

Mario Ciampi

APPUNTI DALLE LEZIONI DI

# CONDUZIONE TERMICA

1

1. L'equazione generale della conduzione e l'equazione di Fourier.
2. Soluzioni elementari dell'equazione di Fourier: caso stazionario in simmetria piana.
3. Problemi stazionari in simmetria cilindrica e sferica.
4. Sbarre e alette in approssimazione monodimensionale.

(Dicembre 2009 / Rv. Febbraio 2011)

Ho deciso di raccogliere queste note sulla conduzione termica quando ho visto che la seconda edizione del testo [Oz] è assai diversa dalla prima che seguivo soprattutto per la parte riguardante le tecniche matematiche per la soluzione dell'equazione di Fourier.

Questi appunti seguono fedelmente le lezioni svolte da me in questi anni; inoltre sono riportati molti problemi, assai di più di quelli che riesco a discutere in un anno durante il corso; essi sono risolti, spesso in maniera assai dettagliata, ed occupano molte pagine.

In sintesi, i primi capitoli (§ 1-9) ripetono e approfondiscono, con molti esempi, i concetti già noti agli studenti di Fisica Tecnica; dopo aver rivisto le nozioni di base (§ 1), vengono esaminati i problemi stazionari (§ 2-3), le superfici alettate (§ 4) e i transitori termici nell'approssimazione di piccoli numeri di Biot (§ 7). Particolare attenzione è posta all'analogia elettrica, usata come metodo di soluzione di problemi ed approfondita in § 5. Inoltre vengono affrontati problemi, di solito non considerati in Fisica Tecnica, quali quelli con presenza di una sorgente interna dipendente dalla temperatura (§ 4.9), di solidi in movimento o di pareti porose (§ 6) e di solidi non lineari o anisotropi (§ 8). In questa prima parte si introducono inoltre concetti e tecniche che saranno usati nella seconda parte (ad esempio in § 4.6 si introducono le equazioni e le funzioni di Bessel); alcuni cenni sono dedicati alla soluzione numerica dei problemi nei § 5 e § 7.

La seconda parte (§ 9-18) è dedicata alle tecniche di soluzione analitica di problemi di conduzione; ho scelto di limitare la discussione al metodo della trasformata temporale di Laplace (§ 9-12) e al metodo di separazione delle variabili per un solido di dimensioni finite e alla sua conseguenza nota come metodo della trasformata integrale (§ 13-15): per approfondimenti e per altri tipi di approccio si consiglia di consultare [Oz]. I due capitoli successivi sono dedicati ad esempi di applicazione dei metodi studiati, raggruppati per tema: in § 16 sono studiati i transitori termici di corpi immersi in un fluido e in § 17 i problemi sia stazionari che transitori su alette. Infine in § 18 sono presentati esempi atti a mettere in luce alcune particolarità e le differenze tra i vari metodi studiati.

Si avverte poi che con Tf. vengono indicati gli appunti di Termofluidodinamica, con I. quelli di Irraggiamento.

[Oz] M. Necati Ozisik: *Heat Conduction*, Ed. J. Wiley and Sons, New York.(1a edizione).

(Dicembre 2009)

# 1. L'equazione generale della conduzione e l'equazione di Fourier.

Viene qui studiata la conduzione termica in un solido fermo, schematizzato come un mezzo continuo opaco (escludendo pertanto gli effetti di irraggiamento); inoltre, in questo paragrafo, si prende in considerazione un solido isotropo. Dopo aver illustrato la forma locale dell'equazione di bilancio energetico, viene considerata l'equazione costitutiva che lega il flusso al campo di temperatura, si danno indicazioni sulla conduttività termica, si ricava l'equazione di conduzione e se ne discutono le condizioni al contorno. Infine se ne scrive la forma linearizzata nell'ipotesi di solido omogeneo (equazione di Fourier).

## 1.1 L'equazione di bilancio locale per il solido.

La conduzione è quel fenomeno per cui il calore si propaga per contatto tra particelle (macroscopiche) contigue, a causa della loro differenza di temperatura; pertanto è questa la tipica modalità con cui si attua la trasmissione del calore in un solido fermo. Se le particelle sono in moto, come in un fluido, si ha il fenomeno della convezione, in cui il calore si propaga sia per la conduzione sia per il ricambio delle particelle che vengono a contatto tra loro a causa del movimento.

Il fatto che la conduzione sia un fenomeno di contatto, ha come conseguenza che gli scambi termici risultano completamente caratterizzati da un vettore  $q_i''$ , densità di flusso termico o flusso termico unitario (Tf §2.5); in particolare la potenza termica  $q$  che attraversa una superficie orientata  $A$  (considerata positiva se concorde con la normale  $n_i$ ) è espressa da :

$$q = \int_A q_i'' n_i dA$$

(si ricordi la convenzione della somma sottintesa sugli indici spaziali ripetuti). Per ottenere un'equazione per la conduzione e cioè un'equazione locale che fornisca il campo termico  $T(x_i, t)$ , e di conseguenza gli scambi, occorre prendere in considerazione:

- un'equazione di bilancio energetico in forma locale,
- un'equazione costitutiva per gli scambi e cioè un'equazione fenomenologica, che leghi la densità di flusso termico alle variazioni del campo termico.

Il bilancio energetico è stato discusso in dettaglio nei §3 e 4 di Tf. per un fluido newtoniano in moto, ottenendo così la (Tf.4.11), qui riportata per comodità:

$$(1.1) \quad \rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + \beta T \frac{DP}{Dt} + \varphi$$

Si ricorda che nel termine di irreversibilità  $\varphi$ , oltre agli effetti degli attriti interni (viscosità), possono essere inglobati gli effetti di altri fenomeni dissipativi o di eventuali reazioni chimiche, come indicato in Tf. §4.5.

Poiché i vari processi di trasmissione del calore avvengono solitamente alla pressione atmosferica, sembra utile assumere la pressione costante, in modo che, nella precedente equazione, il termine contenente la derivata della pressione si annulli; inoltre per un solido fermo, si potrà sostituire la derivata convettiva della temperatura con la semplice derivata parziale; si ha allora

$$(1.2) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + \varphi$$

in cui il termine  $\varphi$  deve essere considerato un dato; esso è positivo (“sorgente”) per processi di tipo dissipativo; può essere assunto negativo (“pozzo” termico) per modellare particolari processi, quali ad esempio reazioni chimiche endotermiche o casi particolari di cessione di calore (v. §4.1); più in generale, in  $\varphi$  si può includere ogni tipo di apporto energetico non riconducibile alla conduzione. Nella (1.2) si è lasciato cadere il pedice “ $p$ ” nel calore specifico: infatti in un solido, in assenza di cambiamento di stato, i vari calori specifici sono molto prossimi tra loro e, in particolare, sono assai prossimi quelli a pressione e a volume costante ( $c_p \approx c_v$ ); si può allora lasciar cadere la precisazione della trasformazione considerata parlando semplicemente di calore specifico ( $c$ ).

Alla (1.2) si potrebbe rapidamente pervenire argomentando come in Tf. §2.6; per una particella di solido di volume  $\Delta V$  e massa  $\Delta M = \rho \Delta V$ , un bilancio termico nell’intervallo temporale  $dt$  fornisce

$$q dt = (\text{calore scambiato}) \leq \Delta M T dS$$

(con  $q$  potenza termica e  $S$  entropia specifica). La potenza termica scambiata dalla particella può essere espressa attraverso la divergenza del flusso termico unitario (Tf.2.15) come

$$q = - \frac{\partial q_i''}{\partial x_i} \Delta V$$

Inoltre, per un fluido termodinamico che non cambia di stato, dalla definizione di calore specifico  $c_\gamma$  relativo alla trasformazione  $\gamma$  si ha  $T dS = c_\gamma dT$ ; si ottiene allora

$$\rho c_\gamma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_i''}{\partial x_i} \geq 0$$

Considerando  $c_\gamma \approx c$  e sostituendo a secondo membro una quantità  $\varphi \geq 0$  che tenga conto dei fenomeni di tipo dissipativo, si ritrova la (1.2).

#### Note.

- Abbiamo sottolineato che, per un solido, il calore specifico  $c$  dipende poco dal tipo di trasformazione termodinamica; in effetti, nelle precedenti considerazioni abbiamo modellato il solido come un fluido termodinamico, e cioè come un sistema bivalente ( $P, V, T$ ). In questa nota si vuole accennare all’influenza della sollecitazione meccanica sulla trasmissione del calore in un *solido elastico isotropo*.

Cominciamo col ricordare che per un fluido ( $P, V, T$ ) vale la relazione termodinamica:

$$(1.3) \quad T dS = c_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = c_v dT + \frac{T\beta}{\chi_T} dV$$

ove  $V$  è il volume specifico,  $\beta$  e  $\chi_T$  sono rispettivamente i coefficienti di dilatazione isobara e quello di compressibilità definiti da:

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \quad \chi_T = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T;$$

inoltre, nel passaggio all’ultima forma della (1.3) si è tenuto conto che

$$\frac{dV}{V} = \beta dT - \chi_T dP, \quad dP = - \frac{dV}{\chi_T V} + \frac{\beta dT}{\chi_T} \quad \text{da cui} \quad \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{\beta}{\chi_T}$$

Con ciò, in luogo della (1.2), si potrebbe scrivere

$$(1.4) \quad \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T\beta}{V\chi_T} \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + \varphi$$

Per un solido isotropo elastico [Casarosa: *Termodinamica classica ed elasticità*, Ed. ETS, 1999], la sollecitazione meccanica può essere espressa mediante il tensore degli sforzi  $\sigma_{ik}$ , la deformazione mediante il tensore di deformazione  $\varepsilon_{ik}$ ; in particolare la variazione relativa del volume specifico è esprimibile mediante la variazione della traccia del tensore di deformazione  $dV/V = d\varepsilon_{ii}$ . Tale solido si comporta come un fluido termodinamico quando è

sottoposto a sollecitazioni di pura compressione uniforme ( $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik}$ ); ne segue che la precedente relazione può essere riscritta come

$$(1.5) \quad \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T\beta}{\chi_T} \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + \varphi$$

In effetti, si potrebbe dimostrare che la (1.5) mantiene la sua validità per un qualunque tipo di sollecitazione (anche non isotropa) cui è sottoposto il solido, pur di intendere  $c_v$  come il calore specifico a deformazione costante: più precisamente si deve intendere:

$$c_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\varepsilon, \quad c_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_\sigma, \quad \beta = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial T} \right)_\sigma, \quad \chi_T = - \left( \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial \sigma_{kk}} \right)_T.$$

La (1.5) mostra che, in generale, la conduzione termica (il flusso  $q_i''$ ) è influenzata dalle variazioni dello stato di sollecitazione meccanica del solido. In assenza di deformazioni, come è intuitivo, il volume locale del solido non varia e il secondo termine a primo membro si annulla: si ricade nella (1.2) con  $c = c_v$ . Peraltro le deformazioni di un solido (e quindi anche le variazioni locali di volume) possono dipendere in modo complicato dalle sollecitazioni (anche di origine termica) e dalle condizioni al contorno. Ad esempio se si considera un solido molto grande, senza deformazione sul bordo e con temperatura uniforme e costante sul bordo stesso, si potrebbe dedurre che [Landau-Lifshits: *Teoria dell'elasticità*, Ed. Riuniti, 1978] la (1.2) rimane inalterata, pur di assumere

$$c = \frac{c_p(1 + \sigma_p) + 2c_v(1 - 2\sigma_p)}{3(1 - \sigma_p)}$$

con  $\sigma_p$  modulo (costante elastica) di Poisson; poiché  $0 \leq \sigma_p \leq 0.5$ , ne risulta che

$$\frac{c_p + 2c_v}{3} \leq c \leq c_p$$

e poiché  $c_p \approx c_v$  si ha  $c \approx c_p$ .

2. Se si assume che la pressione sia costante ( $c = c_p$ ), la (1.2) può essere riscritta nella forma di equazione di bilancio entalpico locale:

$$(1.6) \quad \rho \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial q_i''}{\partial x_i} + \varphi$$

Si noti che la versione integrale dello stesso bilancio, applicato ad un sistema chiuso a pressione costante, non è altro che la ben nota relazione

$$(1.6') \quad \frac{dI}{dt} = q_{fr} + q_{sor}$$

ove  $I$  è l'entalpia (J) dell'intero sistema,  $q_{fr}$  la potenza termica entrante in esso attraverso tutta la sua frontiera,  $q_{sor}$  l'intera potenza termica in esso generata.

## 1.2 Il postulato di Fourier e la conduttività termica.

In questo paragrafo si discute l'equazione costitutiva che lega localmente il flusso termico  $q_i''$  al campo di temperatura  $T(x_i, t)$ . Per un solido isotropo, l'equazione generalmente accettata è detta *postulato di Fourier*

$$(1.7) \quad q_i'' = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Essa afferma che il vettore flusso termico è proporzionale al gradiente di temperatura, tramite una quantità  $\kappa$ , detta *conduttività termica* o *coefficiente di conducibilità termica*; questa è una proprietà termodinamica locale del solido e, in linea di principio, può dipendere sia dalla temperatura sia dallo stato di sollecitazione; quest'ultima dipendenza è normalmente trascurabile, per cui  $\kappa = \kappa(T)$ .

La (1.7) appare del tutto naturale se si pensa che il calore trasmesso per conduzione debba dipendere solo dai salti di temperatura vigenti nel solido, all'istante considerato; con ciò, il flusso locale dipenderà solo dal gradiente:  $q_i'' = f(\partial T / \partial x_h)$ . E' possibile sviluppare in serie questa funzione; il termine di ordine zero (indipendente dal gradiente) deve essere nullo, se non si vuole che sia nullo il flusso termico in condizioni di temperatura uniforme nell'intorno del punto considerato; inoltre, nelle varie relazioni di tipo costitutivo, il flusso (qui  $q_i''$ ) dipende poco dai termini non lineari nella forza generalizzata (qui  $\partial T / \partial x_h$ ), che pertanto vengono trascurati. Tutto ciò conduce alla relazione di proporzionalità tra flusso e gradiente

$$(1.8) \quad q_i'' = -\kappa_{ih} \frac{\partial T}{\partial x_h}$$

(è sottintesa la somma sull'indice  $h$ ). Se si ammette che il fluido sia isotropo (così da non presentare direzioni privilegiate), è chiaro che flusso e gradiente debbano essere collineari, con una sola costante di proporzionalità (indipendente dalla direzione) e cioè  $\kappa_{ih} = \kappa \delta_{ih}$ : si ritrova così il postulato di Fourier (1.7).

Si noti inoltre che la conduttività  $\kappa$  deve essere sempre non negativa, se si richiede (in base al secondo principio della termodinamica) che il calore si propaghi da zone a temperatura più elevata verso zone di temperatura inferiore (cfr. Tf. §4)

$$\kappa \geq 0$$

o anche  $\kappa > 0$ , dal momento che non esistono solidi perfettamente isolanti.

La giustificazione della (1.7) qui riportata, non è una *deduzione* dai principi fondamentali della fisica, bensì ne mostra la ragionevolezza; in quanto equazione costitutiva la (1.7) è un postulato, suffragato dai risultati sperimentali. In effetti non esistono esperienze che falsificano chiaramente la (1.7), anche se alcune considerazioni teoriche (v. § 11.3) suggeriscono che essa non possa essere esatta.

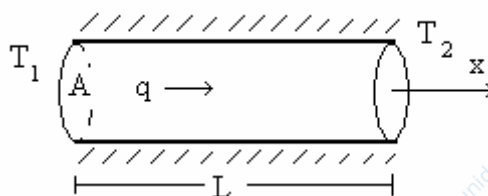


Fig. 1.1 – Schema di principio per una misura della conduttività termica.

Dal punto di vista storico, il postulato di Fourier è scaturito da esperimenti effettuati in condizioni di regime; un tipico esempio è quello di una sbarretta solida, di lunghezza  $L$  e sezione costante di area  $A$ , perfettamente isolata (adiabatica) sul suo mantello e con le facce alle estremità mantenute a temperature diverse,  $T_1$  e  $T_2$  (fig. 1.1). Considerazioni energetiche assicurano che una stessa potenza termica  $q$  attraversa la generica sezione della sbarretta (da  $T_1$  e  $T_2$ ); i risultati sperimentali mostravano che  $q$  è:

- direttamente proporzionale al salto termico  $T_1 - T_2$ ,
- direttamente proporzionale all'area  $A$ ,
- inversamente proporzionale alla lunghezza  $L$ ,

con la costante di proporzionalità  $K$  che dipende dal materiale costituente la sbarretta e, in qualche misura, anche dalle due temperature  $T_1$  e  $T_2$ . In formula

$$(1.9) \quad q = \frac{KA}{L}(T_1 - T_2) \quad \text{ovvero} \quad q_x'' = K \frac{T_1 - T_2}{L}$$

(con  $q_x'' = q/A$ ). Attualmente, tali risultati sperimentali appaiono del tutto prevedibili.

Passando a sbarrette sempre più corte e con piccoli salti termici imposti tra le due facce, la frazione nell'ultima espressione tende a  $-(\partial T / \partial x)$  mentre  $K$  tende a dipendere dal materiale e dalla sua

temperatura ( $T \approx T_1 \approx T_2$ ) ed è quindi identificabile con  $\kappa$ ; appare dunque lecito indurre la (1.7). La (1.9) verrà ricavata dall'equazione di conduzione in §2.2 nell'ipotesi che  $\kappa$  sia indipendente da  $T$ ; in § 8.1 si mostrerà che se  $\kappa$  dipende dalla temperatura, la quantità  $K$  qui considerata si identifica con il valor medio della conduttività nell'intervallo di temperature tra  $T_1$  e  $T_2$ .

Abbiamo parlato di conduzione, caratterizzata dalla conduttività  $\kappa$ , nel caso di solidi isotropi. Di fatto i solidi hanno solitamente struttura cristallina e solo quelli che cristallizzano con reticolo cubico sono isotropi; per contro l'isotropia è assicurata per i solidi amorfi e, in buona approssimazione, per quelli policristallini (costituiti da un raggruppamento di piccoli cristalli con orientazione casuale); in pratica solo per i monocristalli non cubici e per i materiali fibrosi la forma (1.7) del postulato di Fourier non è valida e la conduttività  $\kappa$  non è una quantità scalare, come sarà discusso nel § 8.

Ovviamente un analogo fenomeno di conduzione pura avrebbe luogo anche nei fluidi (gas, liquidi) se si riuscisse ad impedire i moti convettivi; comunque anche per i fluidi la conduttività  $\kappa$  è un importante parametro per la determinazione degli scambi convettivi, come messo in luce nelle lezioni di Termofluidodinamica.

L'unità di misura della conduttività termica nel S.I. è  $\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ; la fig. 1.2 ne illustra l'ordine di grandezza per diversi materiali, a temperatura ambiente.

