METODO AUTOMATICO

Affrontiamo ora il calcolo della matrice di R
automatizzato rispetto al metodo Diretto si
il computer. È un po quello che fanno i prog

• In questo metodo non trascuriamo la defo
Ci ritroviamo quindi che gli spostamenti oriz
così come possiamo avere dei movimenti v

La struttura quindi ha

9 nodi · 3 gdl = 2

8 gradi di vincolo =

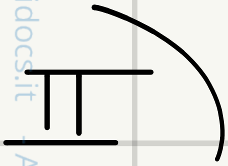
Nel complesso quindi la struttura ha

27 - 8 = 19 g

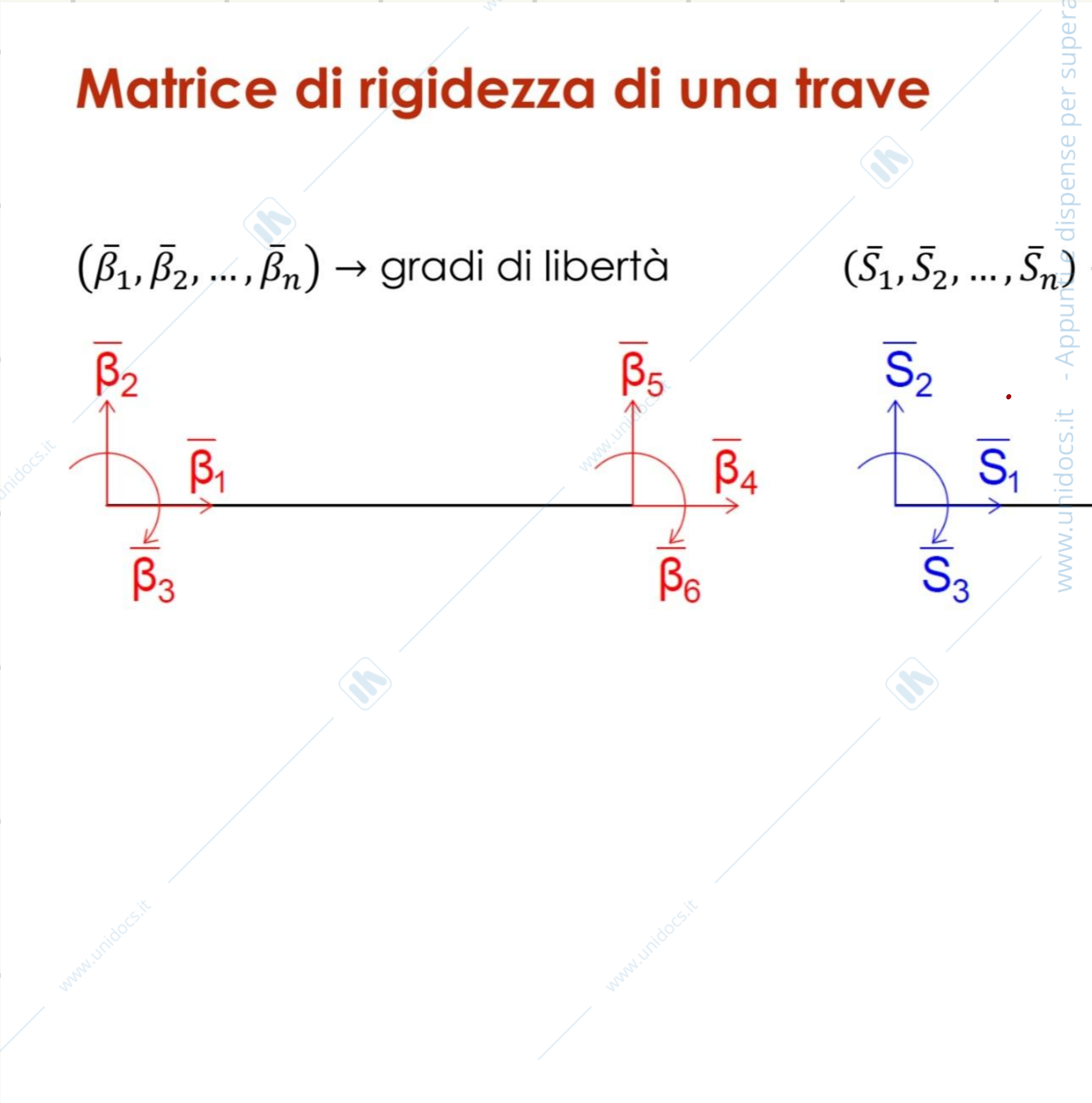
Però noi scriveremo un sistema dove mettiar
vincoli e altre i movimenti associati ai 19 mov
Questa struttura può essere caricata con cari
nodi.
Poi fissiamo un sistema di riferimento global
Poi:
In questo metodo analizziamo p

