

## Capitolo 1

# Esercizi sui segnali aleatori

### 1.1 Caratterizzazione statistica

**Esercizio 1.1** Un segnale aleatorio  $x(t)$  è caratterizzato dalle seguenti realizzazioni equiprobabili:

$$x(t, \omega_1) = \text{rect}\left(\frac{t - 0.5T}{T}\right) \quad x(t, \omega_2) = \text{rect}\left(\frac{t - 1.5T}{T}\right)$$

dove  $T > 0$  è una costante.

- Determinare le realizzazioni del segnale aleatorio  $y(t) = x(t) + x(t - T)$  e rappresentarle graficamente.
- Determinare la caratterizzazione del primo ordine del segnale  $y(t)$ .
- Calcolare  $\mu_y(t) = E[y(t)]$  e rappresentarla graficamente.

**Esercizio 1.2** Sia  $x(n)$  un segnale aleatorio ad ampiezza discreta che assume i valori equiprobabili  $\{-1, 1\}$ .

- Calcolare la caratterizzazione del primo ordine del segnale  $y(n) = x\left[\frac{n}{3}\right]$  e stabilire se è stazionario del primo ordine.
- Calcolare  $\mu_y(n) = E[y(n)]$  e rappresentarla graficamente.

**Esercizio 1.3** Sia  $x(n)$  un segnale aleatorio ad ampiezza discreta che assume i valori equiprobabili  $\{0, 1, 2\}$ .

- Calcolare la caratterizzazione del primo ordine del segnale  $y(n) = (-1)^n x(n)$  e stabilire se è stazionario del primo ordine.
- Calcolare  $\mu_y(n) = E[y(n)]$  e rappresentarla graficamente.

**Esercizio 1.4** Si consideri il segnale aleatorio  $x(n) = \mathcal{R}_3(n + D)$ , dove  $D$  è una variabile aleatoria discreta che assume i valori equiprobabili  $\{0, 1, 2\}$ .

- Calcolare la DF del primo ordine  $p_x(x; n)$  di  $x(n)$  e stabilire se è stazionario del primo ordine.
- Calcolare  $\mu_x(n) = E[x(n)]$  e rappresentarla graficamente.

[Suggerimento: per il punto (a), rappresentare graficamente le realizzazioni del processo.]

$$\text{Risposta: (b) } E[x(n)] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{2}{3}, & n = \pm 1 \\ \frac{1}{3}, & n = \pm 2 \\ 0, & |n| > 2 \end{cases}$$

**Esercizio 1.5** Si consideri il segnale aleatorio  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , dove  $f_0 \neq 0$  è una costante e  $A \sim U(-1, 1)$ .

- (a) Disegnare alcune realizzazioni del segnale aleatorio.  
 (b) Calcolare la caratterizzazione sintetica di  $x(t)$  e stabilire se è SSL.

Risposta: (b)  $\mu_x(t) = 0$ ,  $r_x(t, \tau) = \frac{1}{3} \cos(2\pi f_0 t) \cos[2\pi f_0 (t - \tau)]$ ; non è SSL.

**Esercizio 1.6** Si consideri il segnale aleatorio  $x(t) = A \cos(2\pi F_0 t)$ , dove  $F_0 \sim U(0, 1)$  e  $A \sim U(-1, 1)$ , con  $F_0$  e  $A$  indipendenti tra loro.

- (a) Disegnare alcune realizzazioni del segnale aleatorio.  
 (b) Calcolare la caratterizzazione sintetica di  $x(t)$  e stabilire se è SSL.

Risposta: (b)  $\mu_x(t) = 0$ ;  $r_x(t, \tau) = \frac{1}{6} \left\{ \frac{\sin[2\pi(2t-\tau)]}{2\pi(2t-\tau)} + \frac{\sin(2\pi\tau)}{2\pi\tau} \right\}$ ; non è SSL.

**Esercizio 1.7** Si consideri il segnale aleatorio  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ , dove  $A \geq 0$  e  $f_0 \neq 0$  sono costanti deterministiche, e  $\Theta \sim U(0, \pi)$ .

- (a) Disegnare alcune realizzazioni del segnale aleatorio.  
 (b) Calcolare la caratterizzazione sintetica di  $x(t)$  e stabilire se è SSL.

Risposta: (b)  $\mu_x(t) = -\frac{2A}{\pi} \sin(2\pi f_0 t)$ ;  $r_x(t, \tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$ ; non è SSL.

**Esercizio 1.8** Dato un processo aleatorio SSL  $x(t)$  a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau)$ , si consideri il processo aleatorio  $y(t) = x(t)u(t)$ . Calcolare la caratterizzazione sintetica di  $y(t)$  e stabilire se è SSL.

Risposta:  $\mu_y(t) = 0$ ;  $r_y(t, \tau) = r_x(\tau)u(t)u(t - \tau)$ ; non è SSL.

**Esercizio 1.9** Si consideri il segnale RZ con livelli equiprobabili.

- (a) Calcolare la sua caratterizzazione sintetica e dimostrare che è ciclostazionario in senso lato.  
 (b) Calcolare la funzione di autocorrelazione media  $r_x(\tau)$ .

Risposta: (b)  $r_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \Lambda\left(\frac{2\tau}{T}\right)$ .

**Esercizio 1.10** Sia  $x(t)$  un segnale aleatorio SSL con media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(\tau)$ . Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale  $y(t) = x(at)$  e stabilire se è SSL.

Risposta:  $\mu_y(t) = 0$ ;  $r_y(t, \tau) = r_x(a\tau)$ ; è SSL.

**Esercizio 1.11** Sia  $x(n)$  un segnale aleatorio SSL con media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(m)$ .

- (a) Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale  $y(n) = x(Nn)$  (decimazione per  $N$ ) e stabilire se è SSL.  
 (b) Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale  $y(n) = x\left[\frac{n}{L}\right]$  (espansione per  $L$ ) e stabilire se è SSL.