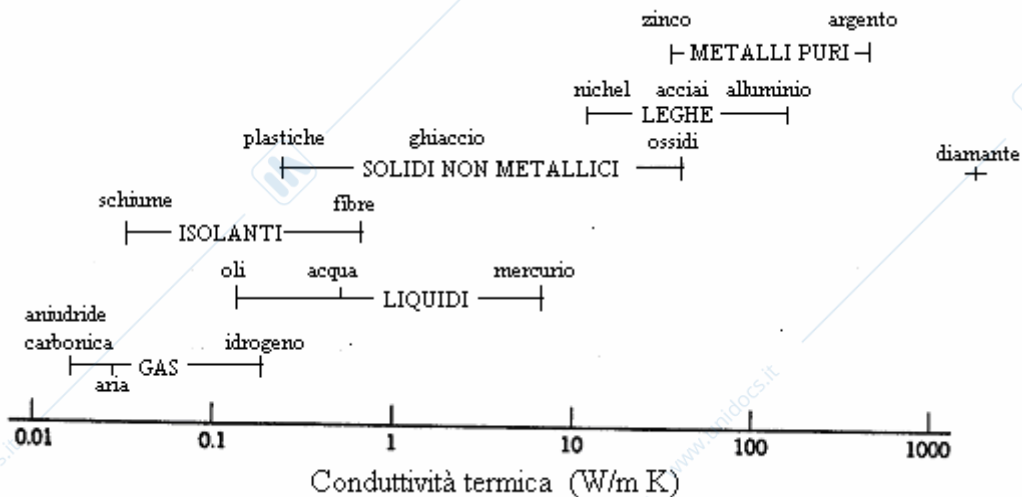


Fig. 1.2 - Ordini di grandezza per la conduttività termica.

La conduttività è una proprietà di trasporto che quantifica il trasferimento di energia termica nel mezzo, per diffusione dovuta ad un gradiente di temperatura: essa dipende dunque dalla struttura atomica del mezzo stesso.

I più bassi valori di  $\kappa$  si realizzano per i gas, ove il trasporto energetico è dovuto alle molecole, il cui moto libero è limitato solo dagli urti. Più massicce sono le molecole, minore è la loro velocità di agitazione termica e la loro mobilità: minore sarà pertanto la conduttività  $\kappa$ . La teoria cinetica dei gas prevede inoltre che  $\kappa$  cresca proporzionalmente con la radice della temperatura e che non dipenda dalla pressione.

Nei solidi, gli atomi oscillano termicamente attorno alla loro posizione di equilibrio, vincolata al reticolo cristallino, e pertanto non costituiscono gli agenti diretti del trasporto energetico; peraltro nei metalli, gli elettroni di conduzione sono quasi liberi e possono trasportare energia, così come trasportano carica elettrica in presenza di un campo elettrico. Di fatto i buoni conduttori elettrici risultano anche dei buoni conduttori termici e viceversa. Un altro importante meccanismo di trasporto energetico è la propagazione di vibrazioni del reticolo; poiché il quanto energetico di tali vibrazioni è detto fonone, spesso si parla di una propagazione di fononi. Questi due effetti

contribuiscono in modo additivo al trasporto dell'energia termica; si può dunque pensare che la conduttività del solido

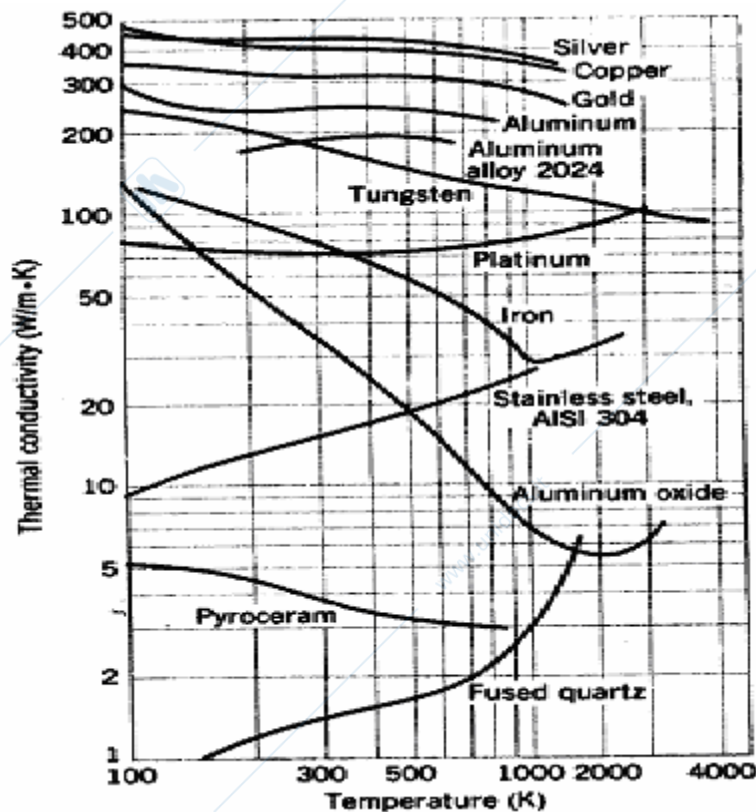


Fig. 1.3 – Andamento della conduttività termica con la temperatura per alcuni solidi.

$$K = K_{el} + K_{vib}$$

sia la somma del contributo elettronico, proporzionale alla conducibilità elettrica del solido, e di quello vibrazionale, che non ha un analogo elettrico. Nei metalli puri, il contributo vibrazionale è di solito trascurabile rispetto a quello elettronico, spesso assai elevato; nelle leghe il contributo vibrazionale comincia ad avere una certa importanza, ma diminuisce l'entità del contributo elettronico; infine, nei solidi non metallici il contributo vibrazionale diviene prevalente.

La regolarità del reticolo ha un importante effetto su  $\kappa_{vib}$  e spiega il fatto che materiali con il reticolo ben ordinato (come il quarzo) abbiano conduttività più elevate del corrispondente materiale amorfo (vetro); tale effetto è particolarmente elevato nel caso del diamante, che presenta un valore di  $\kappa$  assai alto. La dipendenza di  $\kappa$  dalla temperatura in un solido, piuttosto complessa, è esemplificata in fig. 1.3.

I liquidi, come è chiaro dalla fig. 1.2, presentano un comportamento intermedio tra i solidi e i gas. Infine nella stessa figura, sotto la dizione di "isolanti", si sono indicati dei materiali compositi (comprendenti il polistirolo e la lana di vetro) che sono spesso impiegati come materiali isolanti, in quanto la loro *conduttività termica efficace* risulta bassa; in effetti, essi sono costituiti da una matrice solida leggera che racchiude aria, limitandone fortemente i moti convettivi.

Si ricordi che il gradiente, nel punto P, di una funzione  $f(x_i)$  risulta perpendicolare alla superficie  $f(x_i) = \text{costante}$ , passante per P; pertanto il postulato di Fourier assicura che, su una superficie isoterma, il flusso termico  $q_i''$  è un vettore ad essa perpendicolare. Inoltre, se una superficie nel solido è adiabatica (dunque non è attraversata dal flusso), il vettore  $q_i''$  deve essere tangente ad essa; ma poiché  $q_i''$  è perpendicolare alla superficie isoterma, ne segue che le superfici *isoterme ed adiabatiche si intersecano perpendicolarmente tra loro*; in un grafico bidimensionale, le "linee" isoterme ed adiabatiche costituiscono una rete di curve che si incontrano sempre ad angolo retto.

### 1.3 L'equazione della conduzione per un solido isotropo.

Se si sostituisce il postulato di Fourier nell'equazione locale di bilancio (1.2) si ottiene l'equazione della conduzione per un solido isotropo fermo nella forma

$$(1.10) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \varphi$$

E' questa un'equazione differenziale alle derivate parziali nella incognita  $T(x_i, t)$ ; in linea di principio essa permette di ricavare l'andamento del campo termico nel solido considerato, sulla base dei seguenti dati:

- le condizioni geometriche e cioè la forma e le dimensioni del corpo in studio;
- le condizioni fisiche e cioè la capacità termica volumetrica  $\rho c$ , la conduttività termica  $\kappa$  e la produzione di calore  $\varphi$ ;
- le *condizioni iniziali* e cioè la distribuzione di temperatura nel corpo all'istante iniziale ( $t=0$ ) esprimibile assegnando la funzione  $T(x_i, t=0) = T_m(x_i)$ ;
- le *condizioni al contorno* e cioè la specificazione dell'interazione termica su tutta la frontiera  $A$  tra il solido e l'esterno.

Queste ultime sono basate sul fatto che la temperatura deve essere continua in ogni punto della frontiera, cioè deve essere la stessa se vista dalla parte del solido o del suo esterno ( $T_{front} = T_{est}$ ); inoltre, in assenza di sorgenti termiche localizzate sulla frontiera stessa, la potenza termica ( $q_i'' n_i dA$ )<sub>front</sub>, uscente dal solido attraverso un elemento orientato  $dA$  della frontiera con normale  $n_i$ , deve essere uguale a quella ( $q_i'' n_i dA$ )<sub>est</sub> che l'esterno riceve; ne segue che deve essere continua la componente normale del flusso termico. In particolare, pensando di suddividere la frontiera  $A$  in più parti  $A^{(s)}$ , si possono distinguere diversi *tipi* di condizioni al contorno, particolarmente significativi:

- (1) *primo tipo*: è assegnata la distribuzione di temperatura  $T_{front}$  sulla porzione  $A^{(s)}$  di frontiera ad ogni istante:

$$T_{front} = g_s(x_i, t) \quad \text{con} \quad x_i \in A^{(s)}, t > 0$$

Un caso particolarmente semplice, ma importante, è quello di temperatura uniforme e costante nel tempo.

- (2) *di secondo tipo*: è assegnata la distribuzione dello scambio termico sulla porzione  $A^{(s)}$  di frontiera ad ogni istante ( $n_i$  è il versore normale alla superficie diretto verso l'esterno del corpo):

$$q_i'' n_i = G_s(x_i, t) \quad \text{con} \quad x_i \in A^{(s)}, t > 0$$

Un caso importante è quello in cui lo scambio termico superficiale  $q_i'' n_i$  è uniforme e più in particolare nullo ( $A^{(s)}$  è adiabatica).

- (3) *di terzo tipo o convettivo*: è assegnata la distribuzione della temperatura  $T_{fluido}$  del fluido esterno che lambisce la porzione  $A^{(s)}$  di frontiera (ad ogni istante) ed il coefficiente di scambio convettivo  $h$ :

$$q_i'' n_i = h(T_{front} - T_{fluido}) \quad \text{con} \quad x_i \in A^{(s)}, t > 0$$

Si può aggiungere un'altra condizione, che potremmo chiamare di *di quarto tipo*: se due solidi sono in contatto termico tra loro, in ogni punto di contatto gli scambi termici superficiali devono essere uguali, a meno del verso; inoltre, se il contatto è perfetto, anche le temperature superficiali devono essere puntualmente uguali.

Chiaramente la condizione iniziale non va posta se si cerca una soluzione stazionaria  $T(x_i)$ .

Si noti che la capacità termica volumetrica  $\rho c$ , la conduttività termica  $\kappa$  e la produzione di calore  $\varphi$  possono essere funzioni della temperatura  $T(x_i, t)$  rendendo così l'equazione (1.10) non lineare; inoltre in un solido non omogeneo  $\rho c$  e  $\kappa$  avranno una dipendenza esplicita dalla posizione, mentre

$\varphi$  potrà dipendere esplicitamente sia dalla posizione che dal tempo. Un'altra fonte di difficoltà è costituita dalla geometria del solido: se la sua forma non è assai semplice, le condizioni al contorno rendono il problema arduo. Tutto ciò, e soprattutto la non linearità, rende l'equazione di conduzione un oggetto matematico assai complicato.

Si ricorda infine che la quantità definita da

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$$

e misurabile, nel S.I., in  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ , è detta *diffusività termica*.

*Osservazioni.*

1. Le condizioni al contorno sopra riportate sono quelle più spesso usate, ma non esauriscono le varie possibilità. Un caso importante è quello di uno scambio radiativo sulla superficie del solido o della sovrapposizione di uno scambio convettivo ed uno radiativo. La presenza dell'irraggiamento rende la condizione al contorno non lineare; di solito è opportuno procedere ad un processo di linearizzazione. Ad esempio, se l'elemento superficiale del solido è grigio e lambertiano e scambia radiativamente solo con un ambiente molto vasto a temperatura  $T_{ext}$ , la condizione al contorno può essere localmente formulata come (I.11.7)

$$q_i'' n_i = \varepsilon \sigma (T_{front}^4 - T_{ext}^4) \quad \text{con} \quad x_i \in A^{(s)}, \quad t > 0$$

Si può scrivere

$$q_i'' n_i = h (T_{front} - T_{ext}) \quad \text{con} \quad h' = \frac{\varepsilon \sigma (T_{front}^4 - T_{ext}^4)}{(T_{front} - T_{ext})}$$

e valutare la quantità  $h'$  così introdotta assumendo valori ragionevoli per la temperatura; con ciò la condizione radiativa viene ridotta a quella convettiva sopra studiata con  $h' \Rightarrow h$ .

2. Alla condizione convettiva ci si può ridurre anche nel caso in cui sulla superficie del solido sia presente, oltre alla convezione, una sorgente termica superficiale che sviluppa una potenza  $w$  per unità di superficie; per un bilancio termico effettuato su un volumetto elementare attorno al punto della frontiera, al termine  $q_i'' n_i$  nella condizione convettiva si deve aggiungere la quantità  $w$ ; si ha così  $q_i'' n_i + w = h (T_{front} - T_{fluido})$  ovvero

$$q_i'' n_i = h (T_{front} - T_{fluido}^*) \quad \text{con} \quad T_{fluido}^* = T_{fluido} + w/h$$

Si ottiene così ancora una condizione convettiva; l'argomento viene riaffrontato in § 2.6.

#### 1.4 L'equazione di Fourier.

Si hanno delle notevoli semplificazioni dell'equazione della conduzione se si possono accettare le seguenti assunzioni:

- le quantità  $\rho c$ ,  $\kappa$  e  $\varphi$  sono indipendenti dalla temperatura,
- il solido in studio può essere considerato omogeneo.

Di fatto la prima assunzione non semplifica la scrittura della (1.10), ma rende l'equazione lineare: se anche le condizioni al contorno sono lineari (e cioè dei quattro tipi sopra considerati, con  $h$  indipendente dalla temperatura per il terzo tipo), allora il *problema* della determinazione di  $T(x_i, t)$  è *lineare*. E' questa una semplificazione assai importante. In effetti, come discusso in §1.2, la conduttività dei solidi dipende dalla temperatura, così come (seppure in minor misura) la capacità termica volumetrica; peraltro se la dipendenza dalla temperatura non è molto rilevante all'interno del campo di variazione della temperatura del problema, è un'approssimazione ragionevole assumere per  $\kappa$  e  $\rho c$  degli opportuni valori medi (*procedimento di linearizzazione*).

La seconda assunzione implica che  $\rho c$  e  $\kappa$  (e di conseguenza  $\alpha$ ) non dipendano esplicitamente dalla posizione e quindi (non dipendendo da  $T$  per la prima assunzione) che siano delle costanti; corpi composti possono essere scomposti in varie parti omogenee, raccordabili tra loro mediante condizioni al contorno di quarto tipo. Per la costanza di  $\kappa$ , il secondo termine della (1.10)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

risulta proporzionale al laplaciano della temperatura. Si ottiene così l'equazione

$$(1.11) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

lineare a coefficienti costanti, non omogenea con  $\varphi(x_i, t)$ , detta *equazione di Fourier*. Si deve peraltro rilevare che, affinché il problema in studio risulti lineare, è necessario che lo siano anche le condizioni al contorno; in particolare si richiede che nella condizione di tipo convettivo il coefficiente di scambio  $h$  non dipenda dalla temperatura superficiale del solido.

### 1.5 Esempi.

Il problema della conduzione consiste nel determinare il campo termico di un solido assegnato, date la sorgente interna, le condizioni al contorno e la condizione iniziale. Viceversa, una volta noto il campo termico si può risalire sia alla sorgente interna, sia al vettore flusso termico in ogni punto; in particolare si possono determinare anche gli scambi sul contorno (anche se non è possibile trarre informazioni su come l'esterno determina tali scambi). Ciò è esemplificato qui sotto, ove la "temperatura" è intesa come il salto di temperatura rispetto ad una temperatura di riferimento (non c'è da meravigliarsi se in qualche punto essa assume il valore  $T=0$ , o se fosse addirittura negativa!); nei seguenti esempi si è inoltre attribuito alla temperatura massima ed al lato del quadrato un valore unitario, per cui le varie formule non seguono la regola dell'uniformità dimensionale.

Esempio 1.1 (Analisi di un campo termico). *Si considera il campo termico, in un cubo omogeneo di lato unitario con conduttività  $\kappa$  costante, definito da:*

$$T(x, y, z) = 1 - xy \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1)$$

*Si vuole rappresentare l'andamento qualitativo delle isoterme e delle adiabatiche e calcolare gli scambi termici sulla frontiera.*

Si tratta di un campo termico stazionario bidimensionale: la temperatura è indipendente dalla coordinata  $z$ . Ci si limita pertanto a considerare il piano  $(x, y)$ , la temperatura è unitaria sugli assi  $x$  ed  $y$  e decresce se ci si sposta verso  $x=y=1$  ove assume il suo valore minimo  $T=0$ . Le isoterme sono caratterizzate dall'equazione  $xy=\text{costante}$  e sono dunque delle iperboli equilateri sul piano  $(x, y)$ ; esse sono rappresentate a tratto pieno in fig. 1.4; l'isoterma  $T=1$  è costituita dai tratti degli assi  $x$  ed  $y$ . Sul lati  $x=1$  e  $y=1$  la temperatura decresce rispettivamente come  $1-y$  e  $1-x$ .

Il flusso termico è un vettore le cui componenti, per il postulato di Fourier, sono

$$q_x'' = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa y, \quad q_y'' = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa x, \quad q_z'' = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

Esso è parallelo al piano  $(x, y)$  e non c'è alcuna trasmissione di calore nella direzione  $z$ ; nel seguito ci si riferisce al quadrato in  $z=0$ . Sulla diagonale  $(x=y)$  del quadrato il flusso termico ha le prime due coordinate uguali ed dunque collineare con la diagonale stessa: la diagonale è dunque una curva adiabatca (ciò è anche evidente data l'invarianza della temperatura rispetto allo scambio di  $x$  con  $y$ ). E' poi facile visualizzare l'andamento delle altre curve adiabatciche (alle quali il flusso è parallelo) ricordando che esse sono ortogonali alle isoterme; in fig. 1.4 esse sono rappresentate da curve tratteggiate.

Nel solido non sono presenti sorgenti interne, in quanto dall'equazione di Fourier segue

$$\varphi = -\kappa \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = 0 ;$$

pertanto la potenza termica che attraversa le porzioni di diverse isoterme comprese tra due adiabatiche non varia.

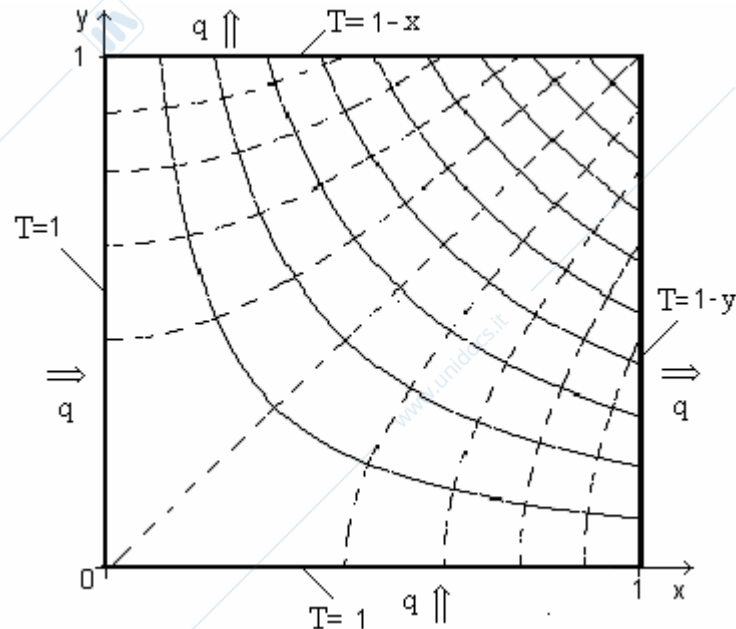


Fig. 1.4 – Andamento delle isoterme (a tratto pieno) e delle adiabatiche (tratteggiate) per il campo  $T=1-xy$ .