Metodo auto

Per la generica asta quindi definiremo un ve
chiaramente definite ne, sistema di riferimen



Ragioniamo ancora sulla singola asta
dimensioni 6×6 (6 movimenti possibi



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L$$

$$\downarrow$$

$$\frac{N}{EA} \cdot L = \Delta L$$

Quindi in questo caso per calcolare la Rigidez
Se:

$$\Delta L = 1$$

ALLORA:

$$N = \frac{EA}{L}$$

Le altre forse che agiscono sono:

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{12EI}{L^3}$$

Per la convenzione di positività:

$$\begin{bmatrix} EI/L & 0 & 0 & -EI \\ 0 & 12EI/L^3 & & \\ 0 & -6EI/L^2 & & \\ -EI/L & 0 & & \\ 0 & -12EI/L^3 & & \\ 0 & -6EI/L^2 & & \end{bmatrix}$$

IV) Adesso applichiamo:

$$\bar{\beta}_3 = 1 \qquad \bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 =$$

Questa matrice ha volta calcolata vale per q

L E

Abbiamo detto che la matrice è simmetrica e
significativi sono meno (21) perché gli altri so
zero perché rappresentano le forze generalizz
il movimento unitario per avere il movimento u
deve essere necessariamente positiva.

$\overline{\underline{VI}}$) Una volta calcolata la matrice possiam
stesso sistema di equazioni di equilib

$[\bar{K}] \cdot \{$

$\bar{K}$: "Segnato – " perché abbia
sistema locale dell'asta.

$\bar{B}$: vettore dei movimenti dei due

DEFINIZIONE

Matrice di rigidezza semidefinita pos

Metodo automatico

Matrice di rigidezza dell'asta nel suo sistema di riferi

Cosa significa che $[\bar{K}]$ è semidefinita positiva?

