FORMULARIO – TDF

FORMULE DI BASE

MEDIA (valore atteso) → $E[x] = \frac{\sum x_i}{N}$

VARIANZA → $Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$

DEV. STANDARD → $\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$ oppure $\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum(E[x] - x_i)^2}{N}}$

COVARIANZA → $cov[x,y] = E[xy] - (E[x] \cdot E[y])$

CORRELAZIONE → $\rho_{x,y} = \frac{cov[x,y]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

Funzione di utilità logaritmica → INDIVIDUO AVVERSO AL RISCHIO

CAPITOLO 1

AUTARCHIA

Vincoli: $\begin{cases} c_0 = w_0 - k \\ c_1 = w_1 + f(k) \end{cases}$

$k = s_0$

$\beta = 1/(1+\delta)$

$c_1 \rightarrow$ intercetta

$\sigma_{c_1}/\sigma_{c_0} \rightarrow$ pendenza

$k^* = ? \rightarrow \max_{k} \rightarrow \underset{\{k\}}{CPO}$

$$SMS = \frac{\partial U/\partial c_0^*}{\partial U/\partial c_1^*} = f'(k^*) = SMT$$

ECONOMIA CONCORRENZIALE SENZA INVESTIMENTO

(SCELTA INTERTEMPORALE IN CONDIZIONI DI CERTEZZA)

Vincoli: $\begin{cases} c_0^i = w_0^i - s_0^i \\ c_1^i = w_1^i + (1+r)\, s_0^i \end{cases}$

$s_0^* = ? \rightarrow \max_{s_0} \rightarrow \underset{\{s_0\}}{CPO}$

$\rightarrow$ individui possono prendere e dare a prestito al tasso "r"

ECONOMIA CONCORRENZIALE CON PRODUZIONE

Vincoli: $\begin{cases} c_0^i = w_0^i - s_0^i \\ c_1^i = w_1^i + (1+r)\, s_0^i + \pi(k) \end{cases}$

π = profitti impresa

k = investimento

$s_0^* = ? \rightarrow \max_{s_0} \rightarrow \underset{\{s_0\}}{CPO}$

Condizione di ottimo che risolve il problema dell'impresa $\rightarrow \max_{k}\ \pi(k) = f(k) - (1+r)k$

$\downarrow$

$\underset{\{k\}}{CPO}$

Offerta aggregata di risparmio $\rightarrow S_0^i = S_1(N_1) + S_2(N_2)$

Domanda di investimento aggregata $\rightarrow NK^* = (N_1 \cdot k_1) + (N_2 \cdot k_2)$

Equilibrio del mercato $\rightarrow S_0^i = NK^* \begin{cases} (1+r)^* \\ S_0^* \end{cases}$

Vincolo di razionamento del credito $\rightarrow c_0^* = w_0 - s_0^*$

$\Phi\Big(w_0 + \underbrace{\frac{w_1}{1+r}}_{w_1 \text{ attualizzato}}\Big) = \Phi\, c_0$

Se $\Phi\, c_0 < \Phi\, c_0^* \rightarrow$ RAZIONAMENTO DEL CREDITO

CAPITOLO 3 - DETERMINAZIONE PREZZO TITOLI IN CONDIZIONI DI CERTEZZA

MODELLO CON 2 PERIODI

Vincoli
$$\begin{cases} c_0 = w_0 - [p_0(m_0 - m_{-1}) + (b_0 - b_{-1})] \\ c_1 = w_1 + [d_1 m_0 + (1+r) b_0] \end{cases}$$

$m_{-1} \to$ dotazione di azioni
$b_{-1} \to$ dotazione di debito
$d_1 \to$ dividendo
$p_0 \to$ prezzo azioni

$$\left.\begin{matrix} m_{-1} = 1 \\ b_{-1} = 0 \end{matrix}\right] \to \text{Vincoli} \begin{cases} c_0 = w_0 - [p_0(m_0 - 1) + b_0] \\ c_1 = w_1 + [d_1 m_0 + (1+r) b_0] \end{cases}$$

Ipotesi $\to$ $d_1 = \pi$

$r^* = ? \to \max_{b_0} \to \text{CPO}_{\{b_0\}}$

$p_0^* = ? \to \max_{m_0} \to \text{CPO}_{\{m_0\}}$

$$p_0 = \frac{\pi}{1+r}$$ $\to$ EQUAZIONE FONDAMENTALE DI VALUTAZIONE DEI TITOLI

In equilibrio $\to$ $m_0 = 1$, $b_0 = 0$ $\to$ $c_0^* = w_0$, $c_1^* = w_1 + \pi$

$$1 + r^* = \frac{u'(w_0)}{\beta u'(w_1 + \pi)} \qquad p_0^* = \frac{\beta u'(w_1+\pi)}{u'(w_0)} \cdot \pi$$