Risposta: (a)  $\mu_y(n) = 0$ ;  $r_y(n, m) = r_x(mN)$ ; è SSL;

$$(b) \mu_y(n) = 0; r_y(n, m) = \begin{cases} r_x\left(\frac{m}{L}\right), & \text{se } n \text{ ed } m \text{ sono multipli di } L \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}; \text{ non è SSL.}$$

## 1.1 Caratterizzazione statistica

3

**Esercizio 1.12** Sia  $x(n)$  un processo di Bernoulli di parametro  $p$ , e si consideri il processo aleatorio (*conteggio di Bernoulli*) definito come segue:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \sum_{k=1}^n x(k) & n \geq 1 \end{cases}$$

- Disegnare una realizzazione tipica di  $x(n)$  e la corrispondente realizzazione di  $y(n)$ .
- Stabilire quali sono i possibili valori di ampiezza assunti dal segnale  $y(n)$  per ogni  $n \geq 1$ .
- Determinare la DF del primo ordine  $p_y(x; n)$  del segnale  $y(n)$  per  $n \geq 1$  e stabilire se è stazionario del primo ordine.

*Risposta:* (b)  $y(n) \in \{0, 1, \dots, n\}$  per  $n \geq 1$ ;

$$(c) p_y(x; n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & x = k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}; \text{ non è stazionario del primo ordine.}$$

**Esercizio 1.13** Calcolare l'energia del segnale aleatorio  $x(n) = \mathcal{R}_N(n)$ , dove  $N$  variabile aleatoria che assume i valori  $\{1, 2, 3, 4\}$  in modo equiprobabile.

*Risposta:*  $\mathcal{E}_x = \frac{5}{2}$ .

**Esercizio 1.14** Calcolare l'energia del segnale aleatorio  $x(t) = e^{-At} \mathbf{u}(t)$ , con  $A \sim U(1, 2)$ .

[Suggerimento: Calcolare prima l'energia di una realizzazione e poi effettuare la media statistica rispetto ad  $A$ .]

*Risposta:*  $\mathcal{E}_x = \frac{1}{2} \ln(2)$ .

**Esercizio 1.15** Dato il segnale  $x(n)$  con media nulla e autocorrelazione statistica  $r_x(n, m)$ , si consideri il segnale

$$y(n) = x(n+a) - x(n-a)$$

dove  $a \in \mathbb{Z}$  è una costante.

- Determinare la caratterizzazione sintetica di  $y(n)$ .
- Supponendo che il segnale  $x(n)$  sia SSL, stabilire se anche  $y(n)$  lo è.

*Risposta:* (a)  $\mu_y(n) = 0$ ;  $r_y(n, m) = r_y(n+a, m) - r_x(n+a, m+2a) - r_x(n-a, m-2a) + r_x(n-a, m)$ ;  
 (b) se  $r_x(n, m) = r_x(m)$  allora  $r_y(n, m) = r_y(m) = 2r_x(m) - r_x(m+2a) - r_x(m-2a)$  per cui  $y(n)$  è SSL.

**Esercizio 1.16** Sia  $y(t) = x(t) - x(t-T)$ , dove  $x(t)$  è un segnale aleatorio stazionario e  $T$  è una costante. Calcolare media e varianza di  $y(t)$  in funzione di  $r_x(\tau)$ .

*Risposta:*  $\mu_y(t) = 0$ ;  $\text{Var}[y(t)] = \text{E}[y^2(t)] = 2[r_x(0) - r_x(T)]$ .

**Esercizio 1.17** Siano  $x(t)$  ed  $y(t)$  due segnali aleatori reali congiuntamente SSL, e sia  $z(t) = x(t) + y(t)$ .

- Determinare l'autocorrelazione statistica in tempo-ritardo di  $z(t)$ .
- Ripetere il punto (a) supponendo che  $x(t)$  e  $y(t)$  siano *incorrelati*.
- Ripetere il punto (a) supponendo che  $x(t)$  e  $y(t)$  siano *incorrelati e a media nulla*.

*Risposta:* (a)  $r_z(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau) + r_{xy}(\tau) + r_{yx}(\tau)$ ;  
 (b)  $r_z(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau) + 2\mu_x\mu_y$ ;  
 (c)  $r_z(\tau) = r_x(\tau) + r_y(\tau)$ .

## 1.2 Segnali aleatori gaussiani

**Esercizio 1.18** Sia  $x(t)$  un segnale aleatorio gaussiano SSL con media  $\mu_x = 4$  e funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = 9e^{-2|\tau|} + 16$ .

- Determinare la pdf del primo ordine  $f_x(x;t)$  del segnale aleatorio.
- Determinare il vettore  $\mu_{\mathbf{X}}$  delle medie e la matrice di covarianza  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  di una coppia di campioni  $x(t_1)$  e  $x(t_2)$  del processo.
- Sulla base del risultato del punto (c), determinare la pdf del secondo ordine  $f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$  del segnale aleatorio.

*Risposta:* (a)  $\mu_X = 4$ ,  $\sigma_X^2 = 9$ ; (b)  $\mu_{\mathbf{X}} = [4, 4]^T$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 9 & 9e^{-2|t_1-t_2|} \\ 9e^{-2|t_1-t_2|} & 9 \end{pmatrix}$ ;  
 (c)  $\mu_X = \mu_Y = 4$ ,  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 9$ ,  $\rho = e^{-2|t_1-t_2|}$ .

**Esercizio 1.19** Siano  $X$  ed  $Y$  due variabili aleatorie gaussiane indipendenti, a media nulla e varianza  $\sigma^2$ , e si consideri il segnale aleatorio

$$x(t) = X \cos(2\pi f_0 t) + Y \sin(2\pi f_0 t)$$

con  $f_0$  costante deterministica.

- Dimostrare che il segnale  $x(t)$  è gaussiano.
- Determinare la caratterizzazione statistica di  $x(t)$ .
- Determinare la pdf del secondo ordine  $f_x(x_1, x_2; t_1, t_2)$  di  $x(t)$ .
- Studiare le proprietà di stazionarietà di  $x(t)$ .

*Risposta:* (a) si tratta di una trasformazione lineare del vettore  $[X, Y]^T$ ; (b)  $\mu_x(t) = \mu_x = 0$ ,  $r_x(t, \tau) = r_x(\tau) = \sigma^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$ ; (c)  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ ,  $\rho = \cos[2\pi f_0(t_1 - t_2)]$ ; (d) SSL quindi SSS.

**Esercizio 1.20** Siano  $X$  ed  $Y$  due variabili aleatorie gaussiane indipendenti, a media nulla e varianza unitaria, e si consideri il segnale aleatorio

$$x(n) = Xa^{-n}u(n) - Ya^n u(-n)$$

con  $a \neq 0$  costante deterministica.