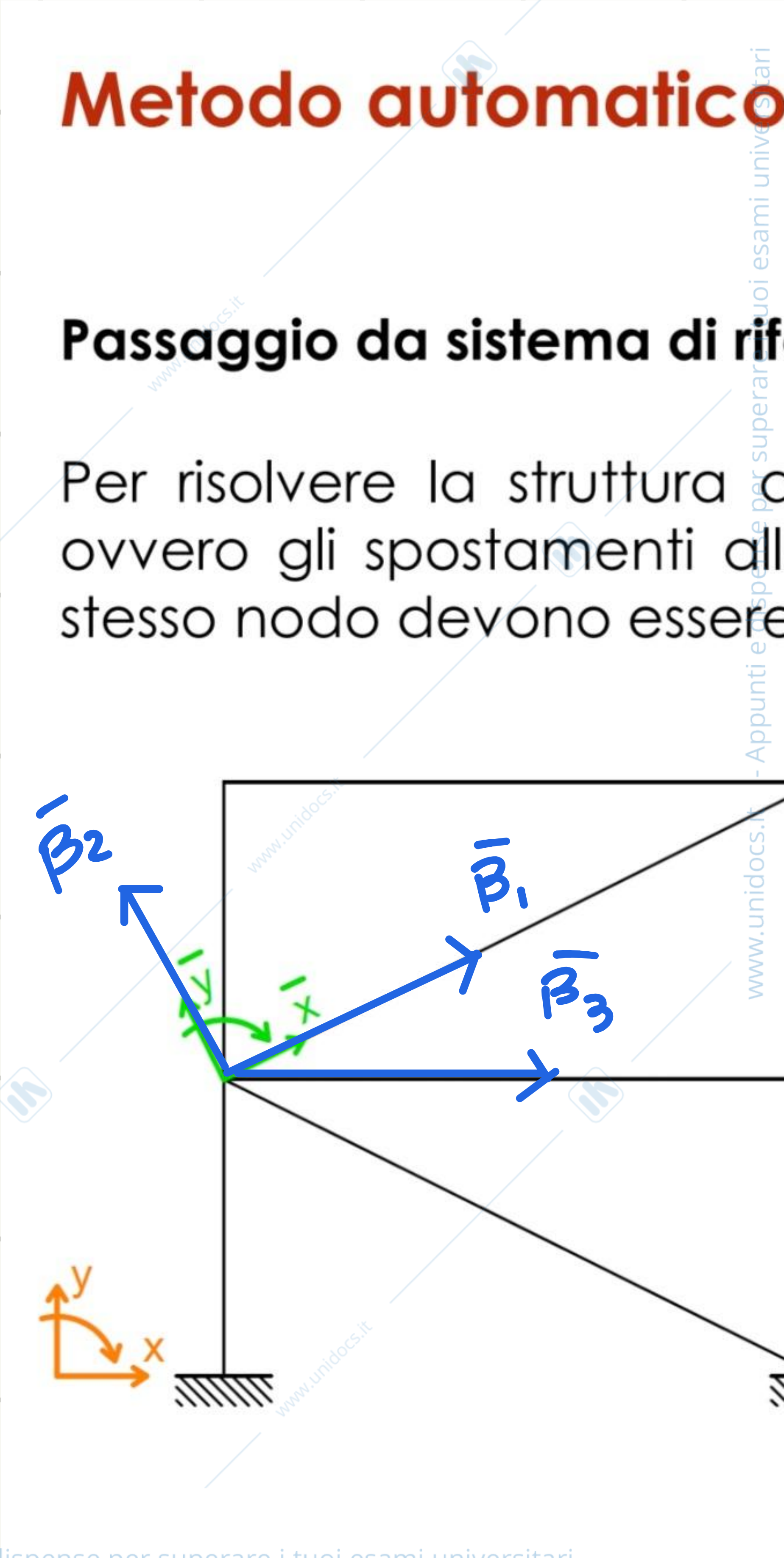
Se calcolo l'energia di deformazione U risulta:

$$U = \frac{1}{2}\{\bar{\beta}\}^T[\bar{K}]\{\bar{\beta}\} \geq 0 \quad se \quad \{\bar{\beta}\} \neq$$

Perciò per ciascun campo di spostamenti diverso da deformazione risulterà sempre positiva o nulla.

<u>Adesso dobbiamo passare dell'asta alla st</u>

Dobbiamo quindi passare dal sistema di rife



Come si fa ?

Noi pensiamo di avere un'asta inclinata di α

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 \cos\alpha$$

Quindi β_1 mi provoca un movimento in direzi

Ma c'è una componente anche lungo l'asse η

$$\bar{\beta}_2 = -$$

In definitiva:

$$\bar{\beta}_1 = \beta_1 \cos\alpha + \beta_2$$

$$\bar{\beta}_2 = -\beta_1 \sin\alpha +$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \\ \bar{\beta}_3 \\ \bar{\beta}_4 \\ \bar{\beta}_5 \\ \bar{\beta}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Scritta un forma estesa:

Metodo automatico

Passaggio da sistema di riferimento locale a quello gl

La matrice di rotazione risulta:

$$\{\bar{S}\} = [R$$

$$\{S\} = [R$$

Il nostro obiettivo è quello di riscrivere
sistema globale

Mettendo insieme quanto detto prima poss
Rigidezza e moltiplica il vettore dei movime
gioco nel sistema delle equazioni di equilibr

$$\{S\} = [R]^T [\bar{K}] [$$

Per cui otteniamo la matrice di Rigidezza de
globale:

$$\{S\} = [K]\{\beta\} + [R]^T\{\bar{S}\}$$

Adesso sovviamo mettere insieme tutto e c
quali di questi 27 sono associati all'estremi
MATRICE DI INCIDE

Metodo automatico

Assemblaggio

A questo punto occorre ass
struttura. Per farlo si usano le r
valori pari a 0 o 1 che asso
struttura (ogni riga e ogni colo
pari a 0).

