0,T) E_{k+1}[\max(R_k - R_K, 0)]$ dove L è il nozionale, P prezzo di uno ZCB, R_k il tasso osservato e R_K il cap rate. Se supponiamo che la volatilità del tasso di interesse forward sia costante allora il tasso di interesse si distribuisce in modo log normale e pertanto l'equazione diventa: $\mathbf{L\delta_k P(0,T)[E_{k+1} R_k N(d_1) - R_K N(d_2)]}$. La teoria dimostra che il valore corrente di un qualsiasi titolo è pari al prodotto tra il suo valore atteso al tempo t_{k+1} e il prezzo di uno ZCB con scadenza in t_{k+1}. Inoltre il valore atteso del tasso di interesse relativo al periodo di impiego è uguale al tasso di interesse forward : $\mathbf{E_{k+1} (R_k) = F_k}$. Combinando questo due equazioni si ottiene la formula per il calcolo del caplet $\mathbf{L\delta_k P(0,T_{k+1})[F_k N(d_1) - R_K N(d_2)]}$.