- Dimostrare che il segnale  $x(n)$  è gaussiano.
- Determinare la caratterizzazione statistica di  $x(n)$ .
- Studiare le proprietà di stazionarietà di  $x(n)$ .

*Risposta:* (a) si tratta di una trasformazione lineare del vettore  $[X, Y]^T$ ; (b)  $\mu_x(n) = \mu_x = 0$ ,  $r_x(n, m) = a^{-(2n-m)}u(n)u(n-m) + a^{2n-m}u(-n)u(n-m)$ ; (c) non è SSL, non è stazionario del primo ordine.

**Esercizio 1.21** Sia  $x(t)$  un segnale aleatorio gaussiano SSL, a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = a\delta(\tau)$ , con  $a > 0$ , e si consideri il segnale a TD

$$y(n) = \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) dt$$

dove  $T > 0$  è una costante deterministica.

- Dimostrare che il segnale  $y(n)$  è gaussiano.
- Determinare la caratterizzazione statistica di  $y(n)$ .
- Dimostrare che  $y(n)$  è un segnale a campioni indipendenti ed identicamente distribuiti (iid).

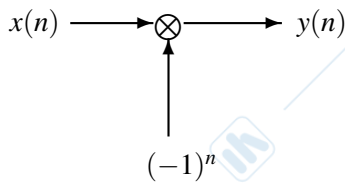


Fig. 1.1.

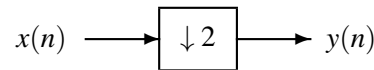


Fig. 1.2.

[Suggerimento: Per agevolare i calcoli del punto (b), far comparire una *rect* nella funzione integranda.]

Risposta: (b)  $\mu_y(n) = \mu_y = 0$ ,  $r_y(n, m) = r_y(m) = aT \delta(m)$ .

**Esercizio 1.22** Sia  $x(t)$  un segnale aleatorio gaussiano SSL, a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = \sigma^2 \text{sinc}(t/T)$ , con  $T > 0$  costante deterministica, e si consideri il segnale a TD  $y(n) = x(nT)$ .

- Dimostrare che il segnale  $y(n)$  è gaussiano.
- Determinare la caratterizzazione statistica di  $y(n)$ .
- Dimostrare che  $y(n)$  è un segnale a campioni indipendenti ed identicamente distribuiti.

Risposta: (b)  $\mu_y(n) = \mu_y = 0$ ,  $r_y(n, m) = r_y(m) = r_x(mT) = \sigma^2 \delta(m)$ .

**Esercizio 1.23** Sia  $x(n)$  un segnale aleatorio gaussiano SSL, a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(m) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$ . Calcolare le seguenti probabilità:

- $P\{x(n) > x(n-1)\}$
- $P\{x(n) \leq x(n-1) + 2\}$
- $P\{x^2(n) \leq 3\}$

Risposta: (a)  $\frac{1}{2}$ ; (b)  $\mathbb{G}(\sqrt{2}) \approx 0.9207$ ; (c)  $2\mathbb{G}(\sqrt{3/2}) - 1 \approx 0.7776$ .

**Esercizio 1.24** Con riferimento allo schema di Fig. 1.1,  $x(n)$  è un processo aleatorio gaussiano SSL avente media  $\mu_x = 1$  e funzione di autocorrelazione  $r_x(m)$  arbitraria.

- Determinare la caratterizzazione statistica di  $y(n)$  e discuterne le proprietà di stazionarietà.
- Calcolare la seguente probabilità:  $P\{y(n) + y(n-1) > 0\}$ .

Risposta: (a)  $y(n)$  è gaussiano,  $\mu_y(n) = (-1)^n$ ,  $r_y(n, m) = r_y(m) = (-1)^m r_x(m)$ ,  $y(n)$  non è stazionario in nessun senso; (b)  $\frac{1}{2}$ .

**Esercizio 1.25** Con riferimento allo schema di Fig. 1.2,  $x(n)$  è un processo aleatorio gaussiano SSL a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(m) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|}$ .

- Determinare la pdf congiunta di  $y(n)$  ed  $y(n-1)$ .
- Calcolare  $P\{y(n) > 2y(n-1) + 3\}$ .

Risposta: (a) sono congiuntamente gaussiane, con  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4$ ,  $\rho = \frac{1}{4}$ ; (b)  $1 - \mathbb{G}(3/4) \approx 0.2266$ .

**Esercizio 1.26** Sia  $x(n)$  un segnale aleatorio gaussiano a campioni iid, con  $x(n) \sim N(0, 1)$ , e si consideri il segnale aleatorio

$$y(n) = \alpha n + \beta x(n)$$

con  $\alpha, \beta$  costanti deterministiche reali e positive.

- Determinare la caratterizzazione sintetica del processo  $y(n)$  e stabilire se esso è SSL.
- Determinare l'espressione analitica della probabilità  $P\{y(n) < 0\}$  per  $n > 0$ , e valutarne il limite per  $n \rightarrow +\infty$ .

Risposta: (a)  $\mu_y(n) = \alpha n$ ,  $r_y(n, m) = \alpha^2 n(n-m) + \beta^2 \delta(m)$ , non è SSL; (b)  $P\{y(n) < 0\} = 1 - \mathbb{G}(\alpha n / \beta)$ , per  $n \rightarrow +\infty$  tende a 0.

### 1.3 Elaborazione di segnali aleatori mediante sistemi LTI

**Esercizio 1.27** Si desidera misurare una tensione continua  $V$  corrotta da rumore additivo  $w(n)$ , modellabile come una sequenza di variabili aleatorie incorrelate, a media nulla, con potenza  $\sigma_w^2$ . Per ridurre l'effetto del rumore il segnale  $x(n) = V + w(n)$  viene filtrato da un sistema MA descritto dal seguente legame i-u:

$$y(n) = ax(n) + bx(n-1).$$

Determinare:

- i valori dei coefficienti  $a$  e  $b$  in modo che la componente continua del segnale di uscita al filtro sia uguale a quella del segnale in ingresso al filtro, e contemporaneamente la potenza del rumore in uscita sia minima;
- il valore minimo della potenza di rumore in uscita.