$\{\beta\} = [\Lambda]\{$

- $[\Lambda]$ → matrice d'incidenza
della struttura)
- $\{\beta\}$ → vettore degli spostam
- $\{\alpha\}$ → vettore degli spostam

La matrice di incidenza associa i movimenti
struttura.
Noi quindi scriviamo:

Le righe sono associate ai β.

Le colonne sono associate age

In sostanza:

$$
[\Lambda]^{(3)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & \dots & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Per l'asta 3

Se abbiamo ad esempio il movimento α_4 n
modo che tutte le reazioni delle aste che con
equilibrio con la forza F_4 applicata in quel n
che quando sommo le reazioni in direzione 4
Quindi riassumendo in ogni nodo in ogni dire
delle aste deve essere in equilibrio con le for
Dobbiamo quindi scrivere ora questo equilibr

Metodo automatico

Equilibrio globale del sistema

Si impone l'equilibrio delle forze interne ed esterne agen

$$\sum_{i=1}^{n} \left([\Lambda]^{(i)}\right)^T \{S\}^{(i)} = \{F\}$$

Dove: $\left([\Lambda]^{(i)}\right)^T \in \mathbb{R}^{N\times 6}$, $\{S\}^{(i)} \in \mathbb{R}^{6\times 1}$, $\{F\} \in \mathbb{R}^{N\times 1}$

N: g.d.l. dell'intera struttura, n: numero di aste

Sostituendo si ottiene:

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{n} \left([\Lambda]^{(i)}\right)^T [K]^{(i)} [\Lambda]^{(i)} \{\alpha\} + \sum_{i=1}^{n} \left([\Lambda]^{(i)}\right)^T \left([R]^{(\ldots}\right.$$

Se voglio calcolare la reazione total
per calcolare la forza totale applica

$$\sum_{i=1}^{n} \left([\Lambda]^{(i)} \right.$$

n. aste

Andiamo a sostituire quello trovato prima:

$$\{S\}^i = [K]^i [\Lambda]^i \{$$

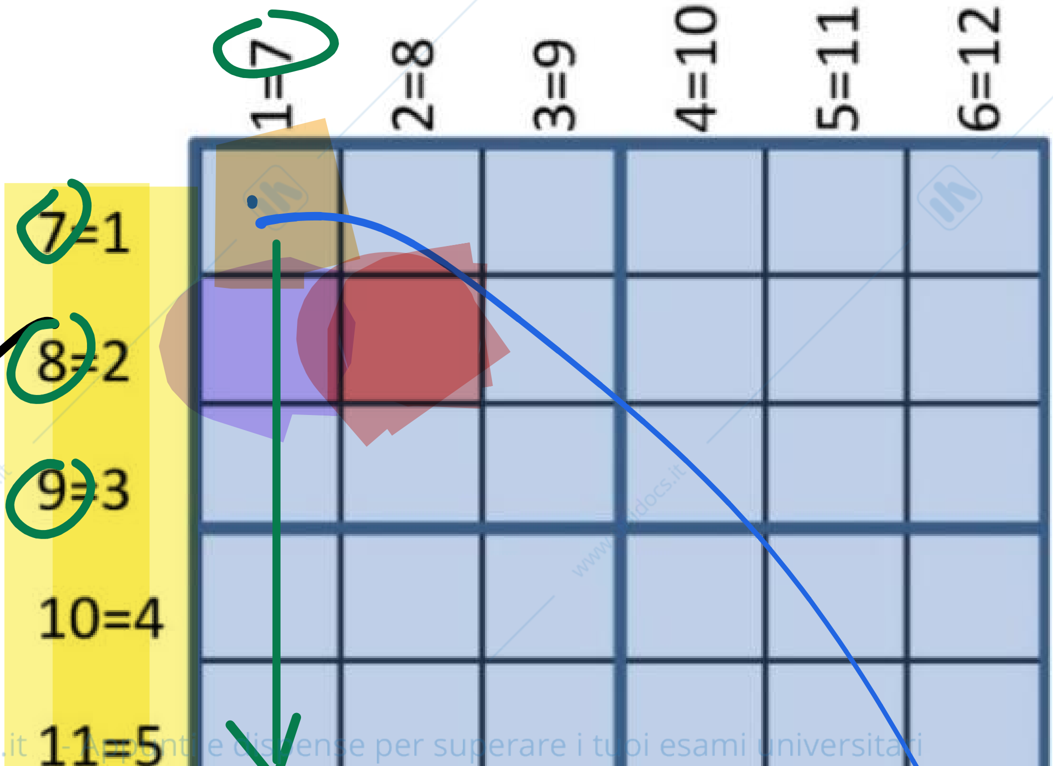
$$\{F\} = \sum_{i=1}^{n} [\Lambda]^i \cdot \{S\}^i$$