MODELLO CON ORIZZONTE MULTIPERIODALE (Modello degli Alberi di Lucas)

- MODELLO CON 3 PERIODI

$$U_0 = u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2)$$

sub:
$$c_0 = w_0 + d_0 m_{-1} + r_0 b_{-1} - \underbrace{[p_0(m_0 - m_{-1}) + (b_0 - b_{-1})]}_{S_0}$$

$$c_1 = w_1 + d_1 m_0 + r_1 b_0 - [p_1(m_1 - m_0) + (b_1 - b_0)]$$
$$c_2 = w_2 + d_2 m_1 + r_2 b_1 - [p_2(m_2 - m_1) + (b_2 - b_1)]$$
$\to$ Si spostano in avanti gli indici temporali

Siccome il periodo finisce in $t=2$, allora $p_2 = m_2 = b_2 = 0$

- MODELLO CON QUALSIASI NUMERO FINITO DI PERIODI

$$c_t = w_t + d_t m_{t-1} + r_t b_{t-1} - \underbrace{[p_t(m_t - m_{t-1}) + (b_t - b_{t-1})]}_{S_t}$$

$m_{t-1} = 1 \qquad b_{t-1} = 0$

Orizzonte temporale finito $\rightarrow c_t = d_t$

$\searrow$ Prezzi e dividendi COSTANTI $\left\langle \begin{array}{l} p_t = p_{t+1} \\ d_t = d_{t+1} \end{array} \right.$

- MODELLO CON UN ORIZZONTE INFINITO

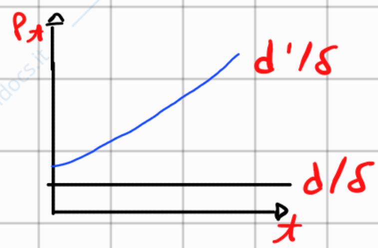
Stessa cosa di prima $\rightarrow c_t$

PREZZI DI EQUILIBRIO ED EFFETTI DI ANNUNCIO

- ANNUNCIO NON ALTERA IL SENTIERO DEL CONSUMO AGGREGATO DI EQUILIBRIO

$c_t = c_{t+1}$ $\qquad \beta = \frac{1}{1+\delta}$

$$p_t^* = \frac{\beta u'(c_{t+1}^*)}{u'(c_t^*)} (d_{t+1} + p_{t+1}^*)$$



$d/\delta \rightarrow$ peso del prezzo pre-annuncio

$d'/\delta \rightarrow$ peso del prezzo finale

- ANNUNCIO ALTERA IL SENTIERO DEL CONSUMO AGGREGATO DI EQUILIBRIO

$c_t = d \qquad c_{t+1} = d'$

Il resto è UGUALE.

CAPITOLO 4 - SCELTE IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

UTILITÀ ATTESA

x = premi

Vincita attesa $\rightarrow E[w] = \frac{\Sigma w}{N}$

Deviazione standard della distribuzione dei premi $\rightarrow \sigma(w) = \sqrt{\frac{\Sigma(E[w] - x_i)}{N}}$

Utilità attesa della lotteria $\left\langle \begin{array}{l} E[U(w)] = \frac{\Sigma\, U(x_i + w_0)}{N} \\ E[U(w)] = \Sigma\, (\pi \cdot U(x_i + w_0) + (\pi \cdot U(w_0)) \end{array} \right.$

π = probabilità

Utilità del premio atteso ottenuto con certezza $\rightarrow U(E[w])$

- $E[U(w)] < U(E[w]) \rightarrow$ INDIVIDUO AVVERSO AL RISCHIO
- $E[U(w)] = U(E[w]) \rightarrow$ INDIVIDUO INDIFFERENTE AL RISCHIO
- $E[U(w)] > U(E[w]) \rightarrow$ INDIVIDUO PROPENSO AL RISCHIO