*Risposta:* (a)  $a = b = 1/2$ ; (b)  $(\mathcal{P}_y)_{\min} = \sigma_w^2/2$ .

**Esercizio 1.28** Sia  $x(t)$  un segnale aleatorio SSL a media  $\mu_x \neq 0$  e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(\tau)$ , in ingresso ad un sistema LTI reale con risposta impulsiva  $h(t)$ . Dimostrare che le funzioni di autocovarianza statistica dell'ingresso e dell'uscita sono legate dalla relazione

$$c_y(\tau) = r_h(\tau) * c_x(\tau),$$

dove  $r_h(\tau) = h(\tau) * h(-\tau)$  è la funzione di autocorrelazione di  $h(t)$ .

[Suggerimento: Applicare le relazioni i-u per la media e la funzione di autocorrelazione statistica nel caso SSL.]

**Esercizio 1.29** Il segnale gaussiano  $x(t)$  stazionario con media  $\mu_x \neq 0$  e funzione di autocovarianza statistica  $c_x(\tau) = a \delta(\tau)$ , con  $a > 0$ , è posto in ingresso al sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(t) = A e^{-t/T} u(t), \quad \text{con } T > 0,$$

e si denoti con  $y(t)$  la corrispondente uscita.

- Calcolare la funzione di autocorrelazione del segnale di energia  $h(t)$ .
- Calcolare la pdf congiunta di  $y(t_1)$  e  $y(t_2)$ , dove  $t_1$  e  $t_2$  sono due arbitrari istanti di tempo con  $t_2 > t_1$ .

[Suggerimento: Per il punto (b), applicare il risultato dell'es. 1.28.]

*Risposta:* (a)  $r_h(\tau) = \frac{A^2 T}{2} e^{-|\tau|/T}$ ; (b)  $X = y(t_1)$  e  $Y = y(t_2)$  sono variabili aleatorie congiuntamente gaussiane, con  $\mu_X = \mu_Y = AT \mu_x$ ,  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = a \frac{A^2 T}{2}$ ,  $\rho = e^{-(t_2 - t_1)/T}$ .

**Esercizio 1.30** Il segnale aleatorio  $x(t)$ , avente media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(\tau) = a \delta(\tau)$ , con  $a > 0$ , è posto in ingresso al sistema LTI il cui legame i-u è il seguente:

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du, \quad T > 0.$$

Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale aleatorio  $y(t)$ .

*Risposta:*  $\mu_y = 0$  e  $r_y(\tau) = \frac{a}{T} \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$ .

**Esercizio 1.31** Si consideri il segnale  $x(t) = A + n(t)$ , dove  $A \in \mathbb{R}$  è una variabile aleatoria e  $n(t)$  è un disturbo aleatorio SSL con media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_n(\tau) = a \delta(\tau)$ , con  $a > 0$ . Il segnale  $x(t)$  subisce la seguente elaborazione:

$$Y = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad T > 0.$$

Calcolare l'errore quadratico medio (MSE)  $E[(Y - A)^2]$ .

*Risposta:*  $E[(Y - A)^2] = \frac{a}{T}$ .

## 1.3 Elaborazione di segnali aleatori mediante sistemi LTI

7

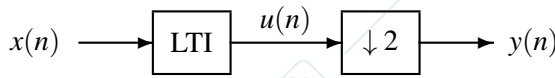


Fig. 1.3.

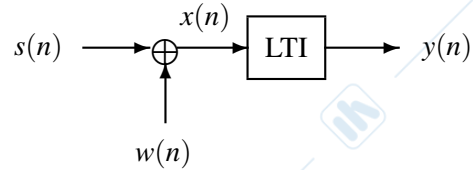


Fig. 1.4.

**Esercizio 1.32** Con riferimento allo schema di Fig. 1.3,  $x(n)$  è una sequenza di variabili aleatorie iid gaussiane a media nulla e varianza unitaria, ed il sistema LTI ha risposta impulsiva  $h(m) = \frac{1}{2}[\delta(m) + \delta(m-1)]$ .

- Determinare la caratterizzazione sintetica di  $u(n)$  e stabilire se è stazionario in senso lato.
- Calcolare la pdf marginale di  $y(n)$  per un arbitrario valore di  $n$ , e stabilire se  $y(n)$  è stazionario del primo ordine.
- Calcolare il valore di  $P\{|y(n)| > \sqrt{2}\}$ .
- Determinare la pdf congiunta di  $y(n)$  e  $y(n-m)$  per arbitrari valori di  $n$  ed  $m$ , e stabilire se  $y(n)$  è stazionario del secondo ordine.

*Risposta:* (a)  $\mu_u = 0$ ,  $r_u(n, m) = r_u(m) = \frac{1}{4}[2\delta(m) + \delta(m+1) + \delta(m-1)]$ ,  $u(n)$  è SSL; (b) per la linearità della trasformazione  $x(n) \rightarrow y(n)$ ,  $X = y(n) = u(2n)$  è una variabile aleatoria gaussiana con  $\mu_X = 0$  e  $\sigma_X^2 = r_u(0) = 1/2$ , quindi  $y(n)$  è stazionario del primo ordine; (c)  $P\{|y(n)| > \sqrt{2}\} = 2[1 - \mathbb{G}(2)] \approx 4.54 \cdot 10^{-2}$ ; (d)  $y(n)$  è gaussiano SSL con  $\mu_y = 0$  e  $r_y(n, m) = r_y(m) = r_u(2m) = \frac{1}{2}\delta(m)$ ; si tratta di una sequenza di variabili aleatorie iid quindi la pdf congiunta di  $y(n)$  e  $y(n-m)$  è il prodotto delle pdf del primo ordine; inoltre  $y(n)$  essendo gaussiano e SSL è SSS e quindi stazionario del secondo ordine.

**Esercizio 1.33** Con riferimento allo schema di Fig. 1.4, il segnale  $s(n)$  è un segnale aleatorio SSL reale a media nulla e con funzione di autocorrelazione statistica  $r_s(m) = \sigma_s^2 \rho^{|m|}$  ( $0 < |\rho| < 1$ ), il rumore  $w(n)$  è un segnale aleatorio SSL reale a media nulla e con funzione di autocorrelazione statistica  $r_w(m) = \sigma_w^2 \delta(m)$ , e il sistema LTI reale ha risposta impulsiva  $h(m) = b_0 \delta(m) + b_1 \delta(m-1)$ .