Metodo automatic

Assemblaggio matrice d

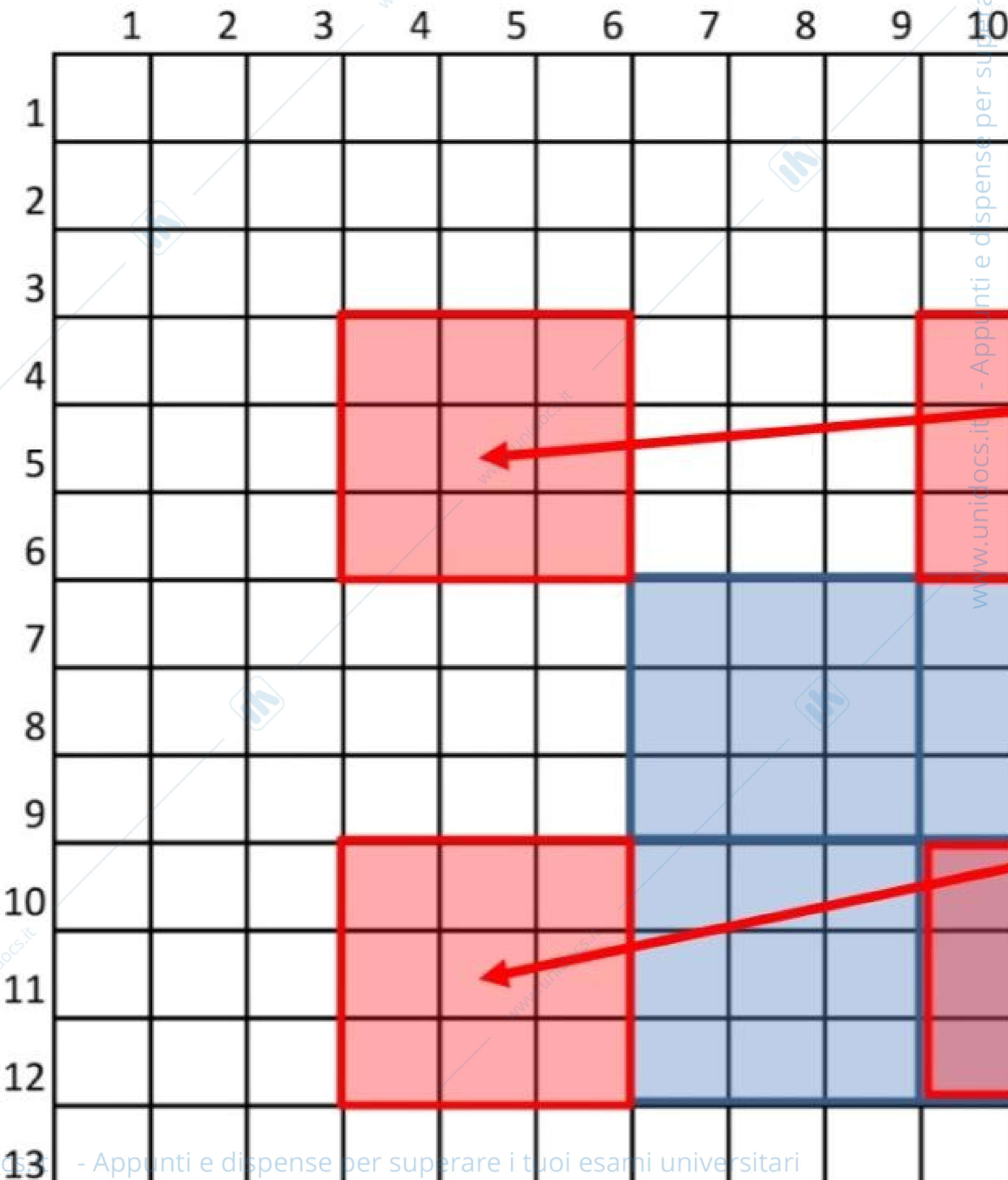
Tramite le matrici $[\Lambda]^{(3)}$
stabilita una corrisponde
quelli della struttura glob
rigidezza delle singole as