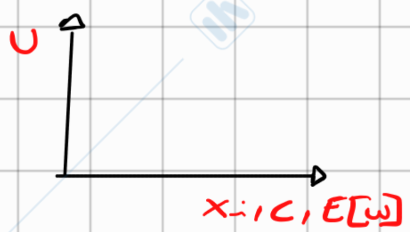
Avversione al rischio:
- ASSOLUTA → $A(w) = \boxed{-\dfrac{u''(w)}{u'(w)}}$
- RELATIVA → $R(w) = \boxed{w \cdot A(w)}$

Equivalente certo (c) → valore che l'individuo assegna alla lotteria
→ offerta MINIMA per far rinunciare l'individuo

$$U(c) = E[U(w)] \rightarrow E[U(w)] = \frac{\Sigma\, U(x_i) + w_0}{N}$$

$$c = (E[U(w)])^2 - w_0$$

Premio per il rischio → $\pi = E[w] - c$



CAPITOLO 5 - PROBLEMA CANONICO DI PORTAFOGLIO

Rendimento azioni → $\tilde{r} = \dfrac{\text{valore futuro} - \text{valore attuale}}{\text{valore attuale}}$ oppure $\tilde{r} = \dfrac{\tilde{V}}{P} - 1$

$\tilde{V}$ = valore finale azioni P = prezzo d'acquisto azioni

Ricchezza finale investitore → $\tilde{w}_1 = (1+r_f)\, w_0 + (\tilde{r} - r_f)\, a$

a = ammontare investito in azioni

Extra-rendimento → $\tilde{x} = \tilde{r} - r_f$

$a^* = ?$ → $\max\limits_{a} E[u(\tilde{w}_1)] = E[u((1+r_f)w_0 + (\tilde{r} - r_f)a)]$ → $\begin{matrix} CPO \\ \{a\} \end{matrix}$

$a^* = 0$ se e solo se $E(\tilde{x}) = 0$ $E(\tilde{x})$ = extra-rendimento atteso

- PRESENZA DI REDDITO DA LAVORO INCERTO ($\tilde{y}$):

$$w_1 = (1+r_f)w_0 + \tilde{x}a + \tilde{y}$$

$a^* = ?$ → $\max\limits_{a}$ → $\begin{matrix} CPO \\ \{a\} \end{matrix}$

Calcolare la COVARIANZA tra $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$:

$$E[\tilde{x}] = \Sigma\, (\tilde{x}_i \cdot \pi)$$

$$E[\tilde{y}] = \Sigma\, (\tilde{y}_i \cdot \pi)$$

$$E[\tilde{x} \cdot \tilde{y}] = \Sigma\, (\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i \cdot \pi)$$

$$cov[\tilde{x}, \tilde{y}] = E[\tilde{x} \cdot \tilde{y}] - (E[\tilde{x}] \cdot E[\tilde{y}])$$

CAPITOLO 6 - SCELTA DI PORTAFOGLIO ED EQUILIBRIO DI MERCATO CON PIÙ TITOLI RISCHIOSI → "CAPM"

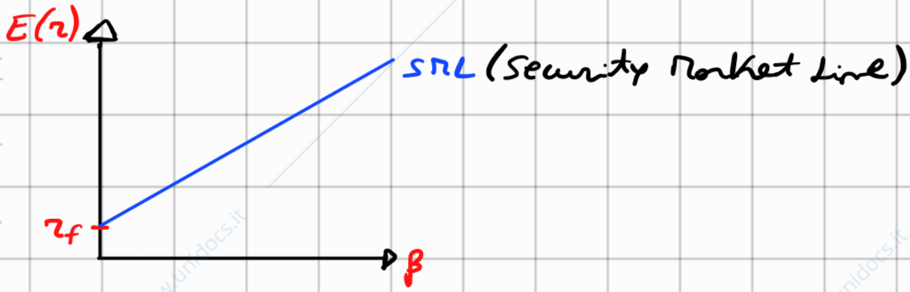
SML (equazione della retta di mercato dei titoli) → $E(\tilde{r}_i^*) = r_f + \alpha + \beta_i \underbrace{\left[E(\tilde{r}_m^*) - r_f\right]}_{\text{pendenza}}$

$r_f + \alpha$ → intercetta

pendenza → (premio per il rischio del portafoglio di mercato)

r_i = rendimento titolo "i"

r_m = rendimento portafoglio di mercato



β → COEFFICIENTE DI PROPORZIONALITÀ tra l'extra-rendimento del titolo "i" e quello del portafoglio di mercato.

$$\beta = \frac{cov\left[\tilde{r}_i^*, \tilde{r}_m^*\right]}{var\left(\tilde{r}_m^*\right)}$$

α → ALPHA DI JENSEN → scarto tra l'extra-rendimento atteso e quello di equilibrio previsto dalla SML.