- Definito il rapporto segnale-rumore (SNR) come il rapporto tra la potenza del segnale e la potenza del rumore, calcolare l'SNR in ingresso ( $\text{SNR}_{\text{in}}$ ) ed in uscita ( $\text{SNR}_{\text{out}}$ ) al sistema LTI.
- Dopo aver espresso  $\text{SNR}_{\text{out}}$  in funzione di  $\gamma = \frac{b_1}{b_0}$ , determinare il valore di  $\gamma$  che rende massimo  $\text{SNR}_{\text{out}}$ , per fissati valori di  $\sigma_s^2$ ,  $\sigma_w^2$ ,  $\rho$  (attenzione al segno di  $\rho$ !).
- Calcolare il valore massimo di  $\text{SNR}_{\text{out}}$  in corrispondenza del valore di  $\gamma$  individuato al punto (b), e determinare al variare di  $0 < |\rho| < 1$  il massimo miglioramento (in dB) dell'SNR tra ingresso ed uscita del filtro.

*Risposta:* (a)  $\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2}$ ,  $\text{SNR}_{\text{out}} = \text{SNR}_{\text{in}} \frac{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 \rho}{b_0^2 + b_1^2}$ ; (b)  $\gamma = \text{sgn}(\rho)$ ; (c)  $\text{SNR}_{\text{out}} = \text{SNR}_{\text{in}}(1 + |\rho|)$ ; il massimo miglioramento si ha per  $|\rho| \rightarrow 1$  e vale 3 dB.

**Esercizio 1.34** Siano  $x(t)$  e  $n(t)$  due segnali aleatori SSL indipendenti con media  $\mu_x$  e  $\mu_n$ , rispettivamente, e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(\tau)$  e  $r_n(\tau)$ . Il segnale  $x(t)$  è posto in ingresso al sistema LTI il cui legame i-u è il seguente:

$$z(t) = x(t) - x(t-T).$$

Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale  $y(t) = z(t) + n(t)$ .

*Risposta:*  $\mu_y = \mu_n$  e  $r_y(\tau) = 2r_x(\tau) - r_x(\tau-T) - r_x(\tau+T) + r_n(\tau)$ .

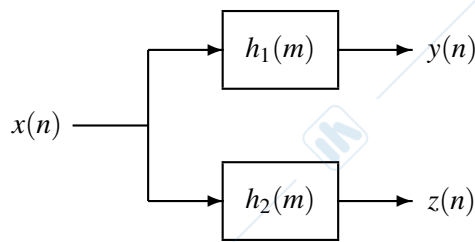


Fig. 1.5.

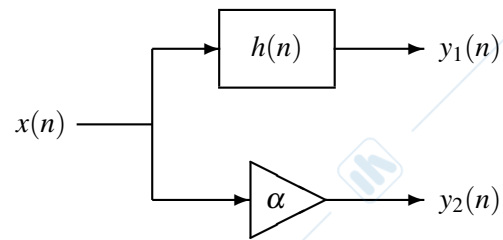


Fig. 1.6.

**Esercizio 1.35** Con riferimento allo schema di Fig. 1.5,  $x(n)$  è un segnale aleatorio gaussiano SSL a media nulla e con funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(n) = \delta(n)$ , e le risposte impulsive dei filtri sono date da

$$\begin{aligned} h_1(m) &= \delta(m) + \delta(m-1), \\ h_2(m) &= (1/2)^m u(m). \end{aligned}$$

Determinare la pdf congiunta delle variabili aleatorie  $y(0)$  e  $z(1)$ .

*Risposta:*  $X = y(0)$  e  $Y = z(1)$  sono congiuntamente gaussiane con  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X^2 = 2$  e  $\sigma_Y^2 = \frac{4}{3}$ ,  $\rho = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{8}}$ .

**Esercizio 1.36** Con riferimento allo schema di Fig. 1.6,  $x(n)$  è un segnale aleatorio SSL reale a media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$ ,  $h(n)$  è la risposta impulsiva a quadrato sommabile di un sistema LTI reale, e  $\alpha$  è una costante reale. Si determini il valore di  $\alpha$  che rende minimo l'errore quadratico medio (MSE) tra  $y_1(n)$  ed  $y_2(n)$ , definito come

$$\text{MSE} = E\{[y_1(n) - y_2(n)]^2\}.$$

*Risposta:*  $\alpha = h(0)$ .

**Esercizio 1.37** Il segnale aleatorio gaussiano SSL  $x(t)$  con media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(\tau) = \delta(\tau)$  è posto in ingresso a due sistemi LTI con risposte impulsive  $h_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$  e  $h_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right)$ , rispettivamente.

- Valutare la funzione di autocorrelazione statistica dei segnali  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  all'uscita dei due sistemi e la loro funzione di mutua correlazione statistica.
- Determinare la pdf congiunta delle variabili aleatorie  $y_1(t_1)$  e  $y_2(t_1)$ .
- Calcolare la probabilità  $P\{y_1(t_1) > 2y_2(t_1) + 3\sqrt{T}\}$ .

*Risposta:* (a)  $r_{y_1}(\tau) = r_{y_2}(\tau) = T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$ ,  $r_{y_1 y_2}(\tau) = T \Lambda\left(\frac{\tau+T/2}{T}\right)$ ; (b)  $X = y_1(t_1)$  e  $Y = y_2(t_1)$  sono congiuntamente gaussiane, con  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = T$ , e  $\rho = 1/2$ ; (c)  $P\{y_1(t_1) > 2y_2(t_1) + 3\sqrt{T}\} = 1 - \mathbb{G}(\sqrt{3}) \approx 4.18 \cdot 10^{-2}$ .

**Esercizio 1.38** Il segnale aleatorio gaussiano  $x(n)$ , a media nulla, varianza unitaria e a campioni i.i.d., è filtrato dal sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(n) = \frac{3}{4} \delta(n) + \frac{1}{4} \delta(n-1)$$

Calcolare il valore di  $P\{y^2(n) < \frac{5}{8}\}$ .

*Risposta:*  $P\{y^2(n) < \frac{5}{8}\} = 2\mathbb{G}(1) - 1 \approx 0.6826$ .

