Esercitazione 4

Teoria della Finanza

Da consegnare per email a arm.martino@gmail.com entro le 23:59 del 12 dicembre 2024
L'esercitazione verrà corretta in classe nella lezione del 13 dicembre 2024

Esercizio 1) Considera il modello del CCAPM con due periodi, in cui un individuo rappresentativo ha la seguente funzione di utilità attesa:

$$E[U] = \sqrt{c_0} + \beta E[\sqrt{\tilde{c}_1}],$$

dove $\beta = 1$, ed i seguenti vincoli di bilancio:

$$c_0 = w_0 - [(n_0 - n_{-1})p_r + (b_0 - b_{-1})],$$

$$\tilde{c_1} = \tilde{w_1} + n_0\tilde{v}_r + b_0(1 + r_f),$$

dove w_0 è il reddito noto da lavoro dell'individuo nel periodo 0 e $\tilde{w_1}$ è il suo reddito da lavoro nel periodo 1; b_{-1} e n_{-1} sono le dotazioni iniziali del titolo sicuro (debito) e di quello rischioso (azioni) dell'individuo, n_0 la quantità del titolo rischioso che egli decide di detenere nel periodo 0 e b_0 è l'ammontare che egli investe nel titolo privo di rischio nel periodo 0. Infine, $\tilde{v}_r$ è il valore finale del titolo rischioso.

i) Scrivi le condizioni di primo ordine del problema ed utilizzale per ottenere delle espressioni per il tasso d'interesse e per il prezzo del titolo rischioso.

ii) Supponi che la quantità offerta di azioni sia pari a 1 e che la quantità di debito offerta sia invece pari a 0. Determina quindi il tasso d'interesse ed il prezzo d'equilibrio.

iii) Assumi che esistano solo due possibili stati di natura, A e B, equiprobabili ($\pi_A = \pi_B = 0.5$) e che anche il reddito da lavoro dell'individuo nel periodo 1 sia aleatorio. Sapendo che $w_0 = 40$ e che la distribuzione di $\tilde{w}_1$ e di $\tilde{v}_r$ è la seguente:

Stato	$\tilde{w}_1$	$\tilde{v}_r$
A	30	40
B	10	20

determina il prezzo d'equilibrio del titolo rischioso.

iv) Calcola il rendimento atteso di equilibrio $E(\tilde{r}^*)$ del titolo rischioso.

v) Immagina ora che il valore finale del titolo rischioso sia 20 nello stato A e 40 nello stato B e che quindi la distribuzione di $\tilde{w}_1$ e di $\tilde{v}_r$ sia:

Stato	$\tilde{w}_1$	$\tilde{v}_r$
A	30	20
B	10	40

Come cambia il prezzo d'equilibrio del titolo? Intuitivamente, perchè?

Esercizio 2) Si consideri un'economia con N titoli, e due stati di natura equiprobabili, A e B. Il consumo (ottimo) di un agente rappresentativo al tempo 0 è $c_0 = 100$, mentre i pagamenti di due titoli rischiosi, titolo 1 e titolo 2 e il consumo ottimo futuro dell'agente, nei due stati di natura, sono riassunti nella seguente tabella:

Stato	Pagamento titolo 1	Pagamento titolo 2	Consumo c_1
A	10	20	100
B	20	10	150

i) Si assuma che l'agente abbia una funzione di utilità logaritmica e che egli sia indifferente tra consumare oggi o domani, a parità di livello di consumo (cioè $\beta = 1$). Utilizzando l'equazione fondamentale di valutazione dei titoli determina il prezzo di equilibrio dei due titoli. Spiega intuitivamente perchè i titoli hanno prezzi diversi.

ii) Determina il tasso di interesse di equilibrio.

iii) Determina le probabilità corrette per il rischio.

iv) Decomponi il prezzo di equilibrio dei due titoli nelle sue due componenti, cioè valore scontato dei pagamenti attesi futuri, *valutazione intertemporale*, e aggiustamento per il rischio, *valutazione del rischio*. A cosa è dovuta questa differenza? Quale sarebbe il prezzo di equilibrio dei due titoli qualora l'agente fosse indifferente al rischio?