→ IN EQUILIBRIO → $\alpha = 0$

$\alpha = r_x - E\left[\tilde{r}_x^*\right]$

- α NEGATIVO → TITOLO SOPRAVVALUTATO
- α POSITIVO → TITOLO SOTTOVALUTATO

↳ Si utilizza anche per capire se i titoli sono PREZZATI CORRETTAMENTE

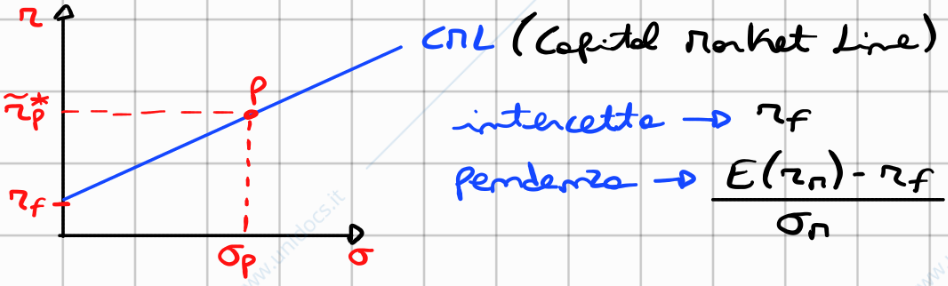
- RISCHIO DEL PORTAFOGLIO (TITOLO)

RISCHIO TOTALE → $\sigma_p = (\beta_p \cdot \tilde{r}_m) + \varepsilon_p$

β_p = RISCHIO SISTEMATICO

ε_p = RISCHIO IDIOSINCRATICO

$\beta_p = ?$ → $E(\tilde{r}_p^*) = r_f + \alpha + \beta_p \left(E(\tilde{r}_m^*) - r_f\right)$



intercetta → r_f

pendenza → $\dfrac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m}$ → INDICE DI SHARPE

CML → $E(r_p) = r_f + \left(\dfrac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_p\right)$

- Se investiamo solo in titoli RISK-FREE $\rightarrow \sigma_p = 0$ (RISCHIO NULLO)

$$E(r_p) = r_f$$

- Se investiamo solo nel MERCATO $\rightarrow \sigma_p = \sigma_m$ (RISCHIO MASSIMO)

$$E(r_m) = r_f + \left(\frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_m\right)$$

Determinare il portafoglio che permette di assumersi il MINOR RISCHIO possibile "σ_p" $\rightarrow$ $\bar{r}_p = (r_m \cdot \alpha) + (1-\alpha) r_f$

$\alpha \rightarrow$ peso del portafoglio di MERCATO sul portafoglio complessivo

$1-\alpha \rightarrow$ peso del portafoglio RISK-FREE sul portafoglio complessivo

Minimo rischio $\rightarrow$ $\sigma_p = (\alpha \cdot \sigma_m) + (1-\alpha) \underbrace{r_f}_{=0} = \alpha \cdot \sigma_m$

CAPITOLO 7 - PREFERENZE MEDIA - VARIANZA e CAPM

PORTAFOGLIO A VARIANZA MINIMA $\rightarrow \alpha_A = \dfrac{\sigma_B^2 - (\rho_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B)}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - (2 \cdot \rho_{A,B} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B)}$

$\alpha_B = 1 - \alpha_A$

CAPITOLO 8 - DETERMINAZIONE DEI PREZZI PER ARBITRAGGIO: L'APT

Rendimento atteso $\rightarrow$ $E(r_i) = r_f + (\beta_{i1} \cdot \lambda_1) + (\beta_{i2} \cdot \lambda_2) + (\beta_{i3} \cdot \lambda_3)$

$\lambda_i = E(r_i) - r_f \rightarrow$ extra-rendimenti (premio per il rischio)

β_i = sensibilità ai fattori di rischio

Se $\beta_p = \beta_m$ allora $E(r_p) = E(r_m)$

- NUOVO PORTAFOGLIO "PX", con $\beta_{PX3} = 0$, dalla combinazione di "P" e "X"

$\beta_{PX3} = (\alpha_p \cdot \beta_{P3}) + (\alpha_x \cdot \beta_{X3}) = 0$ con $\alpha_p + \alpha_x = 1$