## 1.3 Elaborazione di segnali aleatori mediante sistemi LTI

9

**Esercizio 1.39** Sia  $x(n)$  un segnale aleatorio gaussiano a media nulla e funzione di autocorrelazione statistica in tempo-tempo  $r_x(n_1, n_2) = an_1 n_2 \delta(n_1 - n_2)$ , con  $a > 0$ . Il segnale  $x(n)$  è posto in ingresso al sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(n) = \frac{1}{2} [\delta(n) + \delta(n-1)]$$

- (a) Determinare la pdf del primo ordine del segnale  $y(n)$  in uscita dal sistema.  
 (b) Sulla base del risultato del punto (a), discutere le proprietà di stazionarietà del segnale  $y(n)$ .

*Risposta:* (a) per la linearità,  $y(n)$  è un segnale aleatorio gaussiano; in particolare  $X = y(n)$  è una variabile aleatoria gaussiana con  $\mu_X = 0$  e  $\sigma_X^2 = \frac{a}{4}(2n^2 - 2n + 1)$ ; (b)  $y(n)$  non è stazionario del primo ordine (la varianza dipende da  $n$ ); inoltre non è SSL, perché essendo gaussiano dovrebbe essere SSS e quindi stazionario del primo ordine; in definitiva non è stazionario in nessun senso.

**Esercizio 1.40** Il segnale aleatorio  $x(n)$  SSL con media nulla e funzione di autocorrelazione statistica  $r_x(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$  è posto in ingresso al sistema LTI *causale* il cui legame i-u è descritto dalla equazione alle differenze:

$$y(n) - \alpha y(n-1) = x(n-1).$$

- (a) Determinare la risposta impulsiva del sistema.  
 (b) Calcolare la caratterizzazione sintetica del segnale  $y(n)$  per  $|\alpha| < 1$ .

*Risposta:* (a)  $h(n) = \alpha^{n-1} u(n-1)$ ; (b)  $\mu_y = 0$  e  $r_y(m) = \frac{\alpha^{|m|}}{1-\alpha^2}$ .

## 1.4 Densità spettrale di potenza

**Esercizio 1.41** Si consideri il segnale aleatorio  $y(n) = A [x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ , con  $x(n)$  segnale aleatorio SSL a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$ , e  $A \sim U(0, 1)$  variabile aleatoria statisticamente indipendente da  $x(n)$ .

- (a) Determinare la caratterizzazione sintetica di  $y(n)$  e stabilire se è SSL.  
 (b) Calcolare la PSD di  $y(n)$ .

*Risposta:* (a)  $\mu_y(n) = \mu_y = 0$ ,  $r_y(n, m) = r_y(m) = \frac{1}{3} \sigma_x^2 [3\delta(m) + 2\delta(m+1) + 2\delta(m-1) + \delta(m+2) + \delta(m-2)]$ , è SSL; (b)  $S_y(\nu) = \frac{1}{3} \sigma_x^2 [3 + 4\cos(2\pi\nu) + 2\cos(4\pi\nu)]$ .

**Esercizio 1.42** Si consideri il segnale aleatorio

$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$

dove  $x(n)$  è una sequenza di variabili aleatorie iid a media nulla e varianza unitaria. Determinare la PSD di  $y(n)$  e rappresentarla graficamente.

[Suggerimento: individuare la risposta in frequenza del sistema.]

*Risposta:*  $S_y(\nu) = \frac{1}{(2M+1)^2} \frac{\sin^2[\pi(2M+1)\nu]}{\sin^2(\pi\nu)}$ .

**Esercizio 1.43** Si consideri il segnale aleatorio

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n) p(t - nT)$$

dove  $a(n)$  è un segnale aleatorio SSL, a media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_a(m) = \sigma_a^2 \delta(m)$ ,  $p(t)$  è un segnale deterministico reale avente energia  $\mathcal{E}_p$  finita e trasformata di Fourier  $P(f)$ , e  $T > 0$  è una costante deterministica. Tale segnale è una generalizzazione dei segnali NRZ e RZ e viene chiamato *segnale PAM (pulse amplitude modulation)*.

- (a) Determinare la caratterizzazione sintetica di  $x(t)$  e stabilire se è SSL.  
 (b) Calcolare la PSD di  $x(t)$  e la potenza  $\mathcal{P}_x$ .

[Suggerimento: per il punto (b), utilizzare la relazione notevole  $\langle \text{rep}_T[p(t)p(t-\tau)] \rangle = \frac{1}{T} r_p(\tau)$  dove  $r_p(\tau) = p(\tau) * p(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)p(t-\tau) dt$ .]

*Risposta:* (a)  $\mu_x(t) = \mu_x = 0$ ,  $r_x(t, \tau) = \sigma_a^2 \text{rep}_T[p(t)p(t-\tau)]$ , non è SSL (ma è ciclostazionario di periodo  $T$ );  
 (b)  $S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |P(f)|^2$ ,  $\mathcal{P}_x = \frac{\sigma_a^2}{T} \mathcal{E}_p$ .

**Esercizio 1.44** La banda efficace di un segnale aleatorio  $x(t)$  avente PSD  $S_x(f)$  è definita come

$$W_{\text{rms}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 S_x(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df}$$

Mostrare che, se  $r_x(\tau)$  è la funzione di autocorrelazione media di  $x(t)$ , si ha:

$$W_{\text{rms}} = -\frac{1}{4\pi^2 r_x(0)} \left. \frac{d^2}{d\tau^2} r_x(\tau) \right|_{\tau=0}$$

[Suggerimento: utilizzare le proprietà di derivazione e del valore dell'origine della trasformata di Fourier.]

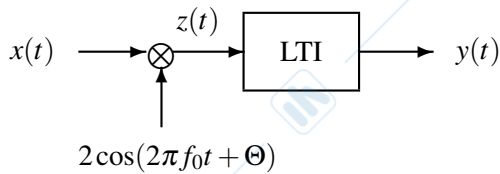


Fig. 1.7.

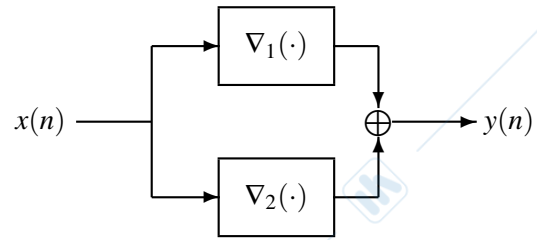


Fig. 1.8.