Esercizio 3) Commenta le implicazioni dei seguenti casi dal punto di vista dell'efficienza informativa dei mercati finanziari. Più precisamente, per ognuno dei casi sotto descritti viene violata qualche forma di efficienza informativa? Se sì, quale?

- **Caso 1:** un'azienda che opera in ambito farmaceutico sta per ricevere l'approvazione da parte delle autorità competenti per poter lanciare sul mercato un nuovo farmaco. Tuttavia, il CEO dell'azienda, sapendo che il prodotto non verrà approvato, decide di vendere le sue azioni prima che le autorità competenti esprimano un giudizio.

- **Caso 2:** alcuni trader effettuano operazioni sui mercati sfruttando il cosiddetto "*effetto momentum*", cioè la tendenza dei prezzi delle azioni di continuare a seguire lo stesso andamento storico, cioè continuare a seguire eventuali rialzi o ribassi.

- **Caso 3:** un'azienda nella propria relazione trimestrale sugli utili mostra una forte e solida crescita futura ben al di sopra delle aspettative di mercato. Tuttavia, il prezzo dell'azione non subisce un forte rialzo.

Esercizio 4) Utilizzando le serie storiche economico-finanziarie di vari paesi europei nel periodo 2015-18, si ottengono i seguenti valori medi per le variabili rilevanti ai fini del premio per il rischio azionario:

Paese	Tasso di interesse privo di rischio	Rendimento medio del mercato azionario	Volatilità del tasso di crescita del consumo	Tasso di crescita medio del consumo
Austria	1.2%	7.89%	3.6%	1.2%
Francia	1.5%	6.45%	5.5%	2%
Germania	0.5%	5.12%	6.78%	3.33%
Italia	2%	3%	2.9%	1.5%
Svizzera	1.5%	4.44%	2.6%	1.7%

Per quali paesi le evidenze empiriche sono coerenti con il CCAPM e per quali invece si pone l'enigma del premio per il rischio azionario? Spiega perché.

Esercizio 5) Secondo il CCAPM multi-periodale, in equilibrio il prezzo deve soddisfare l'equazione fondamentale di valutazione dei titoli:

$$p_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1}(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{p}_{t+1})\right], \forall t \tag{1}$$

Supponi che il prezzo contenga anche una bolla b_t, cioè il prezzo sia pari a:

$$p_t = v_t + b_t, \tag{2}$$

dove v_t è il valore fondamentale del titolo e b_t è una bolla speculativa, definita come segue:

$$b_t = E_t\left(\tilde{m}_{t+1}\tilde{b}_{t+1}\right). \tag{3}$$

Infine supponi che gli investitori abbiano una funzione di utilità logaritmica, cioè $U_t = E_t[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(\tilde{c}_{t+s})]$.

i) Calcola il valore atteso della bolla al tempo $t+1$. Qual è, in questo caso, il tasso di crescita della bolla?

ii) La bolla caratterizzata dall'equazione (3) è una "bolla razionale"?

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESERCIZIO 1

$$E[U] = \sqrt{c_0} + \beta E[\sqrt{\tilde{c}_1}] \qquad \text{con } \beta = 1$$

Vincoli di bilancio:

$$c_0 = w_0 - [(m_0 - m_{-1})p_2 + (b_0 - b_{-1})]$$
$$\tilde{c}_1 = \tilde{w}_1 + m_0 \tilde{v}_2 + b_0 (1 + r_f)$$

i) Scrivere le CPO ed utilizzarle per ottenere delle espressioni per il tasso d'interesse e per il prezzo del titolo rischioso.

$$\max_{\{m_0, b_0\}} U = \sqrt{c_0} + \beta E[\sqrt{\tilde{c}_1}] \qquad \beta = 1$$

$$\max_{\{m_0, b_0\}} U = \sqrt{w_0 - [(m_0 - m_{-1})p_2 + (b_0 - b_{-1})]} + \beta E[\sqrt{\tilde{w}_1 + m_0 \tilde{v}_2 + b_0 (1 + r_f)}]$$

CPO $\{m_0\}$: $\dfrac{1}{2\sqrt{c_0}}(-p_2) + \beta E\left(\dfrac{1}{2\sqrt{c_1}} \cdot \tilde{v}_2\right) = 0$

$$\frac{1}{2\sqrt{c_0}} p_2 = \beta E\left(\frac{1}{2\sqrt{c_1}} \tilde{v}_2\right) \rightarrow p_2 = \beta E\left(\frac{\cancel{2}\sqrt{c_0}}{\cancel{2}\sqrt{c_1}} \tilde{v}_2\right)$$

$$p_2 = \beta E\left(\frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \tilde{v}_2\right)$$ PREZZO DEL TITOLO RISCHIOSO

CPO $\{b_0\}$: $-\dfrac{1}{2\sqrt{c_0}} + \beta E\left[\dfrac{1}{2\sqrt{c_1}}(1 + r_f)\right] = 0$

$$1 + r_f = E\left(\frac{\sqrt{\tilde{c}_1}}{\beta\sqrt{c_0}}\right)$$ TASSO DI INTERESSE

ii) $m_0 = m_{-1} = 1 \quad b_0 = b_{-1} = 0 \quad r_f^* = ? \quad p_0^* = ?$

$$E[U] = \sqrt{c_0} + \beta E[\sqrt{\tilde{c}_1}] \qquad \text{con } \beta = 1$$

sub:

$$\begin{cases} c_0 = w_0 - [(m_0 - m_{-1})p_2 + (b_0 - b_{-1})] \rightarrow w_0 \\ \tilde{c}_1 = \tilde{w}_1 + m_0 \tilde{v}_2 + b_0 (1 + r_f) \rightarrow \tilde{w}_1 + \tilde{v}_2 \end{cases}$$

$$p_2^* = \beta E\left[\frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{\tilde{w}_1+\tilde{v}_2}}\tilde{v}_2\right]$$ PREZZO DI EQUILIBRIO DELLE AZIONI

$$1+r_f^* = E\left[\frac{\sqrt{\tilde{w}_1+\tilde{v}_2}}{\beta\sqrt{w_0}}\right]$$ TASSO DI INTERESSE DI EQUILIBRIO

iii)

STATO	$\tilde{w}_1$	$\tilde{v}_2$	π
A	30	40	0,5
B	10	20	0,5

$w_0 = 40$ $p_2^* = ?$

$$p_2^* = E\left(\frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{\tilde{w}_1+\tilde{v}_2}}\cdot\tilde{v}_2\right) \to 0{,}5\,E\left[\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{70}}\cdot 40\right] + 0{,}5\,E\left[\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{30}}\cdot 20\right] =$$

$= 26{,}665 \to p_2^* = 26{,}665$ PREZZO DI EQUILIBRIO DEL TITOLO RISCHIOSO

iv) $E(\tilde{r}^*) = ?$

$$E(\tilde{r}^*) = r_f^* - \frac{cov(u'(\tilde{c}_1^*),\tilde{r}^*)}{E[u'(\tilde{c}_1^*)]}$$

$$E[u'(\tilde{c}_1^*)] = 0{,}5\left(\frac{1}{2\sqrt{70}}+\frac{1}{2\sqrt{30}}\right) = 0{,}5\cdot 0{,}151 = 0{,}0755$$

$$E[\tilde{r}^*] = 0{,}5\left(\frac{\tilde{r}_A - p_2}{p_2}+\frac{\tilde{r}_B - p_2}{p_2}\right) = 0{,}5\,(0{,}5-0{,}25) = 0{,}125$$

$$E\left[u'(\tilde{c}_1^*)\tilde{r}^*\right] = 0{,}5\,[(0{,}0597\cdot 0{,}5)-(0{,}0913\cdot 0{,}25)] = 0{,}00351$$