$\downarrow$

$\alpha_p \rightarrow \alpha_x = 1 - \alpha_p$

CAPITOLO 9 - IL "CCAPM"

SCELTA INTERTEMPORALE E SCELTA DI PORTAFOGLIO

$$E[U] = u(c_0) + \beta E[u(\tilde{c}_1)]$$

sub:

$$c_0 = w_0 - [(m_0 - m_{-1})p_2 + (b_0 - b_{-1})] \qquad \text{con } m_{-1} = 1$$

$$\tilde{c}_1 = \tilde{w}_1 + m_0 \tilde{v}_2 + b_0(1 + r_f)$$

$b_{-1} \rightarrow$ dotazione iniziale del titolo sicuro (DEBITO)

$m_{-1} \rightarrow$ dotazione iniziale del titolo rischioso (AZIONI)

$b_0 \rightarrow$ ammontare investito in DEBITO in $t = 0$

$m_0 \rightarrow$ ammontare investito in AZIONI in $t = 0$

$\tilde{v}_2 \rightarrow$ valore finale (di liquidazione) delle AZIONI

$p = ? \rightarrow \max_{\{m_0, b_0\}} \rightarrow \text{CPO}_{\{m_0\}} \rightarrow$ PREZZO TITOLO RISCHIOSO (azioni)

$1 + r_f = ? \rightarrow \max_{\{m_0, b_0\}} \rightarrow \text{CPO}_{\{b_0\}} \rightarrow$ TASSO DI INTERESSE TITOLO SICURO (debito)

- MERCATO IN EQUILIBRIO

$$m_0 = m_{-1} = 1 \qquad b_0 = b_{-1} = 0$$

$$c_0 = w_0 \qquad c_1 = \tilde{w}_1 + \tilde{v}_1$$

Prezzo di equilibrio (AZIONI) $\rightarrow p^* = E\left[\frac{\beta u'(\tilde{c}_1^*)}{u'(c_0^*)} \cdot \tilde{v}\right]$

Tasso di interesse di equilibrio (DEBITO) $\rightarrow 1 + r_f^* = \frac{u'(c_0^*)}{\beta E[u'(\tilde{c}_1^*)]}$

- RENDIMENTO ATTESO DI EQUILIBRIO $E(\tilde{r}^*)$ DELLE AZIONI:

$$\boxed{E(\tilde{r}^*) = r_f^* - \frac{\text{cov}(u'(\tilde{c}_1), r^*)}{E[u'(\tilde{c}_1)]}}$$

- $E[u'(\tilde{c}_1)] = \pi \cdot u'(\tilde{c}_1)$
- $E[r^*] = \pi \left(\frac{\tilde{r}_A - p_2}{p_2} + \frac{\tilde{r}_B - p_2}{p_2}\right)$
- $E[u'(\tilde{c}_1^*) \cdot r^*] = \pi \left[\left(u'(\tilde{c}_{1A}^*)\right) \cdot \left(\frac{\tilde{r}_A - p_2}{p_2}\right) - \left(u'(\tilde{c}_{1B}^*)\right) \cdot \left(\frac{\tilde{r}_B - p_2}{p_2}\right)\right]$

- $cov\left[u'(\tilde{c}_1^*), r^*\right] = E\left[u'(\tilde{c}_1^*) \cdot r^*\right] - \left[E(u'(\tilde{c}_1^*) \cdot E(\tilde{r}^*)\right]$
- $1 + r_f^* = \pi \cdot E\left[\dfrac{u'(\tilde{c}_1^*)}{u'(c_0)}\right]$

- DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ DEI PAGAMENTI DISTRIBUITA SU "S" STATI

$$p_0^* = \sum_{s=1}^{S} \pi \left(\frac{\beta\, u'(\tilde{c}_1^*)}{u'(c_0^*)} \cdot v\right)$$

$$1 + r_f^* = \frac{u'(c_0^*)}{\beta E\left[u'(\tilde{c}_1^*)\right]}$$

- PROBABILITÀ CORRETTE PER IL RISCHIO

$$\pi_s^* = \pi_s \cdot m_s (1 + r_f^*)$$

$$m_s = \frac{\beta u'(c_1^*)}{u'(c_0^*)} \rightarrow \text{FATTORE STOCASTICO DI SCONTO}$$

$$\pi^* = \pi \cdot \left(\frac{\beta u'(c_1^*)}{u'(c_0^*)}\right)(1 + r_f^*)$$

- DECOMPORRE IL PREZZO DI EQUILIBRIO NELLE SUE 2 COMPONENTI

$$p_0^* = \underbrace{\frac{E[\tilde{v}]}{1 + r_f^*}}_{\text{Valutazione intertemporale}} + \underbrace{\frac{cov\left(u'(\tilde{c}_1^*), \tilde{v}\right)}{(1 + r_f^*)\, E\left[u'(\tilde{c}_1^*)\right]}}_{\text{Valutazione del rischio (sconto per il rischio)}}$$

$E[\tilde{v}] \rightarrow$ Valore atteso dei pagamenti del titolo

Se $p_0^* > \dfrac{E(\tilde{v})}{1 + r_f^*} \rightarrow$ TITOLO MENO RISCHIOSO

Se $p_0^* < \dfrac{E(\tilde{v})}{1 + r_f^*} \rightarrow$ TITOLO PIÙ RISCHIOSO

- AGENTE INDIFFERENTE AL RISCHIO

Non attribuisce un premio al rischio e sconta i flussi di cassa futuri con il TASSO D'INTERESSE RISK-FREE $(1 + r_f)$.

$$\boxed{p_0^* = \frac{E[\tilde{v}]}{1 + r_f}}$$

AGENTE AVVERSO AL RISCHIO → il prezzo dei titoli riflette un PREMIO PER IL RISCHIO e i titoli più rischiosi avranno un prezzo più basso

AGENTE INDIFFERENTE AL RISCHIO → i prezzi dei titoli dipendono solo dai suoi VALORI ATTESI FUTURI SCONTATI AL TASSO RISK-FREE.

CAPITOLO 10 - L'ENIGMA DEL PREMIO PER IL RISCHIO AZIONARIO

COERENZA DELLE EVIDENZE EMPIRICHE CON IL "CCAPM"

Il "CCAPM" predice il RENDIMENTO DEL MERCATO AZIONARIO con la seguente formula:

$$\boxed{E[r_m] - r_f = \gamma (\sigma_c)^2}$$

$E[r_m] - r_f \rightarrow$ premio per il rischio azionario

$\gamma \rightarrow$ coefficiente di avversione al rischio dell'investitore

$\sigma_c^2 \rightarrow$ varianza della crescita del consumo (volatilità)

Calcolo premio per il rischio $\rightarrow \lambda = E[r_m] - r_f$

Verifica della coerenza con il "CCAPM" $\rightarrow \gamma = \dfrac{E[r_m] - r_f}{\sigma_c^2}$

- Se $0 \leq \gamma \leq 10$ o valori non significativamente superiori $\rightarrow$ premio per il rischio PLAUSIBILE con il livello di avversione al rischio
- Se $\gamma > 10$ o addirittura $\gamma > 30 \rightarrow$ premio per il rischio INCOMPATIBILE con il "CCAPM", perché è relativamente BASSO rispetto al livello di avversione al rischio.

"CCAPM" MULTI-PERIODALE

Prezzo di equilibrio $\rightarrow p_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1}\left(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{p}_{t+1}\right)\right]$

$\tilde{m}_{t+1} = \beta \dfrac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \rightarrow$ Fattore stocastico di sconto

CAPITOLO 11 - BOLLE SPECULATIVE, MISPRICING E LIMITI DELL'ARBITRAGGIO

- PRESENZA DI UNA BOLLA SPECULATIVA "b_t"

$$b_t = E_t\left[\tilde{m}_{t+1} \cdot \tilde{b}_{t+1}\right] \qquad \tilde{m}_{t+1} = \beta \frac{u'(\tilde{c}_{t+1})}{u'(c_t)}$$

$$p_t = v_t + b_t$$

$v_t \rightarrow$ valore fondamentale titolo

Se gli investitori sono INDIFFERENTI AL RISCHIO:

- $u'(\tilde{c}_{t+1})$ e $u'(c_t)$ sono PARI ALLA STESSA COSTANTE

Quindi $\rightarrow$ $\tilde{m}_{t+1} = \beta = \frac{1}{1+r_f}$

$$p_t = E_t\left[\beta\left(\tilde{d}_{t+1} + \tilde{p}_{t+1}\right)\right]$$

Valore fondamentale delle azioni della società $\rightarrow$ $v_t = \frac{\beta \pi}{1 - \beta \pi}$

Tasso di crescita della bolla $\rightarrow$ $\frac{1+r_f}{\pi - 1}$