**Esercizio 1.45** Dato il segnale aleatorio  $x(t)$  SSL, a media nulla, con funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-|\tau|}$ , si consideri il segnale aleatorio  $y(t) = x(2t)$ .

- Determinare la caratterizzazione sintetica di  $y(t)$ , e stabilire se  $y(t)$  è a sua volta SSL.
- Calcolare la PSD di  $y(t)$  e rappresentarla graficamente.

*Risposta:* (a)  $\mu_y(t) = \mu_y = 0$ ,  $r_y(t, \tau) = r_y(\tau) = r_x(2\tau) = \sigma_x^2 e^{-2|\tau|}$ . è SSL; (b)  $S_y(f) = \frac{\sigma_x^2}{1 + \pi^2 f^2}$ .

**Esercizio 1.46** Si consideri il segnale aleatorio

$$y(t) = [A + x(t)] \cos(2\pi f_0 t + \Theta),$$

dove  $x(t)$  è un segnale aleatorio SSL, a media nulla e con funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{sinc}^2(\tau/T)$ , con  $T > 0$ ,  $f_0$  è una costante deterministica,  $A$  è una variabile aleatoria non negativa con media finita e valore quadratico medio finito  $E(A^2)$ ,  $\Theta \sim U(0, 2\pi)$  e infine,  $x(t)$ ,  $A$  e  $\Theta$  sono statisticamente indipendenti.

- Calcolare la caratterizzazione sintetica di  $y(t)$  e stabilire se è SSL.
- Calcolare la potenza di  $y(t)$ .
- Calcolare e rappresentare graficamente la PSD di  $y(t)$  (assumere nel grafico  $f_0 \gg \frac{1}{T}$ ).

*Risposta:* (a)  $\mu_y(t) = \mu_y = 0$ ,  $r_y(t, \tau) = r_y(\tau) = \frac{1}{2} [E(A^2) + \sigma_x^2 \text{sinc}^2(\frac{\tau}{T})] \cos(2\pi f_0 \tau)$ , è SSL; (b)  $\mathcal{P}_y = \frac{1}{2} [E(A^2) + \sigma_x^2]$ ; (c)  $S_y(f) = \frac{1}{4} E(A^2) [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{1}{4} \sigma_x^2 T \{ \Lambda[(f - f_0)T] + \Lambda[(f + f_0)T] \}$ .

**Esercizio 1.47** Con riferimento allo schema di Fig. 1.7,  $x(t)$  è un segnale aleatorio SSL a media nulla e autocorrelazione  $r_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-|\tau|/T}$ , con  $T > 0$ ,  $f_0$  è una costante deterministica,  $\Theta \sim U(0, \pi)$  è una variabile aleatoria statisticamente indipendente da  $x(t)$ , e la risposta armonica del sistema LTI è  $H(f) = -j \text{sgn}(f)$ .

- Determinare la funzione di autocorrelazione e la PSD di  $z(t)$ .
- Determinare la funzione di autocorrelazione e la PSD di  $y(t)$ .

*Risposta:* (a)  $r_z(\tau) = 2\sigma_x^2 e^{-|\tau|/T} \cos(2\pi f_0 \tau)$ ,  $S_z(f) = \sigma_x^2 T \left\{ \frac{1}{1 + [2\pi(f - f_0)T]^2} + \frac{1}{1 + [2\pi(f + f_0)T]^2} \right\}$ ; (b)  $r_y(\tau) = r_z(\tau)$ ,  $S_y(f) = S_z(f)$ .

**Esercizio 1.48** Con riferimento allo schema di Fig. 1.8, l'operatore  $\nabla_1(\cdot)$  effettua la differenza prima, e l'operatore  $\nabla_2(\cdot) = \nabla_1[\nabla_1(\cdot)]$  effettua la differenza seconda.

- Individuare la risposta impulsiva  $h(n)$  e la risposta armonica  $H(\nu)$  del sistema complessivo.
- Supponendo che  $x(n)$  sia un segnale aleatorio a campioni iid, con media nulla e varianza unitaria, determinare la PSD di  $y(n)$ .

*Risposta:* (a)  $h(n) = 2\delta(n) - 3\delta(n - 1) + \delta(n - 2)$ ,  $H(\nu) = 2 - 3e^{-j2\pi\nu} + e^{-j4\pi\nu}$ ; (b)  $S_y(\nu) = 14 - 18 \cos(2\pi\nu) + 4 \cos(4\pi\nu)$ .

**Esercizio 1.49** Il segnale aleatorio SSL  $x(n)$ , a media nulla e con funzione di autocorrelazione  $r_x(m) = \sigma_x^2 \delta(m)$ , è posto in ingresso al sistema LTI caratterizzato dalla risposta impulsiva  $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$ .

- (a) Calcolare la PSD dell'uscita  $y(n)$  del sistema LTI e rappresentarla graficamente.  
 (b) Calcolare la potenza di  $y(n)$ .

*Risposta:* (a)  $S_y(f) = 2\sigma_x^2[1 + \cos(2\pi v)]$ ; (b)  $\mathcal{P}_y = 2\sigma_x^2$ .

**Esercizio 1.50** Il segnale aleatorio  $x(n)$ , a media nulla e con campioni iid aventi varianza unitaria, viene filtrato da un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

dove  $u(n)$  è la funzione gradino unitario. Calcolare la PSD dell'uscita  $y(n)$  del filtro e rappresentarla graficamente nell'intervallo  $v \in (-1/2, 1/2)$ .

*Risposta:*  $S_y(f) = \frac{1}{\frac{5}{4} + \cos(2\pi v)}$ .

**Esercizio 1.51** Si consideri il segnale aleatorio SSL  $x(t)$ , a media nulla e con funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = \text{sinc}(\tau)$ , posto in ingresso al sistema LTI caratterizzato dalla risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{d}{dt} [u(t) + u(t-1)],$$

dove  $u(t)$  è la funzione gradino unitario.

- (a) Calcolare la risposta in frequenza  $H(f)$  del sistema LTI e rappresentarla graficamente.  
 (b) Calcolare la PSD del segnale  $x(t)$  e rappresentarla graficamente; calcolare inoltre la potenza di  $x(t)$ .  
 (c) Calcolare la PSD del segnale  $y(t)$  in uscita al sistema LTI e rappresentarla graficamente; calcolare inoltre la potenza di  $y(t)$ .

*Risposta:* (a)  $S_x(f) = \text{rect}(f)$ ,  $\mathcal{P}_x = 1$ ; (b)  $S_y(f) = 2\text{rect}(f)[1 + \cos(2\pi f)]$ ,  $\mathcal{P}_y = 2$ .

**Esercizio 1.52** Il segnale aleatorio  $x(n)$ , gaussiano a media nulla e con PSD  $S_x(v) = \sigma_x^2$ , viene filtrato mediante un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(n) = \frac{1}{2} [\delta(n) - \delta(n-1)]$$

generando il segnale di uscita  $y(n)$ .

- (a) Calcolare la PSD di  $y(n)$  e rappresentarla graficamente.  
 (b) Calcolare la funzione di autocorrelazione di  $y(n)$  e rappresentarla graficamente.  
 (c) Calcolare la pdf congiunta dei campioni  $y(n)$  e  $y(n-m)$  per tutti i possibili valori di  $n$  ed  $m$ , stabilendo in particolare per quali valori di  $n$  ed  $m$  i campioni risultano indipendenti.

*Risposta:* (a)  $S_y(v) = \frac{1}{2}\sigma_x^2[1 - \cos(2\pi v)]$ ; (b)  $r_y(m) = \frac{1}{2}\sigma_x^2[\delta(m) - \frac{1}{2}\delta(m-1) - \frac{1}{2}\delta(m+1)]$ ; (c)  $X = y(n)$  e  $Y = y(n-m)$  sono congiuntamente gaussiane, con  $\mu_X = \mu_Y = 0$ ,  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{2}\sigma_x^2$ ,  $\rho = \delta(m) - \frac{1}{2}\delta(m-1) - \frac{1}{2}\delta(m+1)$ ; sono incorrelate e quindi indipendenti per  $|m| > 1$  e  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Esercizio 1.53** Il segnale aleatorio SSL  $x(t)$ , a media nulla con funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = \mathcal{P}_x \text{sinc}(2W\tau)$ , con potenza  $\mathcal{P}_x > 0$  e  $W > 0$ , è posto in ingresso ad un derivatore ideale, con relazione i-u  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ .

- (a) Calcolare la PSD di  $x(t)$ .  
 (b) Calcolare la PSD di  $y(t)$ .

## 1.4 Densità spettrale di potenza

13

(c) Calcolare la potenza  $\mathcal{P}_y$  di  $y(t)$  in funzione della potenza  $\mathcal{P}_x$ .

Risposta: (a)  $\mathcal{S}_x(f) = \mathcal{P}_x \frac{1}{2W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$ ; (b)  $\mathcal{S}_y(f) = \mathcal{P}_x \frac{2\pi^2 f^2}{W} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$ ; (c)  $\mathcal{P}_y = \frac{4}{3} \pi^2 W^2 \mathcal{P}_x$ .

**Esercizio 1.54** Il segnale aleatorio SSL  $x(n)$ , con media nulla e funzione di autocorrelazione  $r_x(m) = \delta(m) + \frac{1}{2} \delta(|m| - 1)$ , viene filtrato da un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$$

(a) Determinare la densità spettrale di potenza (PSD) del segnale  $x(n)$  e rappresentarla graficamente nell'intervallo  $\nu \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

(b) Determinare la densità spettrale di potenza (PSD) del segnale  $y(n)$  in uscita al filtro LTI e rappresentarla graficamente nell'intervallo  $\nu \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Risposta: (a)  $\mathcal{S}_x(\nu) = 1 + \cos(2\pi\nu)$ ; (b)  $\mathcal{S}_y(\nu) = 2[1 - \cos(2\pi\nu)][1 + \cos(2\pi\nu)]$ .

**Esercizio 1.55** Siano  $x(n)$  ed  $y(n)$  due segnali aleatori SSL, statisticamente indipendenti tra loro, con medie nulle e funzioni di autocorrelazione  $r_x(m)$  ed  $r_y(m)$ , rispettivamente. Si consideri il segnale aleatorio  $z(n) = x(n) + y(n)x(n - 1)$ .

(a) Determinare la caratterizzazione sintetica di  $z(n)$  e stabilire se esso è SSL.

(b) Determinare l'espressione della PSD di  $z(n)$  in funzione delle PSD di  $x(n)$  e di  $y(n)$ .

Risposta: (a)  $\mu_z(t) = \mu_z = 0$ ,  $r_z(n, m) = r_z(m) = r_x(m) + r_y(m)r_x(m)$ , è SSL; (b)  $\mathcal{S}_z(\nu) = \mathcal{S}_x(\nu) + \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{S}_y(\lambda) \mathcal{S}_x(\nu - \lambda) d\lambda$ .

**Esercizio 1.56** Il segnale aleatorio SSL  $x(t)$ , a media nulla e con funzione di autocorrelazione  $r_x(\tau) = e^{-|\tau|}$ , è posto in ingresso ad un filtro ideale passabasso avente guadagno unitario e banda monolatera  $W > 0$ .

(a) Determinare la PSD di  $x(t)$  e rappresentarla graficamente.

(b) Determinare la PSD dell'uscita  $y(t)$  del filtro e rappresentarla graficamente.

(c) Determinare la potenza di  $x(t)$  e la potenza di  $y(t)$ .

(d) Determinare il valore di  $W$  in corrispondenza del quale la potenza di  $y(t)$  è la metà di quella di  $x(t)$ .

Risposta: (a)  $\mathcal{S}_x(f) = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$ ; (b)  $\mathcal{S}_y(f) = \frac{2}{1+(2\pi f)^2} \text{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$ ; (c)  $\mathcal{P}_x = 1$ ,  $\mathcal{P}_y = \frac{2}{\pi} \arctan(2\pi W)$ ; (d)  $W = \frac{1}{2\pi}$ .

**Esercizio 1.57** Calcolare la banda equivalente di rumore monolatera di un filtro RC avente risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

Risposta:  $W_{eq} = \frac{1}{4RC}$ .