$$cov(u'(\tilde{c}_1^*),\tilde{r}^*) = E[u'(\tilde{c}_1^*)\tilde{r}^*] - E[u'(\tilde{c}_1^*)]\cdot E[\tilde{r}^*] =$$
$$= 0{,}00351 - (0{,}0755\cdot 0{,}125 = -0{,}0059275$$

$$1+r_f^* = E\left[\frac{\sqrt{\tilde{w}_1+\tilde{v}_2}}{\sqrt{w_0}}\right] \to 1+r_f^* = 0{,}5\,E\left[\frac{\sqrt{70}}{\sqrt{40}}\right] + 0{,}5\,E\left[\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{40}}\right]$$

$$r_f^* = 0{,}661 + 0{,}433 - 1 = 0{,}094 \rightarrow r_f^* = 9{,}4\%$$

$$E(\tilde{r}^*) = r_f^* - \frac{cov\left(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{r}^*\right)}{E[u'(\tilde{c}_1^*)]} = 0{,}094 - \left(-\frac{0{,}0053275}{0{,}0755}\right)$$

$$E(\tilde{r}^*) = 0{,}1725 = 17{,}25\%$$

RENDIMENTO ATTESO DI EQUILIBRIO DEL TITOLO RISCHIOSO

v)

STATO	$\tilde{w}_1$	$\tilde{v}_2$	π
A	30	20	0,5
B	10	40	0,5

$$p_2^* = E\left[\frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{\tilde{w}_1 + \tilde{v}_2}} \cdot \tilde{v}_2\right] = 0{,}5\,E\left[\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{50}} \cdot 20\right] + 0{,}5\,E\left[\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{50}} \cdot 40\right]$$

$$p_2^* = 8{,}944 + 17{,}888 = 26{,}832$$

PREZZO DI EQUILIBRIO DEL TITOLO

Tenendo conto dei nuovi stati A e B, si può notare come il valore finale "$\tilde{v}_2$" nello stato B sia pari a 40. Tale valore, che corrisponde al pagamento, è significativamente maggiore rispetto al corrispondente valore finale al punto iii (20), mentre il reddito da lavoro "$\tilde{w}_1$" è rimasto il medesimo (10).
Dunque, si può affermare che un titolo che garantisce un rendimento maggiore in scenari economici sfavorevoli è considerato più prezioso. Infine, dato questo carattere assicurativo contro i rischi di basso consumo, presenterà un prezzo che sarà tanto maggiore sarà il suo valore in termini di riduzione di rischio.

ESERCIZIO 2

$c_0 = 100$

STATO	PAGAMENTO TITOLO 1	PAGAMENTO TITOLO 2	CONSUMO c_1
A	10	20	100
B	20	10	150

i) Funzione di utilità logaritmica, con $\beta = 1$ e $\pi_s = 0,5$.
Determinare il prezzo di equilibrio dei 2 titoli

$$E[U] = \log(c_0) + \beta \log(\tilde{c}_1) \qquad \beta = 1$$

$$p_2^* = \sum_{s=1}^{S} \pi_s \left[\frac{\beta u'(\tilde{c}_{1s}^*)}{u'(c_0^*)} \cdot v_s \right]$$

$$p_{0,1}^* = 0,5 \left[\left(\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} \cdot 10 \right) + \left(\frac{\frac{1}{150}}{\frac{1}{100}} \cdot 20 \right) \right] = 11,667$$

PREZZO DI EQUILIBRIO TITOLO 1

$$p_{0,2}^* = 0,5 \left[\left(\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}} \cdot 20 \right) + \left(\frac{\frac{1}{150}}{\frac{1}{100}} \cdot 10 \right) \right] = 13,333$$

PREZZO DI EQUILIBRIO TITOLO 2

I 2 titoli hanno prezzo differente ($p_2^* > p_1^*$) perché il titolo 2 garantisce maggiore liquidità in condizioni sfavorevoli e dunque il prezzo sarà tanto maggiore quanto minore sarà il rischio connesso.