$$[K]^{(3)}$$



Metodo automatico

Assemblaggio matrice di



Quindi non abbiamo ottenuto questo sist

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{n} \left([\Lambda]^{(i)}\right)^T [K]^{(i}$$

E il numero di equazioni sono tanti quanti s
equazioni:

Metodo automatico

Equilibrio globale del sisten

In conclusione si ottiene il s

Dove:

- $\{F\} \rightarrow$ vettore delle forze
- $[\mathbb{K}] \rightarrow$ matrice di rigidezz
- $\{\alpha\} \rightarrow$ vettore delle cor
(Nx1);

QUINDI COME SI RISOLVE QUESTO

Riordinato il vettore degli alfa in modo da av
gli spostamenti noti:

Metodo automatico

Condizioni al contorno

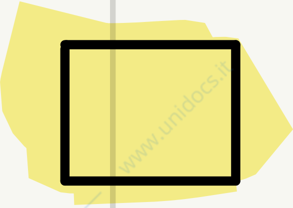
Alcuni spostamenti sono noti a priori perchè

Per considerare i vincoli innanzitutto si riordin

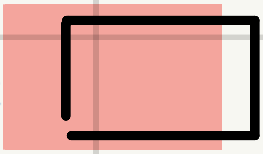
$$\begin{bmatrix} [\mathbb{K}^{11}] & [\mathbb{K}^{12}] \\ [\mathbb{K}^{21}] & [\mathbb{K}^{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \end{bmatrix}$$

Dove:

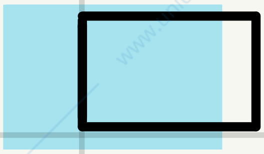
- $[u_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{18}]^T \longrightarrow$ spostar
  noti
- $[u_1] \longrightarrow$ spostamenti incogniti
- $[F_1] \longrightarrow$ forze esterne nei punti non vin
  (note)
- $[F_2] \longrightarrow$ forze esterne nei punti vinc
  reazioni vincolari (incognite)



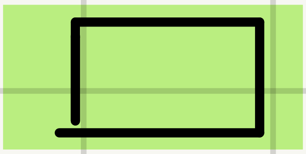
Questo è il blocco della matrice che
gli alfa incogniti.



Questo blocco moltiplica gli alfa not



Questo blocco moltiplica gli alfa inc



Questo blocco moltiplica gli alfa no

Se spesso la matrice in questo modo posso

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{K}^{11}] \\ [\mathbb{K}^{21}] \end{bmatrix}$$

Posso quindi scrivere il mio sistema così: