

Esercizio 2.B) Considera un modello biperiodale, in cui un individuo rappresentativo ha la seguente funzione di utilità attesa

$$E[U] = -\frac{1}{2}(\eta - c_0)^2 + \beta E \left[-\frac{1}{2}(\eta - \tilde{c}_1)^2 \right]$$

(dove $\eta = 100$ e $\beta = 1$), ed i seguenti vincoli di bilancio:

$$c_0 = w_0 - [(n_{0r} - n_{-1r})p_r + (b_0 - b_{-1})p_f],$$

$$c_1 = w_1 + n_{0r}\tilde{v}_r + b_0v_f$$

dove w_0 è il reddito noto da lavoro dell'individuo nel periodo 0 e w_1 è il suo reddito noto da lavoro nel periodo 1; b_{-1} e n_{-1r} sono le dotazioni iniziali del titolo sicuro (debito) e di quello rischioso (azioni emesse dalla compagnia r) dell'individuo, b_0 e n_{0r} le unità dei due titoli che egli decide di detenere nel periodo 0, v_f e \tilde{v}_r , infine, i valori finali dei due titoli.

i) Scrivi le condizioni di primo ordine del problema ed utilizzale per ottenere delle espressioni per i prezzi dei due titoli, p_f e p_r , e per il tasso d'interesse.

ii) Supponi ora che la quantità offerta di entrambi i titoli sia pari a 1 e che esistono solo tre possibili stati di natura, A , B , e C , equiprobabili (per cui $\pi_A = \pi_B = \pi_C = 1/3$). Sapendo che $w_0 = 40$, $w_1 = 20$, $v_f = 10$ e che la distribuzione di \tilde{v}_r è la seguente:

Stato	\tilde{v}_r
A	28
B	22
C	10

determina il tasso di interesse privo di rischio e le probabilità corrette per il rischio di ciascuno degli stati di natura. A quale stato è associata la probabilità corretta per il rischio più alta? Intuitivamente, perché?

iii) Utilizzando le probabilità corrette per il rischio, calcola il prezzo d'equilibrio del titolo rischioso. Quale sarà il suo extra-rendimento atteso d'equilibrio?

iv) Immagina ora che in quest'economia vi sia un secondo titolo rischioso, e cioè le azioni emesse dalla compagnia k . Sapendo che la distribuzione di \tilde{v}_k è la seguente:

Stato	\tilde{v}_k
A	0
B	10
C	20

e che l'offerta di azioni k è pari ad 1, determina le probabilità corrette per il rischio ed il tasso d'interesse d'equilibrio in questa economia con due titoli rischiosi. [**Suggerimento:** i vincoli in questo caso saranno $c_0 = w_0 - [(n_{0r} - n_{-1r})p_r + (n_{0k} - n_{-1k})p_k + (b_0 - b_{-1})p_f]$, e $c_1 = w_1 + n_{0r}\tilde{v}_r + n_{0k}\tilde{v}_k + b_0v_f$]

v) [facoltativo] Calcola il prezzo d'equilibrio dei due titoli rischiosi. L'extra-rendimento atteso del "portafoglio di mercato" (composto cioè sia dal titolo r che dal titolo k) detenuto dall'investitore rappresentativo in equilibrio è maggiore o minore di quello calcolato al punto (iii) (composto dal solo titolo r)? Intuitivamente, perché?