ii) Determinare il tasso di interesse di equilibrio

$$1 + r_f^* = \frac{u'(c_0^*)}{\beta E[u'(\tilde{c}_1^*)]} = \frac{\frac{1}{c_0^*}}{E[u'(\tilde{c}_1^*)]} = \frac{1}{c_0^* \cdot E\left[\frac{1}{\tilde{c}_1^*}\right]} =$$

$$= \frac{1}{100 \cdot E\left[\left(0,5 \cdot \frac{1}{100}\right) + \left(0,5 \cdot \frac{1}{150}\right)\right]} = 1,20$$

$$r_f^* = 1,20 - 1 = 0,20 \rightarrow r_f^* = 20\%$$

TASSO DI INTERESSE DI EQUILIBRIO

iii) Determinare le probabilità corrette per il rischio

$$\pi_s^* = \pi_s \, m_s \, (1+r_f^*) \qquad m_s = \frac{\beta u'(c_{1s}^*)}{u'(c_0^*)}$$

$$\pi_A^* = 0{,}5 \cdot \left(\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100}}\right)(1{,}2) = 0{,}6$$

$$\pi_B^* = 0{,}5 \left(\frac{\frac{1}{150}}{\frac{1}{100}}\right)(1{,}2) = 0{,}4$$

iv) Decomporre il prezzo di equilibrio dei 2 titoli nelle sue 2 componenti

$$P_0^* = \frac{E(\tilde{v})}{1+r_f^*} + \frac{\operatorname{cov}(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{v})}{(1+r_f^*)\, E[u'(\tilde{c}_1^*)]}$$

TITOLO 1:

$$E[\tilde{v}] = 0{,}5\,(10+20) = 15$$

$$E[u'(\tilde{c}_1^*)] = 0{,}5\left[\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right] = 0{,}00833$$

$$E[u'(\tilde{c}_1^*)\,\tilde{v}] = 0{,}5\left[\left(\frac{1}{100}\cdot 10\right) + \left(\frac{1}{150}\cdot 20\right)\right] = 0{,}1167$$

$$\operatorname{cov}(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{v}) = E[u'(\tilde{c}_1^*)\,\tilde{v}] - E[u'(\tilde{c}_1^*)]\,E[\tilde{v}] =$$
$$= 0{,}1167 - (0{,}00833 \cdot 15) = -0{,}00825$$

$$P_{0,1}^* = \frac{E(\tilde{v})}{1+r_f^*} + \frac{\operatorname{cov}(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{v})}{(1+r_f^*)\, E[u'(\tilde{c}_1^*)]} = \frac{15}{1+0{,}2} + \frac{-0{,}00825}{(1+0{,}2)(0{,}00833)} =$$
$$= 12{,}5 - 0{,}82533 \rightarrow P_{0,1}^* = 11{,}67$$ PREZZO DI EQUILIBRIO TITOLO 1

TITOLO 2:

$$E[\tilde{v}] = 0{,}5\,(20+10) = 15$$

$$E[u'(\tilde{c}_1^*)] = 0{,}5\left[\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right] = 0{,}00833$$

$$E[u'(\tilde{c}_1^*)\,\tilde{v}] = 0{,}5\left[\left(\frac{1}{100}\cdot 20\right) + \left(\frac{1}{150}\cdot 10\right)\right] = 0{,}1333$$

$$\mathrm{cov}\left(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{v}\right) = E\left[u'(\tilde{c}_1^*)\tilde{v}\right] - E\left[u'(\tilde{c}_1^*)\right] E[\tilde{v}] =$$

$$= 0{,}1333 - (0{,}00833 \cdot 15) = 0{,}00835$$

$$P_{0,2}^* = \frac{E(\tilde{v})}{1+r_f^*} + \frac{\mathrm{cov}\left(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{v}\right)}{(1+r_f^*)\, E\left[u'(\tilde{c}_1^*)\right]} = \frac{15}{1+0{,}2} + \frac{0{,}00835}{(1+0{,}2)(0{,}00833)} =$$

$$= 12{,}5 + 0{,}8353 \rightarrow P_{0,2}^* = 13{,}33$$

Agente indifferente al rischio:

$$P_0^* = \frac{E(\tilde{v}_2)}{1+r_f} = \frac{\left[(0{,}5 \cdot 10) + (0{,}5 \cdot 20)\right]}{1+0{,}2} = 12{,}5$$

PREZZO DI EQUILIBRIO DEI 2 TITOLI SE L'AGENTE È INDIFFERENTE AL RISCHIO

ESERCIZIO 3 COMMENTARE I DIVERSI CASI

Esistono 3 forme di efficienza informativa:

- EFFICIENZA DEBOLE → i prezzi delle azioni riflettono tutte le informazioni derivanti dai prezzi stessi e dai rendimenti passati.
- EFFICIENZA SEMI-FORTE → i prezzi riflettono tutte le informazioni disponibili pubblicamente.
- EFFICIENZA FORTE → i prezzi riflettono tutte le informazioni disponibili, sia pubbliche che private.

1) CASO 1 → Questo caso viola l'efficienza informativa in forma forte. In un mercato efficiente in forma forte, tutti i tipi di informazione sono già riflessi nei prezzi delle azioni.

2) CASO 2 → In questo caso viene violata l'efficienza debole, poiché l'effetto momentum indica una prevedibilità dei prezzi basata su informazioni passate.

3) CASO 3 → In questo caso si verifica la violazione dell'efficienza semi-forte, poiché i prezzi non riflettono immediatamente le informazioni pubbliche.

ESERCIZIO 4

$$E_{Rm} - r_f \simeq \gamma\,(\sigma_c)^2$$ → PREMIO PER IL RISCHIO

dove "γ" indica l'avversione al rischio dell'investitore ed è pari a:

$$\gamma = \frac{E_{Rm} - r_f}{(\sigma_c)^2}$$

Per il CCAPM, come mostrato dalla formula precedente, il premio per il rischio del mercato azionario dipende dal rischio e dalla crescita del consumo.

Nel CCAPM bisogna considerare le evidenze empiriche osservando i valori di "γ" che, per essere plausibili, devono essere compresi tra 0 e 10 o non significativamente superiori.
Se $0 \leq \gamma \leq 10$ allora il premio per il rischio è plausibile con il livello di avversione al rischio.
Se, invece, $\gamma > 10$ o addirittura $\gamma > 30$, allora significa che il premio per il rischio è relativamente basso rispetto al livello di avversione e dunque si entra nel raggio dell'Equity Premium Puzzle, che è un fenomeno finanziario che si manifesta quando "γ" è estremamente superiore e la stima del premio è incompatibile col CCAPM.

$$E_{Rm} - r_f = \lambda$$

AUSTRIA → $\lambda = 7{,}89\% - 1{,}2\% = 6{,}69\%$ | $\gamma = \frac{0{,}0669}{(0{,}036)^2} = 51{,}63$

FRANCIA → $\lambda = 6{,}45\% - 1{,}5\% = 4{,}95\%$ | $\gamma = \frac{0{,}0495}{(0{,}055)^2} = 16{,}36$

GERMANIA → $\lambda = 5{,}12\% - 0{,}5\% = 4{,}62\%$ | $\gamma = \frac{0{,}0462}{(0{,}0678)^2} = 10{,}05$

ITALIA → $\lambda = 3\% - 2\% = 1\%$ | $\gamma = \frac{0{,}01}{(0{,}029)^2} = 11{,}89$

SVIZZERA → $\lambda = 4,44\% - 1,5\% = 2,94\%$ | $\gamma = \frac{0,0294}{(0,026)^2} = 43,49$

I valori di avversione al rischio "γ" per Francia, Germania e Italia sono pressoché plausibili in quanto sono superiori a 10 ma non significativamente e dunque sono coerenti con il CCAPM.
Al contrario i valori di avversione al rischio "γ" per Austria e Svizzera sono addirittura maggiori di 30 e dunque non plausibili e non coerenti con il CCAPM.

ESERCIZIO 5 $\quad p_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1}\left(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{p}_{t+1}\right)\right], \quad \forall t$

Suppone che il prezzo contenga una bolla "b_t":

$$p_t = v_t + b_t, \text{ con } b_t = E_t\left(\tilde{m}_{t+1} b_{t+1}\right)$$

Funzione di utilità logaritmica → $U_t = E_t\left[\sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u\left(\tilde{c}_{t+s}\right)\right]$

i) Calcolare il valore atteso della bolla al tempo $t+1$.

Dato che la funzione di utilità è logaritmica, l'individuo è avverso al rischio.

$$b_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1} \tilde{b}_{t+1}\right] = E_t\left[\tilde{m}_{t+1}\right] E_t\left[\tilde{b}_{t+1}\right] + cov_t\left(\tilde{m}_{t+1}, \tilde{b}_{t+1}\right)$$

$$E_t\left(\tilde{b}_{t+1}\right) = \frac{b_t - cov_t\left(\tilde{b}_{t+1}, m_{t+1}\right)}{E_t\left(\tilde{m}_{t+1}\right)}, \text{ con } E_t = \left(\tilde{m}_{t+1}\right) = \beta = \frac{1}{1+r_f}$$

QUINDI → $E_t\left(\tilde{b}_{t+1}\right) = (1+r_f)\left[b_t - cov_t\left(\tilde{b}_{t+1}, \tilde{m}_{t+1}\right)\right]$

La bolla "b_t" cresce al tasso di interesse più un aggiustamento per il rischio da covarianza tra la bolla e il consumo aggregato.
Dunque, la bolla cresce a un tasso superiore al tasso di interesse e quindi a un tasso superiore a quello che si avrebbe in condizioni di indifferenza al rischio, cioè quando $cov_t\left(\tilde{b}_{t+1}, \tilde{m}_{t+1}\right) = 0$ perché $\tilde{m}_{t+1} = \beta$, cioè è costante.

iii) Dimostrare se la bolla $b_t = E_t(\tilde{m}_{t+1} b_{t+1})$ è razionale.

Partendo dalla condizione per cui $p_t = v_t + b_t$

$$v_t = E_t\left(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{m}_{t+1}, \tilde{d}_{t+1}\right)$$

$$v_t = E_t\left(\beta \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \tilde{d}_{t+1} + \beta^2 \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \tilde{d}_{t+2} + \beta^3 \frac{u'(\tilde{c}_{t+3})}{u'(c_t)} d_{t+3} + \dots\right)$$

$$v_t = E_t\left[\beta \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \tilde{d}_{t+1} + \beta \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)} \underbrace{\left(\beta \frac{u'(\tilde{c}_{t+2})}{u'(\tilde{c}_{t+1})} \tilde{d}_{t+2} + \beta^2 \frac{u'(\tilde{c}_{t+3})}{u'(\tilde{c}_{t+1})} \tilde{d}_{t+3} + \dots\right)}_{E_t[\tilde{v}_{t+1}]}\right]$$

$$v_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1}(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{v}_{t+1})\right]$$

Siccome $b_t = E_t(\tilde{m}_{t+1}\tilde{b}_{t+1})$, sostituiamo tutto in p_t:

$$p_t = v_t + b_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1}(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{v}_{t+1})\right] + E_t(\tilde{m}_{t+1}\tilde{b}_{t+1})$$

$$p_t = E\left[(\tilde{m}_{t+1}\tilde{d}_{t+1}) + \underbrace{\tilde{m}_{t+1}(\tilde{v}_{t+1} + \tilde{b}_{t+1})}_{\tilde{p}_{t+1}}\right]$$

$$p_t = E\left[\tilde{m}_{t+1}(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{p}_{t+1})\right]$$

La condizione di ottimo degli investitori non è stata violata. Dunque, si può affermare che si è in presenza di una "bolla razionale" e quindi il prezzo di mercato può deviare dal suo valore fondamentale senza violare la condizione di ottimo degli investitori, purché il valore della bolla cresca indefinitamente nel tempo.