Per quanto riguarda gli scambi termici sui bordi si nota che:

- sul lato ovest ( $x=0$ ), il flusso ha solo la prima componente non nulla  $q_x'' = \kappa y$ ; l'intero lato viene attraversato da una potenza termica (entrante nel solido)

$$q = \int_0^1 q_x'' dy = \kappa \int_0^1 y dy = \kappa/2 ;$$

- sul lato est ( $x=1$ ), il flusso ha componenti  $q_x'' = \kappa y$  e  $q_y'' = \kappa$ , ma la seconda è parallela al lato e non influenza la potenza termica uscente che risulta ancora  $q = \kappa/2$ ;
- sul lato sud ( $y=0$ ), il flusso ha solo la seconda componente non nulla  $q_y'' = \kappa x$ ; l'intero lato viene attraversato da  $q = \kappa/2$ ;
- sul lato nord ( $y=1$ ), il flusso ha componenti  $q_x'' = \kappa$  e  $q_y'' = \kappa x$ , ma la prima è parallela al lato e non influenza la potenza termica che risulta ancora  $q = \kappa/2$ .

Tenendo conto che la diagonale è adiabatica, i precedenti risultati possono essere così letti: dal ovest ( $x=0$ ) entra una potenza termica  $q$  che attraversa la parte del solido al di sopra della diagonale e viene ceduta all'esterno lungo il lato nord ( $y=1$ ); in modo simmetrico, una potenza  $q$  entra nel solido dal lato sud ( $y=0$ ) e viene ceduta all'esterno lungo il lato est ( $x=1$ ).

Esempio 1.2 (Analisi di un altro campo termico). *Stesso problema se si considera il campo termico definito da:*

$$T(x, y, z) = 1 - x^2 y^2 \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1)$$

Si tratta ancora di un campo termico stazionario bidimensionale. Nel quadrato unitario del piano  $(x, y)$ , la temperatura è sempre positiva, tranne che nel punto  $x=y=1$  ove si annulla; sui lati ovest

( $x=0$ ) e sud ( $y=0$ ) essa vale 1; sul lato nord ( $y=1$ ) vale  $1-x^2$ , su quello est ( $x=1$ ) vale  $1-y^2$ . Il flusso termico ha componenti

$$q_x'' = 2\kappa xy^2, \quad q_y'' = 2\kappa x^2 y$$

Le curve isoterme sono caratterizzate dalla costanza di  $1-x^2y^2$  e quindi del prodotto  $xy$ ; sono pertanto identiche a quelle dell'esempio precedente, anche se si addensano più rapidamente verso l'angolo di nord-est. Anche le adiabatiche sono di conseguenza uguali a quelle del precedente esempio, ma non si può ritenere che tra esse fluisca una potenza termica costante: infatti esiste una sorgente interna non nulla

$$\varphi = 2\kappa(x^2 + y^2)$$

che origina complessivamente la potenza

$$q_{sor} = \int_V \varphi dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \varphi dx dy dz = 2\kappa \left[ \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 y^2 dy \right] = \frac{4\kappa}{3}$$

Per gli scambi termici si può osservare che sui lati ovest ( $x=0$ ) e sud ( $y=0$ ), il flusso ha componenti nulle; a maggior ragione è nulla la potenza termica ivi scambiata con l'esterno. Sul lato est ( $x=1$ ) esso ha componenti  $q_x'' = 2\kappa y^2$  e  $q_y'' = 2\kappa y$ , di cui solo la prima contribuisce alla potenza ceduta all'esterno

$$q = \int_0^1 q_x'' dy = 2\kappa \int_0^1 y^2 dy = 2\kappa/3.$$

Sul lato nord ( $y=1$ ), il flusso ha componenti  $q_x'' = 2\kappa x$  e  $q_y'' = 2\kappa x^2$ , di cui solo la seconda contribuisce alla potenza termica ceduta, che risulta ancora  $q = 2\kappa/3$ . Ovviamente la somma delle potenze cedute all'esterno ( $q_f = 2q$ ) è uguale alla produzione interna complessiva ( $q_{sor}$ ). Si noti che tutta (e sola) la potenza generata tra due adiabatiche è convogliata all'esterno, attraverso i lati nord o est, tra le stesse adiabatiche.

### Appendice: unicità della soluzione dell'equazione di Fourier.

Nel § 1.3 si è implicitamente assunto che la (1.10), e a maggior ragione la (1.11), con le condizioni là precisate, abbia una ed una sola soluzione; dal punto di vista fisico e ingegneristico è chiaro che ogni problema "ben posto" debba avere una ed una sola soluzione. Certamente non si avranno soluzioni se si cerca una soluzione stazionaria riscaldando un corpo una potenza termica assegnata (si contraddice così il primo principio della Termodinamica) o si avrà più di una soluzione se tra le condizioni per l'equazione di Fourier abbiamo dimenticato di precisare il valore di almeno una temperatura (l'equazione fornisce il salto di temperatura rispetto ad una di riferimento).

Peraltro quello dell'esistenza e dell'unicità della soluzione dell'equazione di Fourier, corredata dalle condizioni iniziali ed al contorno, è un problema importante e ben noto della fisica matematica; pur andando al di là degli intendimenti di questo corso, si deve tener presente che deve essere affrontato separatamente per ciascuna condizione al contorno. L'esistenza delle soluzioni è chiaramente assicurata dai metodi che verranno discussi in queste lezioni. Più delicata è la questione dell'unicità, che in questa nota verrà considerata per un problema monodimensionale  $T(x,t)$  definito su una lastra omogenea di spessore  $L$ , per la quale l'equazione di Fourier (1.11) si riduce a

$$(1.12) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi(x,t)}{\kappa} \quad (0 < x < L, \quad 0 < t < t_f)$$

con le condizioni al contorno di primo tipo e cioè  $T(0,t)$  e  $T(L,t)$  assegnate e con la condizione iniziale esprimibile assegnando anche  $T(x,0)$ . In altre parole, se si considera l'insieme di definizione  $G = [0 < x < L, \quad 0 < t < t_f]$ , la temperatura risulta assegnata su tre lati della frontiera, che nel seguito indichiamo con F.

Si procede dapprima ad enunciare il teorema del valore massimo (spesso chiamato, impropriamente, “principio” del valore massimo): *se  $u(x,t)$  è una funzione definita e continua in  $G+F$  e soddisfa l'equazione di Fourier omogenea, e cioè la (1.12) con  $\varphi=0$ , allora il suo massimo e il suo minimo giacciono su  $F$ .* Tale teorema ha anche una significativa interpretazione: in assenza di sorgenti interne, le temperature massima e minima si hanno agli estremi della lastra oppure al suo interno all'istante iniziale. Se poi la temperatura assegnata su tutto  $F$  è nulla, essa è nulla anche su tutto  $G$ . La dimostrazione può essere fatta per assurdo; nel caso del massimo, se il massimo di  $u(x,t)$  fosse in  $G$  (e cioè in un punto interno), in esso si avrebbe  $\partial u / \partial t = 0$  (in quanto massimo rispetto alla variabile  $t$ ) e solitamente  $\partial^2 u / \partial x^2 < 0$  (in quanto massimo rispetto alla variabile  $x$ ); pertanto il primo membro della (1.12) sarebbe negativo, contro l'ipotesi che sia soddisfatta l'equazione di Fourier omogenea. Ma questa non è una dimostrazione matematicamente valida, in quanto in qualche caso per un massimo si verifica  $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ . Esiste peraltro la possibilità di rendere la dimostrazione matematicamente rigorosa, introducendo una maggiorazione per  $u(x,t)$ ; tale raffinamento non viene qui riportato per brevità (non ci insegnerebbe nulla sulla trasmissione del calore) e si accetta il teorema del valore massimo.

Siamo ora in grado di enunciare il teorema di unicità: *se due funzioni  $T_1(x,t)$  e  $T_2(x,t)$  definite e continue in  $G+F$  verificano l'equazione (1.12) con le stesse condizioni al contorno ed iniziali, allora è*

$$T_1(x,t) = T_2(x,t)$$

Infatti, la differenza  $u=T_1-T_2$  verifica la (1.12) con  $\varphi=0$  e si annulla su  $F$ ; dal teorema del valore massimo segue che essa nulla in ogni punto di  $G+F$ ; il teorema è dunque dimostrato.

## 2. Soluzioni elementari dell'equazione di Fourier: caso stazionario in simmetria piana.

In questo capitolo vengono presi in considerazione alcuni semplici casi di conduzione stazionaria in simmetria piana, ben noti dalla Fisica Tecnica, soprattutto per focalizzare l'attenzione su due aspetti:

- la formulazione matematica del problema,
- l'uso dell'analogia elettrica come metodo di soluzione.

### 2.1 Generalità.

Si vogliono considerare soluzioni stazionarie e dipendenti da una sola coordinata cartesiana  $T(x)$ , per un solido omogeneo con proprietà costanti ( $\rho c$ ,  $\kappa$  ed eventualmente i coefficienti di scambio  $h$ ); affinché tali soluzioni esistano, non solo è necessario che il termine di sorgente sia indipendente dal tempo e dipenda spazialmente al più dalla sola  $x$ :  $\varphi(x)$ ; anche le condizioni al contorno (v. §1.3) devono essere indipendenti dal tempo e la geometria deve essere tale da garantire la dipendenza della temperatura dalla sola  $x$ . Quest'ultima condizione è soddisfatta se si assume per il solido la geometria di una lastra piana indefinita; indicando con  $L$  il suo spessore e con  $x$  la coordinata normale alle facce (fig. 2.1a), l'equazione di Fourier può essere formulata come

$$(2.1) \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\varphi(x)}{\kappa} \quad (0 < x < L)$$

(infatti il laplaciano si riduce alla derivata seconda rispetto ad  $x$ ). Poiché il problema è stazionario, non si deve imporre la condizione iniziale; per quanto riguarda le condizioni al contorno, esse vanno formulate sui due piani  $x=0$  e  $x=L$  che delimitano la lastra e le funzioni assegnate ( $g$ ,  $G$ ,  $T_{\text{fluido}}$ ) devono ridursi a delle costanti. L'integrale generale della (2.1) può essere facilmente determinato, effettuando per due volte consecutive l'integrale generale di entrambi i membri; si ha così

$$(2.1') \quad T(x) = C_1 + C_2 x - \frac{1}{\kappa} \int dx' \int \varphi(x'') dx''$$

Chiaramente, nella situazione qui considerata, le superfici isoterme sono dei piani paralleli alle facce della lastra; inoltre il gradiente di temperatura ha la giacitura dell'asse delle  $x$  e quindi tutte le superfici  $y = \text{costante}$  e quelle  $z = \text{costante}$  sono adiabatiche. In fig. 2.1a è riportata una rappresentazione bidimensionale ( $x, y$ ) della rete delle isoterme (linee continue) e adiabatiche (a tratto) per una lastra piana indefinita, secondo quanto indicato alla fine di §1.2. Ovviamente, per una lastra reale, di dimensioni trasversali finite, la soluzione ottenuta per la lastra indefinita rappresenta una ragionevole approssimazione, quando le sue dimensioni trasversali sono grandi rispetto allo spessore e si trascurino gli "effetti di bordo". La fig. 2.1b mostra che se si considera una lastra finita, con i bordi laterali coincidenti con una superficie adiabatica e perfettamente isolati, la rete delle isoterme-adiabatiche non è distorta (le linee isoterme, dovendo incidere normalmente sui tagli laterali orizzontali, restano delle rette). Pertanto l'assunzione  $T(x)$  è ancora valida e la soluzione ottenuta per la lastra indefinita è esatta anche per la geometria di fig. 1.1. Se peraltro i bordi laterali non coincidono con delle adiabatiche (come per il taglio superiore in fig 2.1c), oppure se non sono perfettamente isolati, la rete viene distorta ed il problema non è più monodimensionale. Nel seguito ci si riferisce ad una lastra finita, di area frontale  $A$ , delimitata da un mantello (costituito da una superficie qualsiasi ma parallela all'asse  $x$ ) adiabatico.

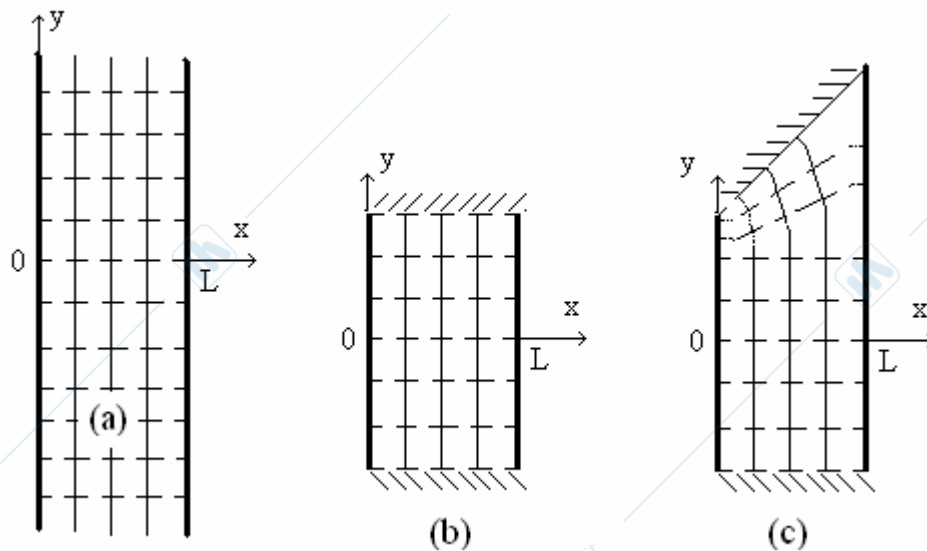


Fig. 2.1 – Rappresentazione  $(x,y)$  della rete delle isoterme (linee continue) e adiabatiche (a tratto) per una lastra piana indefinita (a), per una lastra finita con isolamento laterale che non ne distorce la rete (b) e per una con isolamento che la distorce (c).

## 2.2 Lastra senza sorgente con condizioni di primo tipo.

Si vuole determinare la distribuzione di temperatura nel caso di sorgente nulla ( $\varphi=0$ ) e con temperature assegnate ( $T_1$  e  $T_2$ , rispettivamente in  $x=0$  e  $x=L$ ) sulle due facce; si tratta di un problema assai semplice, in quanto dall'equazione di Fourier (2.1) segue subito che l'andamento di temperatura è lineare in  $x$ , con  $T_1$  e  $T_2$  agli estremi; si ha dunque

$$(2.2) \quad T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$$

Allo scopo di stabilire un approccio utile anche in casi meno banali, scriviamo la formulazione matematica del problema, costituita cioè dall'equazione di Fourier e dalle condizioni al contorno di primo tipo sulle due facce:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 & \text{per } 0 < x < L \\ T = T_1 & \text{per } x = 0 \\ T = T_2 & \text{per } x = L \end{cases}$$

Ovviamente l'integrale generale dell'equazione è data da

$$(2.4) \quad T(x) = C_1 + C_2 x$$

in cui  $C_1$  e  $C_2$  sono due costanti da determinare in base alle due condizioni al contorno; sostituendo pertanto questa espressione di  $T$  nella seconda e terza riga della (2.3) si ricava

$$C_1 = T_1 \quad C_2 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

riottenendo così la (2.2).

Si noti che la distribuzione di temperatura non dipende dalle caratteristiche termofisiche della lastra ( $\kappa$ ,  $\alpha$ ); ne dipende invece il flusso termico, che è parallelo all'asse  $x$  e indipendente dalla posizione

$$(2.5) \quad q_x'' = -\kappa \frac{dT}{dx} = \frac{\kappa}{L} (T_1 - T_2)$$

Se ci si riferisce al caso di una lastra, di dimensioni trasversali finite e ben isolata sul suo mantello, come nel caso della sbarretta della fig. 1.1, si potrà parlare di una potenza termica  $q = Aq_x''$  che la

attraversa, e si ritrova la (1.9) con  $K=\kappa$ . Se si introduce anche la nozione di *resistenza termica conduttiva* [K/W] della lastra

$$(2.6) \quad R = \frac{L}{\kappa A}$$

la potenza trasmessa potrà essere espressa come

$$(2.7) \quad q = \frac{\kappa A}{L}(T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

Questa relazione presenta una forte analogia con la legge di Ohm per i circuiti elettrici: chiaramente l'analogo di  $q$  è la corrente elettrica, l'analogo di  $R$  è la resistenza elettrica e quello del salto termico ( $T_1 - T_2$ ) è la tensione ai capi della resistenza stessa; si noti che anche l'espressione (2.6) della resistenza termica è perfettamente analoga a quella che esprime la resistenza elettrica di una lastra piana (seconda legge di Ohm), pur di sostituire a  $\kappa$  la conducibilità elettrica. La fig. 2.2a visualizza l'andamento di temperatura nella lastra e l'analogo elettrico della lastra.

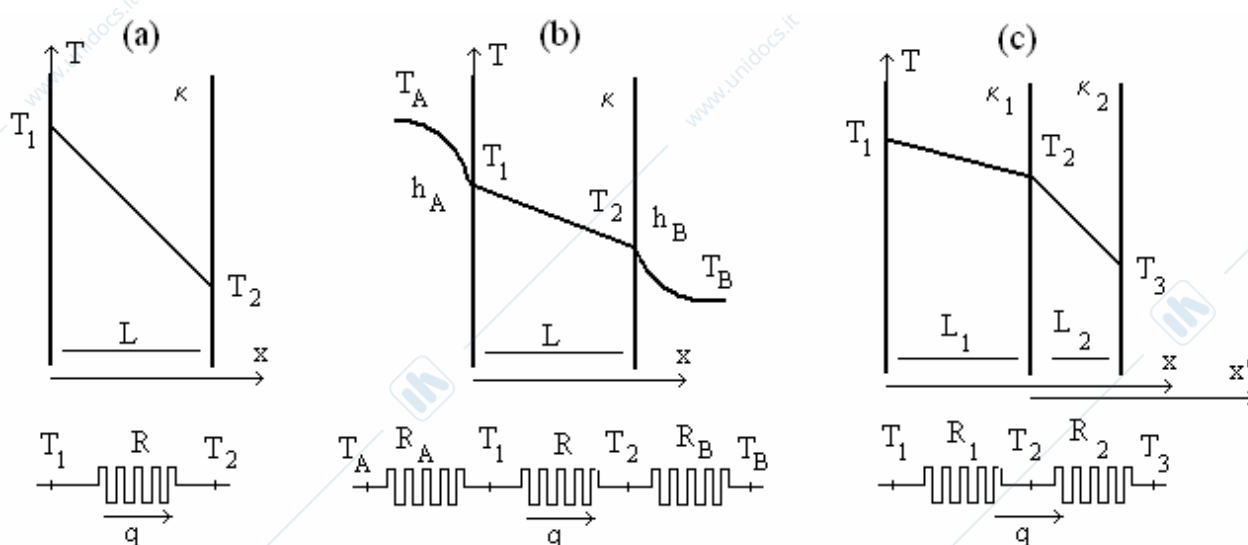


Fig. 2.2 – Profili di temperatura ed analogo elettrico per una lastra con temperature di faccia assegnate (a), con convezione (b) e a doppio strato (c).

### 2.3 Lastra con condizioni convettive.

Si vuole ora affrontare lo stesso problema con la condizione che sulla faccia in  $x=L$  si abbia uno scambio convettivo, di coefficiente  $h_B$  costante, con un fluido a temperatura costante  $T_B$ ; nella formulazione (2.3) del problema dobbiamo dunque sostituire all'ultima riga una condizione convettiva, che quantifichi il fatto che il flusso termico conduttivo che giunge in  $x=L$  sia uguale a quello scambiato per convezione col fluido e cioè

$$(2.8) \quad -\kappa \frac{dT}{dx} = h_B(T - T_B) \quad \text{per } x = L$$

Si potrebbe ancora sostituire l'integrale generale (2.4) nelle due condizioni al contorno, per determinare  $C_1$  e  $C_2$ ; è però più comodo sostituirvi la (2.2), che già soddisfa la condizione in  $x=0$  e determinare la costante (incognita)  $T_2$ , che è la temperatura della faccia in  $x=L$ . Si ottiene così

$$(2.9) \quad -\kappa \frac{T_2 - T_1}{L} = h_B(T_2 - T_B)$$

da cui si trae

$$(2.10) \quad T_2 = \frac{\kappa T_1 + h_B L T_B}{\kappa + h_B L} = \frac{R_B T_1 + R T_B}{R_B + R}$$

in cui, oltre alla resistenza conduttiva  $R$  della lastra, definita in (2.6), si è introdotta la *resistenza termica convettiva*

$$(2.11) \quad R_B = \frac{1}{h_B A}$$

La potenza termica trasmessa attraverso l'intera lastra risulta

$$(2.12) \quad q = \frac{\kappa A}{L} (T_1 - T_2) = \frac{\kappa h_B A}{\kappa + h_B L} (T_1 - T_B) = \frac{T_1 - T_B}{R + R_B}$$

Le (2.10) e (2.12) hanno una semplice interpretazione in termini di analogia elettrica; le due resistenze  $R$  e  $R_B$  appaiono in serie; esse sono attraversate da una stessa potenza  $q$  (analogo della corrente), hanno il punto di contatto ad una stessa temperatura  $T_2$  (analogo della tensione di giunzione), mentre gli altri due estremi si trovano alle temperature imposte  $T_1$  e  $T_B$ .

L'estensione al caso di una parete (lastra con convezione sulle due facce) lambita da due fluidi con temperature  $T_A$  e  $T_B$  con coefficienti di scambio costanti  $h_A$  e  $h_B$  è del tutto immediata; l'andamento della temperatura all'interno della lastra sarà ancora del tipo (2.2) con le temperature ( $T_1$  e  $T_2$ ) agli estremi da determinare in base alle condizioni al contorno e cioè in base alla

$$(2.8') \quad h_A (T_A - T) = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad \text{per } x = 0$$

ed alla (2.8). Se, in stretta analogia alla (2.11), si introduce la resistenza convettiva

$$(2.11') \quad R_A = \frac{1}{h_A A}$$

anche per la convezione sulla prima faccia, le tre resistenze termiche  $R_A$ ,  $R$  e  $R_B$  appaiono in serie, in quanto attraversate da una stessa potenza termica  $q$  (come è assicurato dal bilancio energetico) e con l'estremo dell'una alla stessa temperatura dell'altra. Ne segue pertanto che la potenza è

$$(2.12') \quad q = \frac{T_A - T_B}{R_A + R + R_B}$$

mentre le temperature intermedie risultano (dalla legge di Ohm per il circuito equivalente)

$$(2.10') \quad T_1 = T_A - qR_A = \frac{(R + R_B)T_A + R_A T_B}{R_A + R + R_B} \quad T_2 = T_B + qR_B = \frac{R_B T_A + (R_A + R)T_B}{R_A + R + R_B}$$

La fig. 2.2b visualizza l'andamento di temperatura nella lastra, mentre è qualitativamente accennato il profilo di temperatura (dovuto alla convezione) nei fluidi circostanti; è inoltre riportato l'analogo elettrico del problema.

## 2.4 Lastra a doppio strato.

Si considera il caso di una lastra formata da due strati (di spessori  $L_1$  e  $L_2$  con conduttività  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , rispettivamente) in buon contatto termico tra loro; sono note le temperature  $T_1$  e  $T_3$  sulle facce estreme. Il problema è assai semplice; i due strati hanno la temperatura  $T_2$  di contatto a comune, peraltro incognita; le equazioni di Fourier per i due strati assicurano che gli andamenti di temperatura al loro interno variano linearmente da  $T_1$  a  $T_2$  e da  $T_2$  a  $T_3$ ; il bilancio energetico alla superficie di contatto, assicura che le potenze termiche trasmesse attraverso i due strati

$$q_1 = \frac{A\kappa_1}{L_1} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_1} \quad , \quad q_2 = \frac{A\kappa_2}{L_2} (T_2 - T_3) = \frac{T_2 - T_3}{R_2}$$

sono uguali tra loro

$$(2.13) \quad q_1 = q_2 = q$$

Si sono introdotte le resistenze termiche conduttive  $R_1$  e  $R_2$  dei due strati in base alla (2.6), e cioè:

$$(2.14) \quad R_j = \frac{L_j}{\kappa_j A}$$

L'uguaglianza delle potenze permette la determinazione della temperatura di contatto

$$(2.15) \quad T_2 = \frac{L_2 \kappa_1 T_1 + L_1 \kappa_2 T_3}{L_2 \kappa_1 + L_1 \kappa_2} = \frac{R_2 T_1 + R_1 T_3}{R_1 + R_2}$$

mentre la potenza trasmessa può essere scritta come

$$(2.16) \quad q = \frac{A \kappa_1 \kappa_2}{L_2 \kappa_1 + L_1 \kappa_2} (T_1 - T_3) = \frac{T_1 - T_3}{R_1 + R_2}$$

Esse mostrano chiaramente che il problema qui affrontato ha come analogo elettrico le due resistenze poste in serie, come del resto poteva essere ottenuto direttamente ragionando come in §2.3. L'andamento di temperatura e l'analogo elettrico della lastra sono mostrati in fig. 2.2c; in particolare si noti che la temperatura è continua sulla superficie di contatto, ma la continuità del flusso termico implica che sia discontinua la derivata; inoltre la pendenza del decremento di temperatura nei due strati dipende dalla rispettiva conduttività termica (è minore quando  $\kappa$  è più elevato; nella figura si è supposto che  $\kappa_1 > \kappa_2$ ).

Anche in questo caso diamo la formulazione analitica del problema; poiché la lastra nel suo complesso non è omogenea, bensì è formata da due strati omogenei, si dovranno scrivere due distinte equazioni di Fourier (una per ciascun strato) e raccordarne le soluzioni mediante una condizione di quarto tipo (imponendo che la superficie di contatto sia caratterizzata da una stessa temperatura e attraversata da uno stesso flusso termico). Per comodità introduciamo anche la nuova coordinata  $x' = x - L_1$  e spezziamo la temperatura della lastra in due parti

$$(2.17) \quad T(x) = \begin{cases} T^{(1)}(x) & \text{per } 0 < x < L_1 \\ T^{(2)}(x') & \text{per } 0 < x' < L_2 \end{cases}$$

Il problema può essere così formulato

$$(2.18) \quad \begin{cases} \frac{d^2 T^{(1)}}{dx^2} = 0 & \text{per } 0 < x < L_1 \\ T^{(1)} = T_1 & \text{per } x = 0 \\ T^{(1)} = T^{(2)} & \text{e } -\kappa_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} = -\kappa_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} & \text{per } x = L_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{d^2 T^{(2)}}{dx'^2} = 0 & \text{per } 0 < x' < L_2 \\ T^{(2)} = T_3 & \text{per } x' = L_2 \\ \text{ovvero } x' = 0 \end{cases}$$

Per la sua soluzione si devono scrivere gli integrali generali delle due equazioni di Fourier; come in §2.3, conviene scrivere questi nella forma

$$T^{(1)}(x) = T_1^{(1)} + \frac{x}{L_1} (T_2^{(1)} - T_1^{(1)}) \quad , \quad T^{(2)}(x') = T_2^{(2)} + \frac{x'}{L_2} (T_3^{(2)} - T_2^{(2)})$$

in cui le 4 costanti da determinare sono  $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_2^{(2)}, T_3^{(2)}$ ; è però chiaro che le prime tre condizioni al contorno implicano

$$T_1^{(1)} = T_1 \quad , \quad T_3^{(2)} = T_3 \quad , \quad T_2^{(1)} = T_2^{(2)}$$

per cui si possono omettere gli apici delle costanti e riscrivere gli andamenti di temperatura come

$$T^{(1)}(x) = T_1 + \frac{x}{L_1} (T_2 - T_1) \quad , \quad T^{(2)}(x') = T_2 + \frac{x'}{L_2} (T_3 - T_2)$$

Resta da determinare la costante  $T_2$  (la temperatura di contatto) e questo può essere ottenuto sostituendo queste espressioni nell'ultima condizione al contorno; si ha

$$-\frac{\kappa_1}{L_1} (T_2 - T_1) = -\frac{\kappa_2}{L_2} (T_3 - T_2)$$

del tutto equivalente alla (2.13); si ottengono dunque i risultati sopra trovati.

## 2.5 Parete multistrato e circuito elettrico equivalente.

I risultati dei precedenti paragrafi possono essere facilmente generalizzati al caso di una parete formata da  $n$  strati omogenei e lambita alle sue estremità da due fluidi a temperature  $T_A$  e  $T_B$  con i quali ha scambi convettivi. Le notazioni usate sono indicate in fig. 2.3, insieme all'andamento qualitativo del profilo di temperatura nella parete, che è costituito da una spezzata, con pendenze maggiori dove la conduttività è minore; ai lati sono accennati i salti termici convettivi.

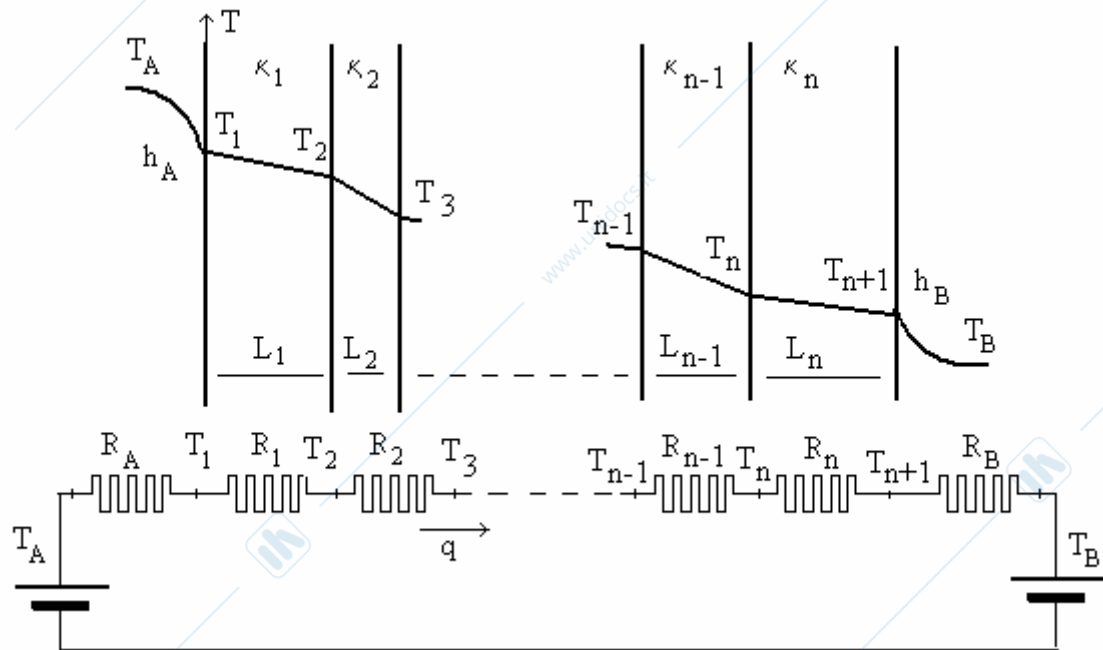


Fig. 2.3 – Andamento termico qualitativo e circuito elettrico equivalente per una parete multistrato con condizioni convettive.

Le resistenze conduttive (2.14) degli strati risultano ordinatamente disposte in serie, quelle convettive (2.11) e (2.11') sono in serie alle due estremità; il circuito elettrico equivalente, riportato in figura, mostra che le temperature di interfaccia sono le analoghe delle tensioni alle giunzioni delle resistenze; per indicare che  $T_A$  e  $T_B$  sono temperature imposte al problema (attraverso le condizioni al contorno) si sono inseriti due generatori di tensione nel circuito.

In pratica, si dovrà dapprima calcolare la potenza termica  $q$ , che attraversa la parete, in base alla

$$(2.19) \quad q = \frac{T_A - T_B}{R_A + \sum_{j=1}^n R_j + R_B}$$

e calcolare poi le temperature  $T_j$  in base alle leggi del circuito, ovvero

$$(2.20) \quad T_j = \frac{T_A \left( \sum_{s=j}^n R_s + R_B \right) + T_B \left( R_A + \sum_{s=1}^{j-1} R_s \right)}{R_A + \sum_{s=1}^n R_s + R_B} \quad (j = 1, 2, \dots, n+1);$$

le due quantità in parentesi a numeratore rappresentano, rispettivamente, le resistenze della serie che “segue” la superficie di temperatura  $T_j$  e della serie che la “precede”; a denominatore compare invece l'intera resistenza serie. Note le temperature delle superfici, l'andamento di temperatura nell' $j$ -simo strato risulta

$$(2.21) \quad T(x') = T_j + \frac{x'}{L_j} (T_{j+1} - T_j) \quad (0 < x' < L_j)$$

in cui la coordinata  $x'$  è misurata a partire dall'inizio dello strato considerato.

Si è supposto che gli strati fossero in buon contatto termico tra loro, e cioè che le due superfici all'interfaccia combaciassero perfettamente tra loro, così da avere la temperatura a comune. In realtà, il contatto avviene in modo discontinuo, a seconda della rugosità delle superfici solide: in alcune zone i due solidi si toccano direttamente, mentre in altre lasciano delle cavità che possono contenere un fluido (spesso aria). Ciò fa sì che quando un flusso termico attraversa l'interfaccia si origini (mediamente) una caduta di temperatura tra i due strati, modellabile mediante una resistenza termica aggiuntiva (*resistenza di contatto*) da inserire tra i due strati considerati. Peraltro non è facile prevedere l'entità della resistenza di contatto; essa dipende da molti fattori, quali la natura dei solidi a contatto, la loro rugosità, la pressione di contatto, i fluidi presenti ecc... In altre parole, in un contatto reale resta continuo il flusso termico, ma non la temperatura all'interfaccia.

## 2.6 Sorgente termica superficiale.

Il termine di sorgente  $\varphi$  può descrivere effetti dissipativi, in particolare l'assorbimento di radiazione e la produzione di calore per effetto Joule; tali effetti sono essenzialmente di tipo volumetrico, ma in qualche caso possono essere trattati approssimativamente come effetti superficiali. A titolo di esempio si consideri l'assorbimento della luce solare da parte di una parete opaca. In I. §1 si è indicato come l'assorbimento ha luogo in spessori così piccoli da poter essere ritenuto un fenomeno superficiale; si potrà pertanto parlare di una generazione di potenza termica  $w''$  per unità di superficie (pari al prodotto dell'irradianza per l'assorptività della faccia:  $w'' = aG$ ). In modo analogo, se su una lastra ceramica (buon isolante elettrico) viene depositato un sottile strato metallico ed in questo viene poi fatta passare una corrente elettrica, si avrà una produzione di potenza  $w$  per effetto Joule pari al prodotto della corrente per la differenza di potenziale applicata; dividendo  $w$  per l'area frontale  $A$  della lastra si ottiene la potenza  $w''$  generata per unità di superficie. Dato il piccolo spessore della deposizione, anche in questo caso possiamo dimenticarci di questo e schematizzare la situazione come un fenomeno di produzione superficiale sulla superficie della lastra.

Può dunque avere un qualche interesse considerare gli effetti di una produzione di potenza termica  $w''$  superficiale [ $\text{Wm}^{-2}$ ] localizzata all'interfaccia tra due strati solidi o tra un strato e un fluido; mentre appare ragionevole assumere uguali le temperature ai lati dell'interfaccia, il bilancio energetico assicura una discontinuità del flusso termico pari a  $w''$ ; se essa è localizzata in  $x=0$ , risulta:

$$(2.22) \quad (q_x'')_{x=0-} + w'' = (q_x'')_{x=0+}$$

Si ha, in qualche modo, il comportamento opposto a quello di una resistenza di contatto (in cui era continuo il flusso, non la temperatura).

Più precisamente, se entrambi i lati della parete (o della lastra ceramica) sono lambiti da due fluidi e la generazione di potenza è localizzata in  $x=0$ , il problema potrà essere formulato come

$$(2.23) \quad \begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 & \text{per } 0 < x < L \\ h_A (T_A - T) + w'' = -\kappa \frac{dT}{dx} & \text{per } x = 0 \\ -\kappa \frac{dT}{dx} = h_B (T - T_B) & \text{per } x = L \end{cases}$$

E' facile notare che se si introduce una *temperatura fittizia*

$$(2.24) \quad T_A^* = T_A + \frac{w''}{h_A}$$

la condizione al contorno in  $x=0$  può essere riscritta nella forma:

$$(2.25) \quad h_A(T_A^* - T) = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad \text{per } x=0$$

La soluzione è dunque quella fornita dalle (2.10') pur di sostituire  $T_A$  con  $T_A^*$ ; anche la potenza che attraversa la lastra è data dalla (2.12') con la stessa sostituzione. Si noti peraltro che la temperatura fittizia non ha alcun significato fisico diretto: essa è qui introdotta come un utile artificio di calcolo. L'andamento di temperatura è indicato in fig. 2.4a nel caso  $T_A = T_B$ .

E' interessante discutere l'analogia elettrica per il precedente problema; con riferimento alla fig. 2.2b, è chiaro che si possono ancora introdurre le tre resistenze  $R_A$ ,  $R$ ,  $R_B$  e che  $R$  e  $R_B$  sono attraversate da una stessa potenza  $q$  e quindi sono in serie; peraltro la (2.22) moltiplicata per  $A$  mostra che la potenza  $q^*$  che fluisce in  $R_A$  (che è scambiata per convezione in  $x=0$ ) differisce da  $q$  per l'intera potenza generata  $w = w''A$ :

$$(2.26) \quad q^* = q + w$$

Nel circuito equivalente, alla giunzione (nodo) tra le resistenze  $R_A$  e  $R$  (alla stessa temperatura  $T_1$ ) deve giungere una corrente imposta pari a  $w$ ; questo può essere modellato introducendo un generatore ideale di corrente, che eroga  $w$ . Introducendo tale elemento si ottiene il circuito equivalente di fig. 2.4b. Si può modificare tale circuito, sostituendo alla maglia a sinistra il suo equivalente di Thevenin; la forza elettromotrice equivalente risulta  $T_A + wR_A$ , e cioè proprio la temperatura fittizia introdotta in (2.24), mentre la resistenza equivalente resta  $R_A$ ; tale circuito è mostrato in fig. 2.4c. Più in generale, se una sorgente superficiale è localizzata su una delle superfici di una parete multistrato, il circuito equivalente di fig. 2.3 deve essere modificato inserendo un generatore ideale di corrente  $w$  nel nodo corrispondente.

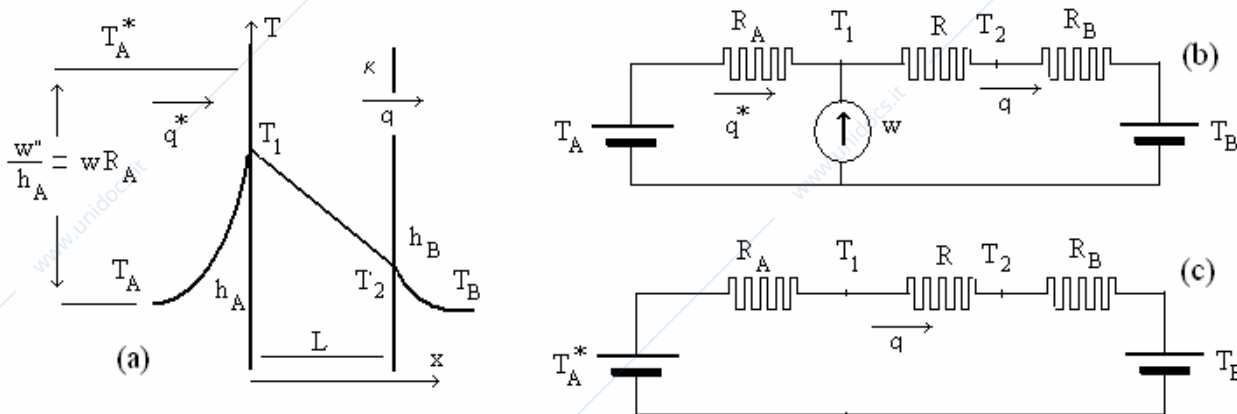


Fig. 2.4 – Profilo di temperatura per la lastra irraggiata (a), analogo elettrico (b) e suo equivalente di Thevenin (c).

## 2.7 Lastra con sorgente termica uniforme.

Il problema più semplice di sorgente distribuita in una lastra è quello di una sorgente uniforme (indipendente da  $x$ )

$$(2.27) \quad \varphi(x) = \varphi_0$$

E' questo un caso rilevante anche in pratica: se si pensa che una lastra omogenea sia attraversata da una corrente elettrica, la densità di corrente è uniforme e, di conseguenza, è uniforme la produzione di potenza termica per effetto Joule; chiaramente la potenza totale dissipata è  $w = AL\varphi_0$ .

Se si assoggetta la lastra a condizioni al contorno di primo tipo, il problema risulta

$$(2.28) \quad \begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\varphi_0}{\kappa} & \text{per } 0 < x < L \\ T = T_1 & \text{per } x = 0 \\ T = T_2 & \text{per } x = L \end{cases}$$

Si determina l'integrale generale dell'equazione di Fourier integrando due volte la prima riga, membro a membro:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\varphi_0 x}{\kappa} + C_2, \quad T = -\frac{\varphi_0 x^2}{2\kappa} + C_2 x + C_1$$

Sostituendo poi l'espressione di  $T$  nelle due condizioni al contorno si ricavano le costanti

$$C_1 = T_1, \quad C_2 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\varphi_0 L}{2\kappa}$$

In definitiva il profilo termico nella lastra è dato da

$$(2.29) \quad T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \frac{\varphi_0}{2\kappa} x(L - x)$$

L'andamento del profilo termico è indicato in fig. 2.5a, per alcuni valori di  $\varphi_0$ . Ovviamente per  $\varphi_0=0$  la sorgente è spenta e si ritrova l'andamento lineare (2.2). Quando si accende la sorgente ( $\varphi_0>0$ ) il profilo diviene una parabola con la concavità rivolta verso il basso; per bassi valori di  $\varphi_0$  la parabola si scosta poco dall'andamento lineare e non ha massimo all'interno della lastra; al crescere di  $\varphi_0$  si presenta un massimo il cui valore cresce con  $\varphi_0$  e la cui posizione si sposta dalla faccia più calda verso il centro della lastra.

La (2.29) risulta la somma della soluzione (2.2) relativa al problema (2.3) con sorgente spenta e del termine

$$(2.30) \quad T_{00}(x) = \frac{\varphi_0}{2\kappa} x(L - x)$$

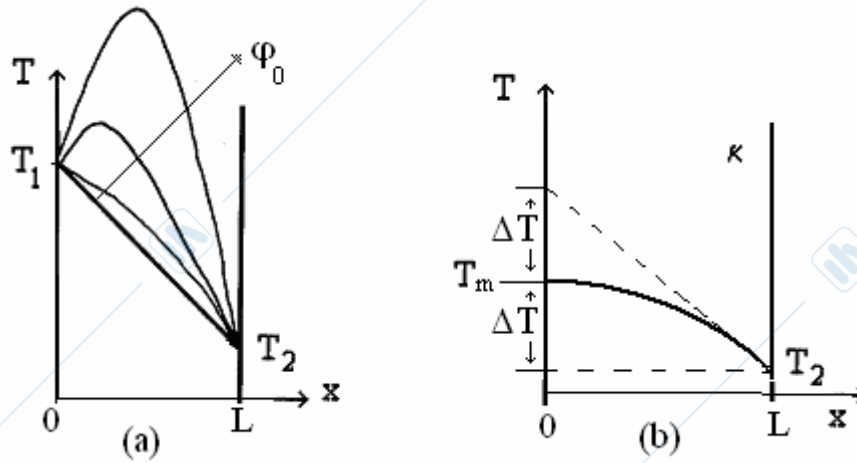
che chiaramente rappresenta la soluzione di una lastra con sorgente  $\varphi_0$  e con le temperature sulle facce pari a 0; per la linearità del problema, ciò poteva essere previsto a priori. Tale spezzamento del problema in due problemi più semplici (*metodo di splitting*, cfr. §2.9) verrà spesso usato in casi più complessi. Si noti che il profilo (2.30) è una parabola con l'asse coincidente con la mezzeria della lastra e con il suo massimo pari a  $\varphi_0 L^2 / (8\kappa)$ .

Per quanto riguarda il flusso termico nella lastra si ha

$$(2.31) \quad q_x'' = -\kappa \frac{dT}{dx} = \frac{\kappa}{L} (T_1 - T_2) + \left( x - \frac{L}{2} \right) \varphi_0$$

ed è anch'esso la sovrapposizione del flusso trasmesso dalla lastra a sorgente spenta e di quello dovuto alla soluzione (2.30). Esso varia dunque (linearmente) entro la lastra e pertanto non si può parlare di un unico flusso o di un'unica potenza termica che attraversa la lastra: non è possibile modellare con una semplice resistenza il comportamento di una lastra con sorgente distribuita!

Si noti anche che, là dove la temperatura è massima, il flusso è nullo: ne segue che la superficie parallela alle facce ove si realizza tale massimo è una superficie adiabatica.

Fig. 2.5 – Lastra con sorgente uniforme: profili termici per temperature assegnate (a), adiabatica in  $x=0$  (b).

Si considera ora lo stesso problema, ma con la prima faccia isolata (condizione di secondo tipo in  $x=0$ ), ovvero

$$(2.32) \quad \begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\varphi_0}{\kappa} & \text{per } 0 < x < L \\ \frac{dT}{dx} = 0 & \text{per } x = 0 \\ T = T_2 & \text{per } x = L \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione di Fourier non varia, ma i nuovi valori delle costanti sono ora:

$$C_1 = T_2 + \frac{\varphi_0 L^2}{2\kappa} \quad C_2 = 0$$

Il profilo termico è dunque (fig. 2.5b)

$$(2.33) \quad T(x) = T_2 + \frac{\varphi_0}{2\kappa} (L^2 - x^2)$$

mentre per il flusso termico si trae

$$(2.34) \quad q_x'' = \varphi_0 x$$

Pertanto la temperatura ha il suo massimo

$$(2.35) \quad T_m = T_2 + \Delta T \quad \text{con} \quad \Delta T = \frac{\varphi_0 L^2}{2\kappa} = \frac{1}{2} wR$$

sulla superficie frontale  $x=0$  (adiabatica) e decresce con andamento parabolico procedendo verso l'altra faccia; nell'ultima espressione si è introdotta l'intera potenza  $w = AL\varphi_0$  prodotta nella lastra e la sua resistenza termica definita in (2.6). Il flusso e la corrispondente potenza termica, invece, crescono linearmente fino a raggiungere il loro valore massimo in  $x=L$ :

$$(2.36) \quad q_+'' = \varphi_0 L = w/A \quad \text{e} \quad q_+ = w$$

L'ultima espressione esprime il fatto che l'intera potenza prodotta esce dalla faccia in  $x=L$ , come è assicurato dal bilancio energetico, dato che la faccia  $x=0$  è adiabatica; inoltre la (2.35) mostra che il salto termico  $\Delta T$  tra le due lastre è la metà di quello che si avrebbe se la lastra fosse attraversata (senza sorgente interna) da una potenza uguale a  $q_+ = w$  (v. segmento tratteggiato in fig. 2.5b).

Le precedenti osservazioni permettono di stabilire le seguenti regole, utili tutte le volte che c'è un massimo di temperatura interno alla lastra. Si scomponga l'intera lastra (fig. 2.6a) in due porzioni di spessore  $\delta_-$  e  $\delta_+$ , con  $\delta_- + \delta_+ = L$ ; poiché sono divise da una superficie adiabatica non interferiscono

tra loro e per ciascuna di esse si possono applicare i risultati del problema (2.32). Se si indica con  $w$  la potenza prodotta dalla sorgente nell'intera lastra, essa risulta certamente la somma delle potenze prodotte separatamente nelle due porzioni ( $w_-, w_+$ ) e cioè

$$w = w_- + w_+ \quad \text{con} \quad w_{\pm} = \frac{\delta_{\pm}}{L} w$$

Il bilancio energetico assicura che le potenze termiche  $q_{\pm}$  uscenti dalle due estremità della lastra sono uguali alla produzione  $w_{\pm}$  della sorgente nelle due porzioni; la precedente relazione diviene dunque:

$$(2.37) \quad w = q_- + q_+ \quad \text{con} \quad q_{\pm} = \frac{\delta_{\pm}}{L} w$$

Inoltre, per determinare i salti tra la temperatura massima  $T_m$  all'interno della lastra e le temperature delle facce, possiamo applicare la (2.35) a ciascuna delle due porzioni; più precisamente, se si indicano con

$$R_{\pm} = \frac{\delta_{\pm}}{\kappa A}$$

le resistenze termiche di ciascuna delle due porzioni e con  $T_{\pm}$  le temperature delle facce, i salti termici tra la superficie più calda e la periferia risultano:

$$(2.38) \quad \Delta T_{\pm} = T_m - T_{\pm} = \frac{1}{2} R_{\pm} q_{\pm}$$

Queste regole possono essere di aiuto per la soluzione di problemi semplici implicanti lastre con sorgente uniforme (non valgono se la sorgente non è uniforme); inoltre permettono di introdurre un analogo elettrico per la lastra con sorgente uniforme. Infatti la (2.37) può essere letta come la relazione al nodo interno di temperatura  $T_m$  in cui sia immessa la "corrente"  $w$  da un generatore ideale di corrente; le (2.38) indicano che tra tale nodo e le temperature delle facce sono inserite due resistenze pari a  $R_{\pm}/2$ ; il circuito equivalente è mostrato in fig. 2.6b. Si noti peraltro che la scomposizione di  $R$  in  $R_-$  e  $R_+$ , dipende dalle condizioni al contorno e che, di solito,  $R_{\pm}$  non sono note a priori; l'impiego di tale analogia è illustrato in §2.10.

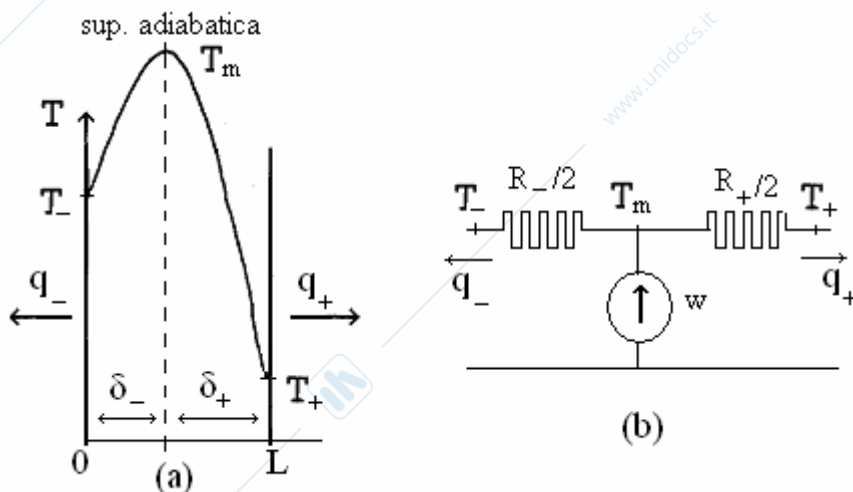


Fig. 2.6 – Lastra con sorgente uniforme: nomenclatura (a) e circuito equivalente (b).

## 2.8 Lastra con sorgente di tipo esponenziale negativo.

Si consideri una radiazione (ad esempio quella solare) che si propaga nella direzione  $x$  di un mezzo parzialmente trasparente (ad esempio un vetro "grigio"); poiché questo assorbe, l'intensità (v. I. §2)

totale  $I(x)$ , che giunge in  $x$ , diminuisce al crescere di  $x$ ; sembra lecito assumere che in uno strato di spessore  $dx$  la sua diminuzione  $-dI$  sia proporzionale al valore di  $I$  e allo spessore  $dx$  attraverso una caratteristica  $\chi$  (coefficiente di assorbimento) del mezzo, che per semplicità assumiamo indipendente dalla lunghezza d'onda (a tale scopo si è indicato il vetro come grigio e non semplicemente colorato). Si ha dunque

$$dI = -\chi I dx$$

Se il mezzo è costituito da una lastra, con le facce trattate in modo antiriflettente, l'intensità subito all'interno della lastra coincide con l'irradianza incidente  $G$ ; integrando la precedente relazione si ottiene dunque la seguente legge di propagazione

$$I = G \exp(-\chi x)$$

mentre la potenza assorbita per unità di volume dal mezzo risulta

$$(2.39) \quad \varphi = -\frac{dI}{dx} = \chi G \exp(-\chi x)$$

e, dal punto di vista termico, si comporta come una sorgente termica distribuita. Si noti che dalla seconda faccia della lastra emerge l'intensità  $G \exp(-\chi L)$ , per cui la potenza assorbita per unità di superficie dell'intera lastra è

$$(2.40) \quad w'' = G[1 - \exp(-\chi L)]$$

Il modello di assorbimento di radiazione qui introdotto risulta utile, almeno come prima approssimazione, in molti casi di interesse pratico.

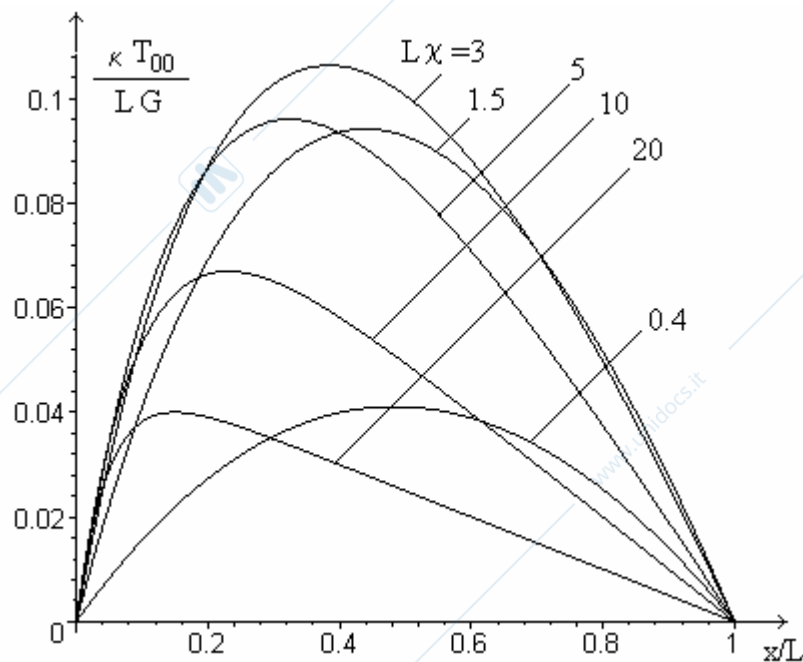


Fig. 2.7 - Lastra con sorgente esponenziale: profili di temperatura per  $\chi L = 0,4 - 1,5 - 3 - 5 - 10 - 20$ .

Si vuole risolvere il problema dell'andamento termico  $T_{00}(x)$  nella lastra assumendo come condizioni al contorno  $T_{00}=0$  su entrambe le facce; ovviamente, la soluzione con condizioni di primo tipo generiche, potrà essere ottenuta sommando a questa il profilo (2.2), come in § 2.7. La formalizzazione del problema è dunque

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 T_{00}}{dx^2} = -\frac{\chi G}{\kappa} \exp(-\chi x) & \text{per } 0 < x < L \\ T_{00} = 0 & \text{per } x = 0 \\ T_{00} = 0 & \text{per } x = L \end{array} \right.$$

mentre la sua soluzione risulta:

$$(2.42) \quad T_{00}(x) = \frac{G}{\kappa\chi} \left\{ 1 - \exp(-\chi x) - \frac{x}{L} [1 - \exp(-\chi L)] \right\}$$

E' facile intuire il comportamento termico, nei casi estremi di basso ed alto assorbimento. Per piccoli  $\chi L$  (per basso assorbimento), l'andamento di  $\varphi(x)$  è quasi costante, ma  $w''$  è piccolo: si avranno quindi dei profili di temperatura quasi parabolici (come in § 2.7), con massimo al centro, ma non troppo elevati. Invece, per alti valori di  $\chi L$  (per alto assorbimento), quasi tutta l'irradianza  $G$  viene convertita in potenza termica per unità di superficie nei primi strati, mentre nel resto della lastra non si ha produzione; ci si attende pertanto una brusca salita della temperatura all'inizio ed un decadimento quasi lineare dopo; peraltro l'incremento termico frontale non potrà essere molto elevato, dato che la posizione del massimo è vicina alla condizione di temperatura nulla imposta per la faccia e si ha quindi un efficace raffreddamento per conduzione. E' pertanto prevedibile che i maggiori effetti di riscaldamento della lastra si abbiano per valori di  $\chi L$  intermedi. Tutto ciò è confermato dagli andamenti di fig. 2.7 in cui è riportata la temperatura (normalizzata) all'interno della lastra in funzione della posizione (normalizzata), per alcuni valori del gruppo dimensionale  $\chi L$ ; in particolare è evidente che il maggior riscaldamento si ha per  $\chi L \approx 3$ .

## 2.9 Aspetti formali.

In questo paragrafo si riassumono gli aspetti matematici del problema della determinazione della temperatura in una lastra omogenea in condizioni stazionarie; la formalizzazione del problema è data dall'equazione di Fourier monodimensionale, con le appropriate condizioni al contorno e può pertanto essere così riassunta

$$(2.43) \quad \begin{cases} \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\varphi(x)}{\kappa} & \text{per } 0 < x < L \\ -k_1 \frac{dT}{dx} + h_1 T = f_1 & \text{per } x = 0 \\ k_2 \frac{dT}{dx} + h_2 T = f_2 & \text{per } x = L \end{cases}$$

In particolare per  $x=0$  si ritrova:

- la condizione di primo tipo se si pone :  $k_1 = 0, \quad h_1 = 1, \quad f_1 = T_1$  ;
- la condizione di secondo tipo se si pone :  $k_1 = \kappa, \quad h_1 = 0, \quad f_1 = q_1''$  ;
- la condizione convettiva se si pone:  $k_1 = \kappa, \quad h_1 = h_A, \quad f_1 = h_A T_A$  ;

Analogamente, per  $x=L$  si ritrova:

- la condizione di primo tipo se si pone :  $k_2 = 0, \quad h_2 = 1, \quad f_2 = T_2$  ;
- la condizione di secondo tipo se si pone :  $k_2 = \kappa, \quad h_2 = 0, \quad f_2 = q_2''$  ;
- la condizione convettiva se si pone:  $k_2 = \kappa, \quad h_2 = h_B, \quad f_2 = h_B T_B$  .

Ovviamente con  $\kappa$  si è indicata la conduttività termica della lastra, con  $h_A$  e  $h_B$  i coefficienti di convezione sulle due facce; tali costanti devono essere considerate dei dati che caratterizzano la struttura fisica della lastra. Per la soluzione del problema è necessaria anche la conoscenza:

- della funzione  $\varphi(x)$  che precisa la sorgente termica interna alla lastra,
- delle costanti  $f_1$  e  $f_2$  che invece ne precisano l'interazione con l'esterno.

Qualora tutte e tre queste quantità siano nulle *il problema è omogeneo*; si ricorda che un problema è detto omogeneo se, essendo  $T(x)$  una sua soluzione, allora  $C \cdot T(x)$  è una soluzione (con  $C$  costante arbitraria). Il precedente problema omogeneo ammette come soluzione solo quella nulla  $T(x)=0$ ; in termini banali, una lastra senza sorgente, con temperature nulle imposte sulle facce (o sui fluidi che le lambiscono) ha temperatura identicamente nulla.

Ovviamente, ciascuna delle tre quantità ( $\varphi$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ ) sono *fonti* di non omogeneità del problema e contribuiscono (in maniera additiva) al discostarsi della soluzione  $T(x)$  da quella nulla. Più precisamente, la linearità del problema assicura che la soluzione può essere scritta come la somma di tre termini

$$(2.44) \quad T(x) = T^{(1)}(x) + T^{(2)}(x) + T^{(3)}(x)$$

ciascuno dei quali sia la soluzione di un problema che contenga una sola fonte di non omogeneità:

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T^{(1)}}{dx^2} = 0 \\ -k_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} + h_1 T^{(1)} = f_1 \\ k_2 \frac{dT^{(1)}}{dx} + h_2 T^{(1)} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T^{(2)}}{dx^2} = 0 \\ -k_1 \frac{dT^{(2)}}{dx} + h_1 T^{(2)} = 0 \\ k_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} + h_2 T^{(2)} = f_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 T^{(3)}}{dx^2} = -\frac{\varphi(x)}{\kappa} \\ -k_1 \frac{dT^{(3)}}{dx} + h_1 T^{(3)} = 0 \\ k_2 \frac{dT^{(3)}}{dx} + h_2 T^{(3)} = 0 \end{array} \right. , \quad \left( \begin{array}{l} \text{per } 0 < x < L \\ \text{per } x = 0 \\ \text{per } x = L \end{array} \right)$$

Se infatti si sostituisce la (2.44) nella formulazione (2.43), tenendo conto delle (2.45), si vede facilmente che il problema è soddisfatto: è questo il “metodo di splitting” per il problema stazionario (già considerato, in un caso particolare, in § 2.7).

Si noti anche che, nel caso stazionario, non si possono avere condizioni al contorno solo del secondo tipo; infatti, per il bilancio energetico

$$q_1'' + w'' = q_2'' \quad \text{con} \quad w'' = \int_0^L \varphi(x) dx$$

i due flussi  $q_1''$  e  $q_2''$  non possono essere assegnati in modo indipendente (o sono incompatibili o uno dei due è pleonastico). Nelle condizioni al contorno deve pertanto essere assegnata almeno una temperatura  $T_0$  (tra le possibili quattro che possono comparire nelle condizioni al contorno, e cioè  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_A$ ,  $T_B$ ). E' pertanto sempre possibile eliminare una fonte di non omogeneità del problema, assumendo come nuova incognita il *salto termico*  $\theta = T - T_0$ ; di solito, per brevità, il salto qui introdotto viene ancora chiamato temperatura ed indicato ancora con  $T$ , precisando (o sottintendendo) che è la temperatura relativa a quella di riferimento  $T_0$ ; in tal senso, abbiamo parlato in precedenza di temperatura nulla (si ricordi che la temperatura di 0 K non è raggiungibile).

## 2.10 Esempi.

In questo paragrafo viene privilegiato l'aspetto applicativo, esemplificando l'impiego dell'analogia elettrica in alcuni contesti di interesse pratico (raffreddamento di circuiti, bilancio di locali,...)

**Esempio 2.1** (Isolamento termico di un serbatoio). *Un grosso serbatoio contiene un fluido frigorifero alla temperatura  $-20$  C; con una temperatura dell'aria esterna di  $20$  C e con un coefficiente di scambio tra parete ed aria di  $20 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ , si è misurata sulla faccia esterna del serbatoio una temperatura di  $0$  C. Si vuole rivestire il serbatoio con uno strato di isolante ( $\kappa=0.04 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) in modo che, in analoghe condizioni, la temperatura superficiale sia  $15$  C (in modo da evitare condensa); quale deve essere lo spessore dell'isolante?*

Dal momento che il recipiente è grande, la sua parete (eventualmente multistrato) e lo strato aggiuntivo di isolante potranno essere approssimati come superfici piane e gli effetti di bordo potranno essere trascurati. Conviene ragionare riferendoci ad una superficie unitaria: con ciò si considereranno le resistenze termiche per unità di superficie ( $r=AR$ , unità di misura:  $\text{m}^2\text{K/W}$ ) e le quantità analoghe delle correnti saranno i flussi termici. Si esprime la temperatura in gradi Celsius:

la conduzione dipende solo da salti di temperatura e quindi è possibile usare come temperatura di riferimento quella di 0 C.

La parete e la sua convezione verso il fluido frigorifero potranno essere modellati mediante un'unica resistenza termica  $r_0$ . In assenza di rivestimento (fig. 2.8a), nel serbatoio entra il flusso  $q_0'' = h_A(T_A - T_1) = 200 \text{ W/m}^2$ ; per la resistenza serie  $r = r_0 + 1/h_A$ , si trova il valore  $r = (T_A - T_B)/q_0'' = 0,2 \text{ m}^2\text{K/W}$ . In presenza del rivestimento (fig. 2.8b), per il flusso entrante dovrà risultare  $q'' = h_A(T_A - T_2) = 50 \text{ W/m}^2$ , per cui la nuova resistenza serie  $r'$  dovrà essere  $r' = (T_A - T_B)/q'' = 0,8 \text{ m}^2\text{K/W}$ . Per lo strato di isolante da inserire si ha dunque

$$\frac{\delta}{\kappa} = r' - r = 0,6 \text{ m}^2\text{K/W} \quad \text{da cui} \quad \delta = 0,6 \kappa = 0,024 \text{ m} = 2,4 \text{ cm.}$$

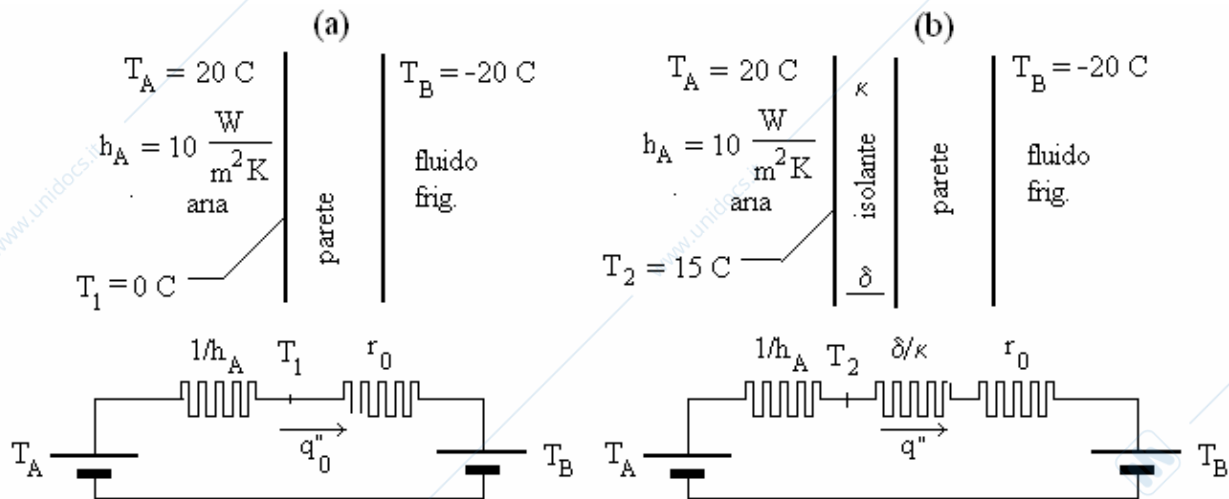


Fig. 2.8 – Schemi per l'esempio 2.1: senza rivestimento (a), con rivestimento (b).

**Esempio 2.2 (Bilancio termico di un locale).** Di una stanza a  $T_S = 20 \text{ C}$ , tutte le pareti possono essere considerate adiabatiche, eccetto quella affacciata sull'esterno, che è parzialmente vetrata e su cui incide la radiazione solare di irradianza  $G = 300 \text{ W/m}^2$ ; la temperatura dell'aria esterna che lambisce la parete è  $T_A = -10 \text{ C}$ .

Nella stanza sono accesi degli apparecchi elettrici (lampade, frigorifero, televisore, ...) che dissipano  $300 \text{ W}$ ; è inoltre attivo un ricambio d'aria della portata  $0,02 \text{ kg/s}$ .

I coefficienti di scambio esterno ed interno sono rispettivamente  $h_{est} = 20$  e  $h_{int} = 5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ .

La porzione opaca della parete esterna della stanza è formata da uno strato di spessore  $\delta_L = 0,20 \text{ m}$  di laterizio con  $\kappa_L = 0,8 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , area  $A_L = 10 \text{ m}^2$  ed coefficiente di assorbimento superficiale  $a_L = 0,6$ ; il vetro ha spessore  $\delta_V = 0,005 \text{ m}$ , conduttività  $\kappa_V = 1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , area  $A_V = 2 \text{ m}^2$  e riflette il 10% della radiazione incidente, ma non la assorbe (è trasparente).

Si vuole calcolare la potenza termica che l'impianto di riscaldamento deve fornire per mantenere la stanza in condizioni di regime.

Studiamo il bilancio energetico del locale, considerando positive le potenze entranti. In primo luogo esso acquisisce direttamente una potenza termica

$$q_1 = 300 \text{ W}$$

dagli apparecchi accesi. Inoltre della potenza totale  $A_V G$  della radiazione incidente sulla parete vetrata, il 90% entra nel locale ove viene assorbita contribuendo al bilancio con

$$q_2 = 0,9 A_V G = 540 \text{ W}$$

Viceversa il ricambio d'aria (una portata  $\dot{m} = 0,02 \text{ kg/s}$  immessa nella stanza alla temperatura  $T_A$  ed espulsa a temperatura  $T_S$ ) sottrae al locale una potenza (si assume  $c_p \approx 1000 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$  per il calore specifico dell'aria):

$$q_3 = \dot{m}c_p(T_A - T_S) = -600 \text{ W}$$

Restano da valutare le dispersioni termiche attraverso la parete; per quanto riguarda la porzione vetrata, dato che essa è trasparente la sua temperatura non risente affatto della radiazione in transito (il cui effetto sul locale è già stato conteggiato in  $q_2$ ); attraverso il vetro si ha dunque una dispersione termica pari a quella che si avrebbe in assenza di radiazione solare e completamente descritta dalla sua resistenza termica

$$R_V = \frac{1}{h_{est}A_V} + \frac{\delta_V}{\kappa_V A_V} + \frac{1}{h_{int}A_V} = 0,1275 \text{ K/W}$$

In definitiva la potenza persa attraverso la porzione vetrata è

$$q_4 = \frac{T_A - T_S}{R_V} = -235 \text{ W}$$

Per quanto riguarda la porzione opaca, la radiazione solare viene assorbita sulla sua faccia esterna: il suo ingresso diretto nella stanza è impedito ed il suo effetto è tutto racchiuso nella modifica della distribuzione di temperatura della parete, secondo quanto discusso in §2.6; in particolare è comodo introdurre la temperatura fittizia

$$T_A^* = T_A + \frac{a_L G}{h_{est}} = -1 \text{ C}$$

Poiché la resistenza termica vale

$$R_L = \frac{1}{h_{est}A_L} + \frac{\delta_L}{\kappa_L A_L} + \frac{1}{h_{int}A_L} = 0,05 \text{ K/W}$$

la corrispondente potenza termica persa attraverso essa vale

$$q_5 = \frac{T_A^* - T_S}{R_V} = -420 \text{ W}$$

Affinché la stanza resti a regime, l'impianto di riscaldamento deve compensare tali potenze termiche erogando

$$q_{risc} = -(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5) = 415 \text{ W}$$

**Esempio 2.3 (Condensazione di un vapore saturo).** *Un grande recipiente contiene acqua bollente a  $T_A=100 \text{ C}$  (il cui calore latente è  $\Delta l=2,257 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ); la sua parete è omogenea, di spessore  $\delta=2 \text{ cm}$ , area  $A=20 \text{ m}^2$  e conduttività termica  $\kappa=0,02 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Il coefficiente di scambio tra l'aria esterna, a temperatura  $T_B=20 \text{ C}$ , e la parete è  $h=5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ , mentre quello per condensazione dell'acqua è da ritenere molto elevato.*

- Si calcoli la massa di acqua che condensa in 1 ora per effetto del cattivo isolamento.
- Si interpone tra acqua e parete un sottile strato elettricamente conduttore; quale deve essere la potenza termica di alimentazione dello strato per evitare la condensazione?
- Stessa domanda se lo strato è interposto tra il recipiente ed l'aria esterna.
- Stessa domanda se la corrente viene fatta passare uniformemente nella parete del recipiente.

La resistenza conduttiva della parete e quella convettiva parete-aria sono rispettivamente:

$$R = \frac{\delta}{\kappa A} = 0,05 \text{ K/W} , \quad r = \frac{1}{hA} = 0,01 \text{ K/W}$$

Come è evidente dall'analogo elettrico di fig. 2.9a, la potenza termica persa dall'acqua è

$$q_1 = \frac{T_A - T_B}{R + r} = 1333 \text{ W}$$

Pertanto la quantità di calore persa dall'acqua in 1 ora (3600 secondi) è  $Q=4,8 \cdot 10^6 \text{ J}$  e pertanto la massa di acqua che condensa è

$$\Delta m = Q / \Delta I = 2,126 \text{ kg}$$

Si noti che in queste condizioni la temperatura della faccia esterna del recipiente risulta

$$T_P = T_B + q_1 r = 33,3 \text{ C}$$

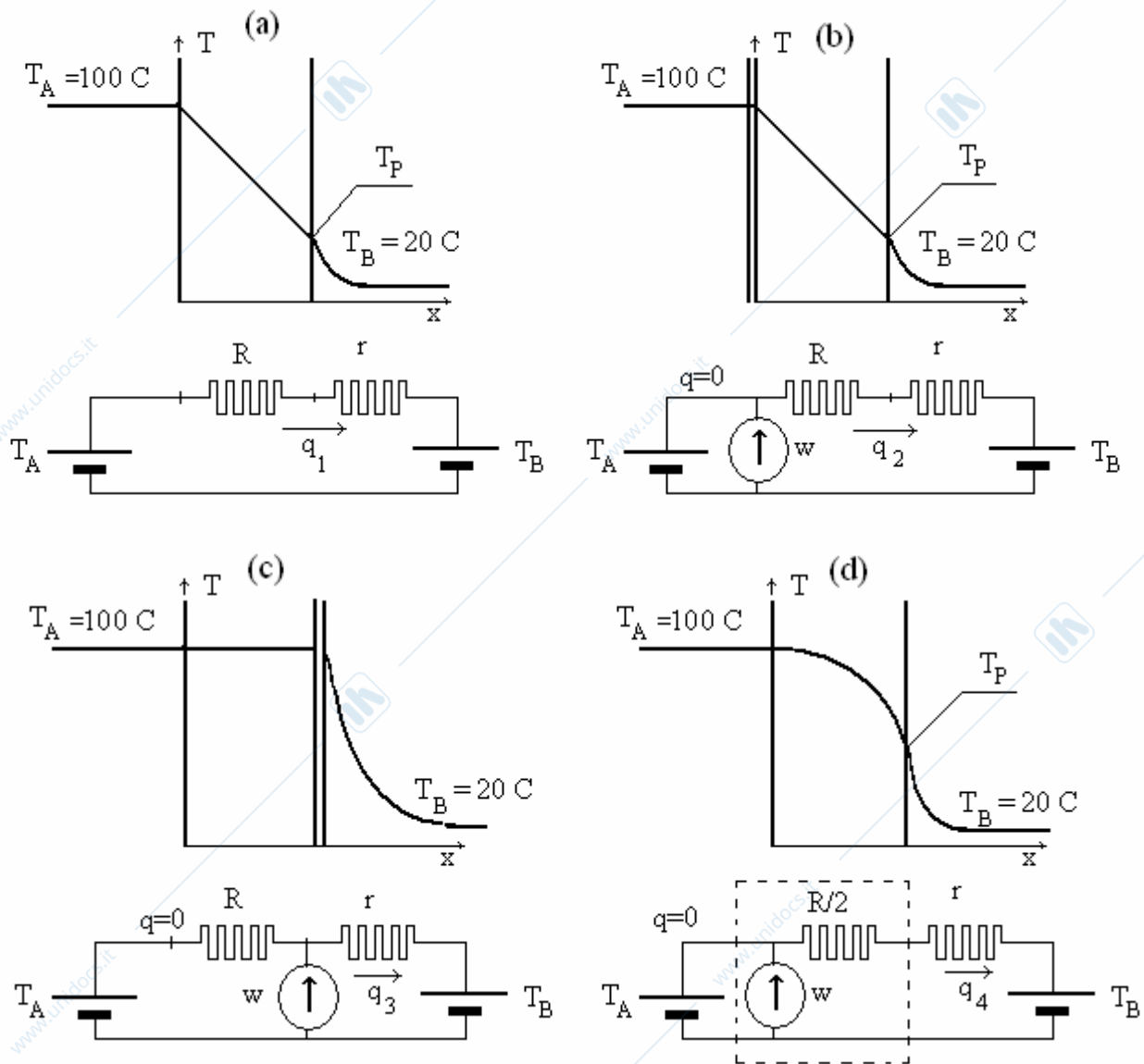


Fig. 2.9 – Profili di temperatura ed analoghi elettrici per le varie domande dell'esempio 2.3.

Se si interpone sorgente termica superficiale  $w$ , localizzata sulla faccia interna della parete, basta aggiungere un generatore di corrente a sinistra di  $R$ , come indicato in fig. 2.9b; poiché si richiede che l'acqua non condensi ( $q=0$ ), tutta la potenza generata dalla sorgente deve fluire verso l'esterno

$$w = q_2 = \frac{T_A - T_B}{R + r} = q_1 = 1333 \text{ W}$$

e la distribuzione di temperatura rimane la stessa del caso precedente (in particolare  $T_P=33,3 \text{ C}$ ).

Se invece la sorgente termica è localizzata sulla faccia esterna (fig. 2.9c), il generatore di corrente va interposto tra le due resistenze; per la condizione di non condensazione ( $q=0$ ) non si ha alcun salto termico ai capi di  $R$ ; tutta la parete si trova alla temperatura dell'acqua e in particolare è anche  $T_P=T_A=100 \text{ C}$ . La potenza richiesta è allora

$$w = q_3 = \frac{T_A - T_B}{r} = 8000 \text{ W}$$

ed è dunque notevolmente più elevata che nel caso (b).

Se infine la sorgente termica è uniformemente distribuita nella parete, si può usare per questa l'analogia indicata in fig. 2.6; dal momento che l'acqua non deve condensare ( $q = -q_+ = 0$ ) la faccia interna della parete deve essere adiabatica e su essa si deve avere il massimo della parabola ( $T_m = T_A$  e  $R = 0$ ). Tutto ciò è indicato in fig. 2.9d: in particolare l'analogo elettrico della lastra con sorgente è racchiuso nel rettangolo tratteggiato. La potenza richiesta è ora

$$w = q_4 = \frac{T_A - T_B}{(R/2) + r} = 2286 \text{ W}$$

mentre la temperatura sulla faccia esterna è

$$T_p = T_B + q_4 r = 42,9 \text{ C.}$$

**Esempio 2.4 (Lastra scaldante).** Una sottile lastra quadrata di 20 cm di lato, è scaldata elettricamente con una potenza  $w=10 \text{ W}$ ; essa è inserita tra due lastre isolanti delle stesse dimensioni, spessore 2 cm e conduttività  $0,05 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Il complesso è lambito a sinistra da un fluido a temperatura  $T_A=20 \text{ C}$ , a destra da uno a temperatura  $T_B$ ; i due coefficienti di scambio valgono entrambi  $h=5 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ . Si vuole calcolare la temperatura raggiunta a regime nella lastra, quando  $T_B = T_A=20 \text{ C}$  e quando  $T_B = 110 \text{ C}$ . Se invece la lastra scaldante è spessa  $L=20 \text{ cm}$  (è un cubo) di conduttività  $\kappa=1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , quale è la massima temperatura raggiunta in essa, per entrambi i valori di  $T_B$ .

Il complesso è opportunamente isolato sul suo mantello, in modo da poter considerare il problema come monodimensionale.

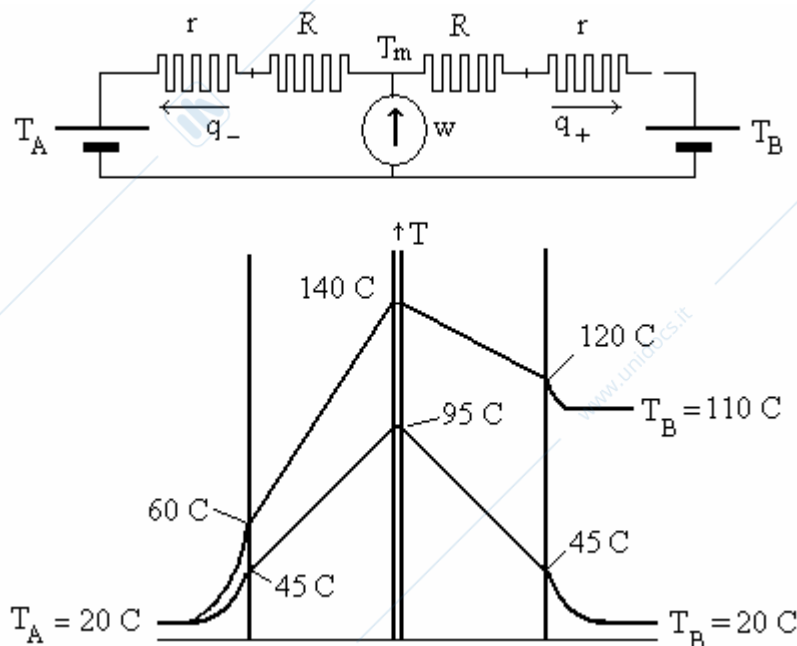


Fig. 2.10 – Esempio 2.4: circuito equivalente e profili termici per riscaldatore sottile.

L'area del quadrato è  $A=0,04 \text{ m}^2$ ; la resistenza di conduzione di ciascuna lastra isolante e quelle convettive sono

$$R = 0,02/0,05/0,04 = 10 \text{ K/W,}$$

$$r = 1/5/0,04 = 5 \text{ K/W,}$$

quella della loro serie è

$$R_s = R + r = 15 \text{ K/W.}$$

Consideriamo dapprima il caso di lastra scaldante sottile; il circuito equivalente è mostrato in fig. 2.10; se le temperature dei due fluidi sono uguali, il circuito è simmetrico per cui la potenza di riscaldamento viene trasmessa in parti uguali ai due fluidi

$$q_- = q_+ = w/2 = 5 \text{ W}$$

mentre la temperatura della lastra risulta

$$T_m = T_A + q_- R_s = 95 \text{ C}$$

Se le  $T_A$  e  $T_B$  sono diverse, le due potenze possono essere determinate osservando che

$$T_m = T_A + q_- R_s = T_B + q_+ R_s$$

con  $q_+ = w - q_-$ ; ne segue

$$q_- = \frac{R_s w + (T_B - T_A)}{2R_s} = 8 \text{ W}, \quad q_+ = w - q_- = 2 \text{ W}, \quad T_m = 140 \text{ C}.$$

I corrispondenti profili termici (e le temperature delle facce) sono indicati nella stessa figura.

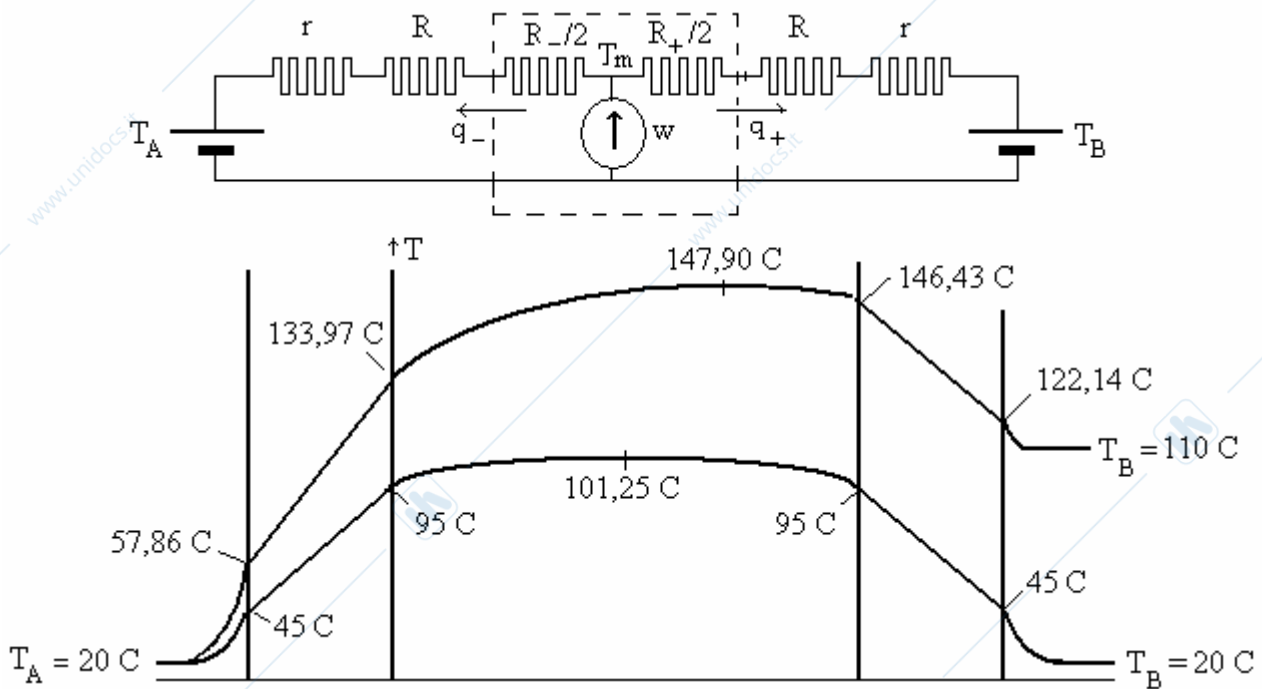


Fig. 2.11 - Esempio 2.4: circuito equivalente e profili termici per riscaldatore spesso.

Nel caso di lastra spessa, il circuito equivalente è mostrato in fig. 2.11; anche in questo caso, se le temperature dei due fluidi sono uguali, si deve avere simmetria tra la parte destra e quella sinistra; il massimo di temperatura nell'elemento scaldante sarà al centro ( $\delta = \delta_+ = L/2$ ); pertanto le due resistenze  $R_{\pm}$  sono uguali tra loro e valgono

$$R_- = R_+ = \frac{L}{2\kappa A} = 2,5 \text{ K/W}$$

Sono uguali tra loro anche le potenze trasmesse ai fluidi

$$q_- = q_+ = w/2 = 5 \text{ W}$$

Poiché esse sono le stesse del caso simmetrico con piastra sottile, è evidente che il profilo di temperatura all'esterno della lastra scaldante non varia rispetto a prima; al suo interno si ha invece il profilo parabolico, con il massimo dato da

$$T_m = T_A + q_-(R_s + R_-/2) = 101,25 \text{ C}$$

Più complessa è la situazione se  $T_A \neq T_B$  in quanto i valori di  $R_{\pm}$  dipendono dalla distribuzione di temperatura; peraltro, procedendo in analogia al caso di riscaldatore sottile si può scrivere:

$$T_m = T_A + q_-(R_s + R_-/2) = T_B + q_+(R_s + R_+/2)$$

Nel secondo e terzo membro della precedente riga si esplicitano le quantità

$$q_{\pm} = w \frac{\delta_{\pm}}{L}, \quad R_{\pm} = \frac{\delta_{\pm}}{\kappa A}$$

in funzione di  $\delta_{-}$  e  $\delta_{+}=L-\delta_{-}$ ; si ottiene così un'equazione in  $\delta_{-}$  la cui soluzione è

$$\delta_{-} = L \frac{w(L + 2\kappa AR_s) + 2\kappa\alpha(T_B - T_A)}{2w(L + 2\kappa AR_s)} = 0,151 \text{ m}$$

In base a tale valore si ricava

$$T_m = 147,90 \text{ C}, \quad q_{-} = 7,57 \text{ W}, \quad q_{+} = 2,43 \text{ W}$$

Si noti che, in queste condizioni, il profilo di temperatura al di fuori dell'elemento scaldante è un po' diverso da quello che si aveva per il riscaldatore sottile.

Anche in questo caso i profili termici (e le temperature delle facce) sono indicati fig 2.11.

**Esempio 2.5 (Altra lastra scaldante).** *Una sbarra di materiale omogeneo, elettricamente conduttore, di sezione  $A=1 \text{ cm}^2$ , lunghezza  $L=2 \text{ m}$  e conduttività termica  $\kappa=100 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , è perfettamente isolata sul suo mantello, mentre le sue estremità sono in contatto termico, con coefficiente di scambio convettivo  $h=50 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ , con due fluidi mantenuti alle temperature  $T_A=0 \text{ C}$  e  $T_B=50 \text{ C}$  rispettivamente.*

Si vuole che la massima temperatura nella sbarra sia  $T_m=200 \text{ C}$ ; si determini:

- la potenza elettrica con cui deve essere alimentata,
- la posizione in cui si realizza il massimo di temperatura,
- le potenze termiche asportate da parte di ciascuno dei due fluidi.

La situazione qui prospettata è simile all'ultimo caso dell'esempio 2.4 e, in particolare, il circuito equivalente è quello di fig. 2.11 con  $R=0$  (si usano le stesse notazioni; ovviamente sono diversi i valori numerici delle varie quantità); in questo esempio è nota  $T_m$  mentre è incognita la potenza  $w$ .

Anche ora conviene esprimere la temperatura massima nella sbarra in funzione delle temperature dei due fluidi separatamente e cioè

$$T_m = T_A + \frac{\delta_{-}}{L} w \left( \frac{1}{hA} + \frac{\delta_{-}}{2\kappa A} \right) \quad T_m = T_B + \frac{L - \delta_{-}}{L} w \left( \frac{1}{hA} + \frac{L - \delta_{-}}{2\kappa A} \right)$$

E' questo un sistema di due equazioni nelle incognite  $\delta_{-}$  e  $w$ ; eliminando  $w$  tra queste due relazioni si ottiene l'equazione di secondo grado in  $\delta_{-}$

$$\frac{\delta_{-}}{T_m - T_A} \left( \frac{1}{h} + \frac{\delta_{-}}{2\kappa} \right) = \frac{L - \delta_{-}}{T_m - T_A} \left( \frac{1}{h} + \frac{L - \delta_{-}}{2\kappa} \right)$$

Sostituendovi i valori numerici, si ottiene  $\delta_{-}^2 - 44 \delta_{-} + 48 = 0$ ;  $\delta_{-} = 1,119 \text{ m}$  è la sola soluzione interna alla sbarra (contenuta cioè tra 0 e  $L$ ). La potenza  $w$  può ora essere ricavata dalla prima equazione del sistema

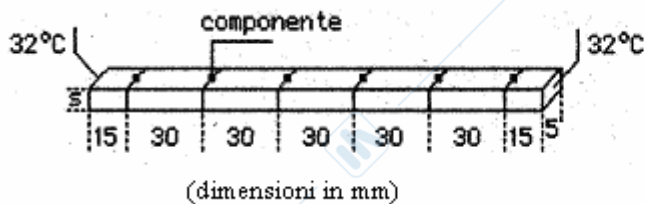
$$w = \frac{L(T_m - T_A)}{\delta_{-} \left( \frac{1}{hA} + \frac{\delta_{-}}{2\kappa A} \right)} = 1,396 \text{ W}$$

e infine

$$q_{-} = w\delta_{-} / L = 0,781 \text{ W}, \quad q_{+} = w - q_{-} = 0,615 \text{ W}$$

**Esempio 2.6 (Raffreddamento di componenti elettronici).** *Dei componenti elettronici, ciascuno dei quali dissipa  $100 \text{ mW}$ , sono montati su una cartolina in file di 6 elementi equidistanti; il calore generato dai componenti di una fila è asportato per conduzione da una piattina di rame larga  $5 \text{ mm}$  e lunga  $180 \text{ mm}$ , con la quale ciascuno dei 6 elementi è in contatto tramite una resistenza termica di contatto di  $50 \text{ K/W}$ . Le due estremità della piattina sono mantenute a temperatura  $T_A = 32 \text{ C}$ ; si calcoli quale deve essere lo spessore  $s$  della piattina, se la temperatura di ogni elemento non deve*

superare 100C. (Si assuma per la conduttività della lega di rame  $\kappa=290 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ; si trascuri la convezione e l'irraggiamento).



NOTAZIONI

- $w = 0,1 \text{ W}$  = potenza di ciascun componente
- $a = 0,005 \text{ m}$  = larghezza piattina
- $p = 0,030 \text{ m}$  = spaziatura tra i componenti
- $R = 50 \text{ K/W}$  = resistenza di contatto

Fig. 2.12 – Esempio 2.6: schema della piattina di rame e notazioni.

In problemi di questo genere non si è tanto interessati ad ottenere dei valori precisi delle quantità richieste, quanto ad avere delle indicazioni sicure per mantenere i componenti elettronici al di sotto dei valori di temperatura prestabiliti; pertanto l'ipotesi di trascurare ogni altro meccanismo di scambio termico, oltre alla conduzione, è cautelativa (in quanto porta a sovrastimare lo spessore della piastrina e quindi a mantenere più freddi gli elementi).

Come prima cosa si deve procedere ad una schematizzazione, non suggerita dal testo. Si considera la singola fila di 6 componenti e la sottostante piattina in lega di rame che provvede ad asportare per conduzione il calore prodotto dai componenti. In fig. 2.12 è rappresentata la piattina e la sua geometria; dal momento che essa è considerata adiabatica sul mantello, tranne che per il contatto con i componenti, è una ragionevole approssimazione considerare che la sua temperatura vari, in modo monodimensionale, con la distanza dagli estremi (non si hanno dati sufficienti per una descrizione più dettagliata, tridimensionale); detta  $p$  la distanza tra due componenti vicini, si introduce la resistenza termica  $r = p/(\kappa as)$  del tratto di piattina che li separa; ovviamente la resistenza tra i componenti ai due bordi e le estremità è la metà ( $r/2$ ). Data la simmetria del problema basterà considerare mezza piastrina, su cui insistono 3 elementi (in fig. 2.13 è considerata la metà di sinistra); le sue resistenze non sono semplicemente in serie, in quanto in corrispondenza degli elementi entra la potenza  $w$  attraverso la resistenza di contatto. Si ha pertanto il circuito di fig. 2.13; in esso le temperature dei 3 componenti ( $T_1, T_2$  e  $T_3$ ) sono maggiori di  $Rw = 5 \text{ C}$  delle corrispondenti temperature sulla piattina ( $t_1, t_2, t_3$ ); sono anche indicate le potenze termiche ( $3w, 2w, w$ ) trasmesse dai tratti considerati della piattina. Dal circuito appare evidente che il componente che si scalda di più è quello a destra (vicino al centro della piattina); se si impone che esso assuma la temperatura massima consentita  $T_3=100 \text{ C}$ , l'analogia elettrica indica che

$$T_3 - T_A = R \cdot w + r \cdot w + r \cdot 2w + \frac{r}{2} \cdot 3w = \left( R + \frac{9}{2} r \right) \cdot w$$

Ne segue

$$r = \frac{2(T_3 - T_A - Rw)}{9w} = 140 \text{ K/W}, \quad s = \frac{p}{\kappa ar} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,15 \text{ mm}$$

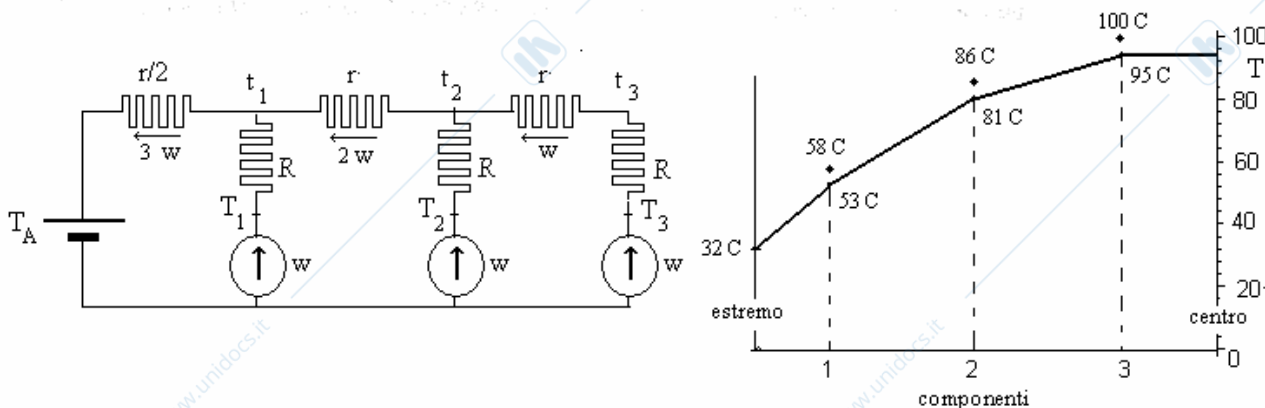


Fig. 2.13 – Esempio 2.6: analogo elettrico e temperature.

E' facile calcolare anche le temperature  $T_1$  e  $T_2$  e quindi l'andamento di temperatura  $t(x)$  all'interno della piattina: esso è visualizzato (linea spezzata) in fig. 2.13, insieme alle temperature  $T_i$  dei 3 componenti considerati (punti sovrastanti).

**Esempio 2.7** (Lastra molto spessa irradiata). *Come in § 2.8, una radiazione incide normalmente su una lastra di vetro, qui molto spessa ( $L \rightarrow \infty$ ), la cui faccia irradiata è lambita da un fluido a temperatura costante con coefficiente di scambio  $h$ ; si determini la distribuzione di temperatura nel vetro, un condizioni di regime.*

Si indica con  $T(x)$  il salto termico rispetto al fluido esterno; l'equazione di Fourier è ancora quella di (2.41), ma è definita in  $0 < x < \infty$  e la condizione al contorno in  $x=0$  è di tipo convettivo; inoltre, la condizione al contorno a sinistra è sostituita dal requisito che la temperatura resti una quantità finita per  $x \rightarrow \infty$ . In altre parole il problema può essere formalizzato come:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\chi G}{\kappa} \exp(-\chi x) & \text{per } 0 < x < \infty \\ -\kappa \frac{dT}{dx} + hT = 0 & \text{per } x = 0 \\ T \text{ finita} & \text{per } x \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$T(x) = C_1 + C_2 x - \frac{G}{\kappa \chi} \exp(-\chi x)$$

ove i primi due addendi (con  $C_1$  e  $C_2$  costanti arbitrarie) sono l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e l'ultimo è un integrale particolare dell'equazione completa. La seconda condizione sopra posta implica  $C_2=0$ , mentre esplicitando la prima si trova

$$C_1 = G \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{\kappa \chi} \right)$$

per cui la soluzione richiesta risulta

$$T(x) = \frac{G}{h} + \frac{G}{\kappa \chi} [1 - \exp(-\chi x)]$$

Si noti che nel caso limite di vetro molto scuro ( $\chi \rightarrow \infty$ ; la radiazione viene assorbita tutta in un piccolo strato superficiale, come se la lastra fosse opaca) la precedente relazione si riduce a

$$T(x) = G / h$$

e cioè la lastra è a temperatura uniforme con un salto termico rispetto al fluido esterno dovuto al fatto che tutto il flusso termico assorbito viene riversato per convezione al fluido stesso.

## 2.11 Riassunto.

In questo capitolo si è studiato il problema più semplice per la conduzione in un solido omogeneo con proprietà indipendenti dalla temperatura e cioè quello stazionario in simmetria piana; sono stati presi in considerazione numerosi casi ed analizzati vari dettagli. Può essere pertanto opportuno riassumere i punti essenziali.

La formulazione matematica  $T(x)$  del problema è data dall'equazione di Fourier con le appropriate condizioni al contorno e cioè dalle (2.43); se il problema è del tutto omogeneo, la soluzione è quella di temperatura nulla; altrimenti le varie fonti di non omogeneità contribuiscono ciascuna in modo lineare, v. (2.44–45). L'integrale generale dell'equazione di Fourier è fornito dalla (2.1') in

funzione delle costanti arbitrarie  $C_1$  e  $C_2$ ; nel caso di sorgente non nulla è spesso comodo determinare dapprima l'integrale particolare  $T_{00}(x)$  che si ottiene imponendo la temperatura nulla ai due capi della lastra; l'espressione

$$T(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_{00}(x)$$

è la richiesta soluzione del problema se le condizioni al contorno sono di primo tipo; altrimenti le quantità  $T_1$  e  $T_2$ , (che hanno ancora il significato fisico di temperature sulle facce) debbono essere considerate come le costanti da determinare attraverso le condizioni al contorno. Infine se si tratta di più solidi in contatto termico, come in § 2.4, si ha un'equazione di Fourier per ciascun solido con le condizioni di continuità delle temperature e dei flussi termici sulle superfici di contatto.

Sono stati esaminati diversi esempi di soluzioni; si è visto come, in assenza di sorgenti interne distribuite, il metodo di soluzione più semplice ed efficace è quello basato sull'analogia elettrica, che è facilmente estendibile al caso di pareti multistrato (§ 2.5). Esso consiste nel calcolo delle resistenze conduttive (2.14) e di quelle convettive (2.11), nella formulazione del circuito equivalente, di tipo serie, di fig. 2.3, alimentato mediante generatori ideali che rappresentano le fonti di non omogeneità del problema. In particolare per condizioni di primo e terzo tipo, si introducono dei generatori di tensione per rappresentare le temperature imposte alle pareti o dei fluidi che le lambiscono; condizioni di secondo tipo richiedono l'introduzione di generatori di corrente pari alle potenze imposte; generatori di corrente possono essere impiegati anche per modellare delle sorgenti termiche localizzate su superfici (§ 2.6). Tale analogia elettrica verrà ulteriormente discussa in § 5.

Particolare rilevanza pratica hanno i casi di sorgente uniforme ed esponenziale decrescente studiati rispettivamente in § 2.7 e in § 2.8.

# 3. Problemi stazionari in simmetria cilindrica e sferica.

Si studiano soluzioni stazionarie elementari dell'equazione di Fourier in simmetria cilindrica e sferica; inoltre, si estendono a tali casi i metodi basati sull'analogia elettrica.

Infine alcuni dei risultati vengono ritrovati (più rapidamente) mediante il metodo che si basa sull'equazione di bilancio energetico in forma integrale e sul postulato di Fourier.

## 3.1 L'equazione di Fourier in coordinate cilindriche.

Si ricorda che in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$  il laplaciano della funzione  $f$  assume la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

per cui l'equazione di Fourier (1.11) può essere riscritta come

$$(3.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

In questa sezione siamo interessati a soluzioni stazionarie a simmetria cilindrica  $T(r)$ ; in tal caso, dei termini a primo membro solo il primo non si annulla identicamente; peraltro, affinché la simmetria sia rispettata, occorre che il termine di sorgente dipenda solo dalla coordinata radiale  $r$  e che la geometria e le condizioni al contorno siano anche esse simmetriche. Ciò porta ad assumere che la geometria sia di tipo anulare (cilindro cavo di raggi  $r_1$  e  $r_2$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , fig. 3.1a), e che le condizioni al contorno presentino delle fonti di non omogeneità costanti. Inoltre, in tali condizioni, il gradiente di temperatura è puramente radiale ed ha come componente  $dT/dr$ .

In analogia alla formulazione (2.43) del problema in simmetria piana, la tipica formulazione del problema in simmetria cilindrica può essere così formalizzata

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi(r)}{\kappa} & \text{per } r_1 < r < r_2 \\ -k_1 \frac{dT}{dr} + h_1 T = f_1 & \text{per } r = r_1 \\ k_2 \frac{dT}{dr} + h_2 T = f_2 & \text{per } r = r_2 \end{cases}$$

con il significato delle costanti  $k_1, k_2, h_1, h_2, f_1, f_2$  precisato in §2.9. Se  $r_1 > 0$ , l'integrale generale della prima riga può essere facilmente ottenuto: dopo aver moltiplicato entrambi i membri per  $r$ , si effettua l'integrale indefinito; si ha

$$r \frac{dT}{dr} = C_2 - \frac{1}{\kappa} \int^r r'' \varphi(r'') dr''$$

Si dividono poi entrambi i membri di questa per  $r$  e si effettua una seconda integrazione indefinita, ottenendo così la relazione cercata

$$(3.3) \quad T(r) = C_1 + C_2 \log r - \frac{1}{k} \int \frac{1}{r'} dr' \int^r r'' \varphi(r'') dr''$$

che è l'analogia di (2.1'). Il caso in cui si fa tendere a zero il raggio interno (ottenendo così un cilindro vero e proprio) è considerato in §3.4.

La condizione di simmetria cilindrica  $T(r)$  implica che le superfici isoterme siano delle superfici cilindriche coassiali ( $r=\text{costante}$ ) con l'asse coincidente con l'asse di simmetria; pertanto le superfici costituite da piani (verticali in fig. 3.1) contenenti l'asse ( $\phi=\text{costante}$ ) e da piani (orizzontali) perpendicolari all'asse ( $z=\text{costante}$ ) sono delle superfici adiabatiche.

Si consideri una porzione di cilindro cavo, delimitata da due piani verticali ( $\phi=0$  e  $\phi=\Phi$ ) e da due orizzontali ( $z=0$  e  $z=l$ ), e bene isolata termicamente su tali delimitazioni; ragionando come in §2.1, si conclude che le superfici isoterme restano indisturbate ed il problema è ancora formulabile come in (3.2). Per tale geometria (fig. 3.1b), l'area della superficie con  $r=\text{costante}$  risulta

$$A=lr\Phi ;$$

in particolare indicheremo con  $A_1$  e  $A_2$  quelle sul contorno in  $r=r_1$  e in  $r=r_2$  rispettivamente; il volume risulta poi

$$V = \frac{\Phi l}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

Ovviamente per  $\Phi = 2\pi$  (fig. 3.1a) si ritrova l'area  $A=2\pi rl$  della superficie cilindrica ed il volume  $V = \pi l(r_2^2 - r_1^2)$  del cilindro cavo.

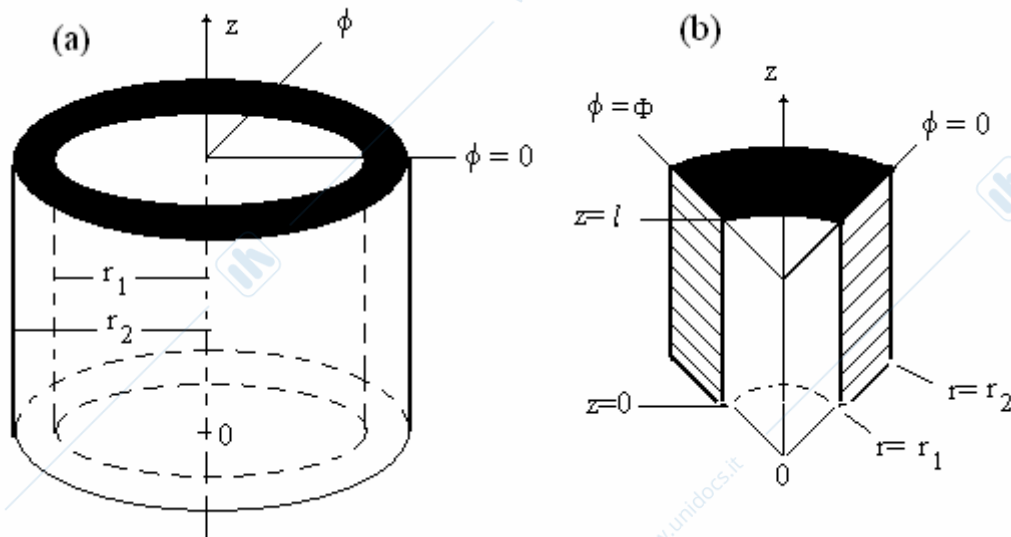


Fig. 3.1 – La geometria ammissibile per il problema (3.2).

### 3.2 Cilindro cavo senza sorgente.

Si considera dapprima un cilindro cavo ( $\Phi=2\pi$ ), o un suo settore come in fig. 3.1b, in assenza di sorgente. Se si assumono condizioni al contorno di primo tipo, con  $T_1$  e  $T_2$  temperature assegnate, il problema diviene:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{per} \quad r_1 < r < r_2 \\ T = T_1 \quad \text{per} \quad r = r_1 \\ T = T_2 \quad \text{per} \quad r = r_2 \end{array} \right.$$

La (3.3) si riduce allora a  $T(r) = C_1 + C_2 \log r$ ; le condizioni al contorno permettono di determinare

$$C_1 = \frac{T_1 \log r_2 - T_2 \log r_1}{\log(r_2/r_1)} \quad C_2 = \frac{T_2 - T_1}{\log(r_2/r_1)}$$

per cui la soluzione risulta

$$(3.5) \quad T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\log(r_2/r_1)} \log(r/r_1) = \frac{T_2 \log(r/r_1) - T_1 \log(r/r_2)}{\log(r_2/r_1)}$$

A differenza di quanto avviene in uno strato piano, il profilo di temperatura non ha un andamento lineare (non è un segmento, ma una curva con concavità rivolta verso l'alto se  $T_1 > T_2$ ).

In conseguenza della (3.5) il flusso termico radiale è

$$(3.6) \quad q_r'' = -\kappa \frac{dT}{dr} = \frac{\kappa}{r} \frac{T_1 - T_2}{\log(r_2/r_1)}$$

che diminuisce al crescere di  $r$ ; è invece indipendente da  $r$  la potenza termica attraverso la generica sezione  $r = \text{costante}$ , ovvero

$$(3.7) \quad q = A q_r'' = l \Phi \kappa \frac{T_1 - T_2}{\log(r_2/r_1)} = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad \text{con} \quad R = \frac{\log(r_2/r_1)}{l \Phi \kappa}$$

Pertanto c'è una sola potenza termica trasmessa attraverso la porzione di cilindro ed essa risulta proporzionale alla differenza di temperatura imposta ai suoi capi; è pertanto possibile interpretare la quantità  $R$  come *resistenza termica conduttiva* della porzione stessa.

Si noti che nel caso di piccolo spessore, cioè con  $\delta = r_2 - r_1 \ll r_1$ , uno sviluppo in serie mostra che

$$\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \log\left(1 + \frac{\delta}{r_1}\right) = \frac{\delta}{r_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{r_1}\right)^2 + \dots$$

e, se ci si arresta al primo ordine, si ottiene subito

$$R = \frac{r_1 \log(r_2/r_1)}{\kappa A_1} \approx \frac{\delta}{\kappa A_1}$$

In altre parole, la resistenza termica di un tubo sottile è bene approssimata da quella di una superficie piana (2.6) di uguale spessore; se si tiene conto anche del termine del secondo ordine del precedente sviluppo, si ottiene, con maggiore precisione,

$$R \approx \frac{\delta}{\kappa A_*}$$

ove  $A_*$  è l'area della superficie di raggio  $r_1 + \delta/2$  (raggio medio).

La possibilità di introdurre il concetto di resistenza termica anche per strutture a simmetria cilindrica, permette di estendere le considerazioni di § 2.5 a una parete multistrato di tipo cilindrico e di usare lo stesso circuito equivalente. Chiaramente le resistenze  $R_j$  devono essere calcolate in base alla (3.7) e le resistenze convettive in base alle aree di contatto con i fluidi: più esplicitamente, con le notazioni di fig. 3.2,

$$(3.8) \quad R_j = \frac{\log(r_{j+1}/r_j)}{\Phi \kappa l}, \quad R_A = \frac{1}{\Phi r_A h_A l}, \quad R_B = \frac{1}{\Phi r_{n+1} h_B l}$$

Con ciò la potenza termica trasmessa sarà ottenibile mediante la (2.19) e le temperature  $T_j$  delle varie superfici mediante la (2.20); infine il profilo di temperatura all'interno dei vari strati a struttura cilindrica potrà essere ottenuto generalizzando la (3.5) e più precisamente

$$(3.9) \quad T(r) = \frac{T_{j+1} \log(r/r_j) - T_j \log(r/r_{j+1})}{\log(r_{j+1}/r_j)} \quad (r_j < r < r_{j+1})$$

In analogia a quanto discusso in § 2.5, si possono introdurre delle resistenze di contatto per schematizzare le cadute di temperatura dovute ad una cattiva giunzione; si possono anche introdurre delle sorgenti termiche superficiali, modellabili mediante dei generatori ideali di corrente (di intensità pari alla potenza  $w$  prodotta) come in § 2.6.

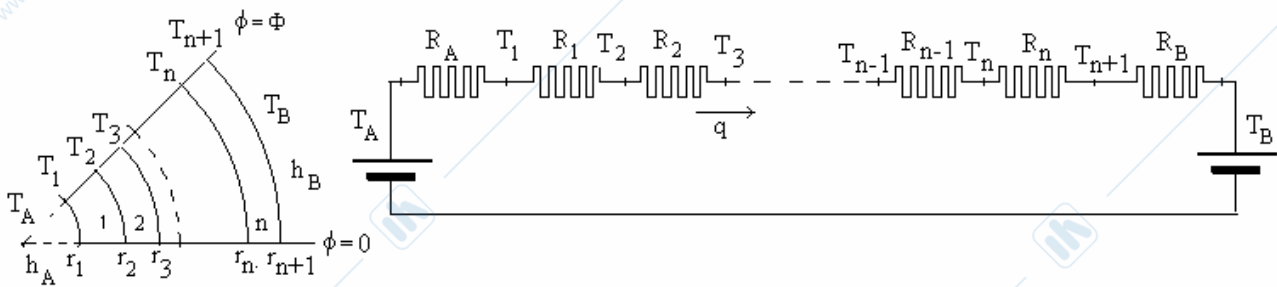


Fig. 3.2 – Parete multistrato a struttura cilindrica: nomenclatura e circuito equivalente.

Nota. La resistenza dello strato a simmetria cilindrica può essere ottenuta anche come la serie delle resistenze di strati elementari di spessore  $dr$ ; poiché ciascuno di questi è quasi piano, la sua resistenza è

$$dR = \frac{dr}{\kappa A} = \frac{dr}{\kappa l \Phi r}$$

Si ha allora

$$R = \frac{1}{\kappa l \Phi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\log(r_2/r_1)}{\kappa l \Phi}$$

come in (3.7).

### 3.3 Cilindro cavo con sorgente uniforme.

Si considera ora il settore di cilindro cavo di fig. 3.1b, con sorgente uniforme  $\varphi_0$  e con condizioni di primo tipo:

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi_0}{\kappa} & \text{per } r_1 < r < r_2 \\ T = T_1 & \text{per } r = r_1 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{array} \right.$$

Anche in questo caso, la soluzione è la somma della (3.5) relativa al problema con sorgente spenta e di quella  $T_{00}(r)$  che si ha in presenza di sorgente con le temperature delle facce pari a 0. Tenendo conto che l'ultimo termine della (3.3) è

$$-\frac{\varphi_0}{4\kappa} r^2$$

con qualche calcolo si ottiene:

$$(3.11) \quad T_{00}(r) = \frac{\varphi_0}{4\kappa} \left[ \frac{r_2^2 \log(r/r_1) - r_1^2 \log(r/r_2)}{\log(r_2/r_1)} - r^2 \right]$$

Inoltre il corrispondente flusso termico relativo alla generica superficie  $r=\text{costante}$  del settore è

$$(3.12) \quad q_{00}''(r) = -\kappa \frac{dT_{00}}{dr} = +\frac{\varphi_0}{4} \left[ 2r - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r \log(r_2/r_1)} \right]$$

Ovviamente in queste relazioni si può eliminare la sorgente volumetrica  $\varphi_0$ , esprimendola in funzione della potenza  $w$  prodotta nell'intero settore

$$\varphi_0 = \frac{2w}{\Phi l (r_2^2 - r_1^2)}$$

Nel caso del problema (3.10), la potenza che attraversa la superficie  $r=\text{costante}$  può, al solito, essere espressa come la somma di quella che attraverserebbe il settore in assenza di sorgente, più il contributo dovuto alla (3.12); si ha cioè

$$(3.13) \quad q(r) = -\kappa A \frac{dT}{dr} = \frac{T_1 - T_2}{R} + A q_{00}''(r) = \frac{T_1 - T_2}{R} + \frac{w}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left[ 2r^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log(r_2/r_1)} \right]$$

in cui si è esplicitato  $A=lr\Phi$  e si è introdotta la potenza totale  $w$ . In particolare le potenze che attraversano le sezioni estreme del settore risultano:

$$(3.14) \quad \begin{cases} q_1 = q(r_1) = \frac{T_1 - T_2}{R} + \frac{w}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left[ 2r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log(r_2/r_1)} \right] \\ q_2 = q(r_2) = \frac{T_1 - T_2}{R} + \frac{w}{2(r_2^2 - r_1^2)} \left[ 2r_2^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log(r_2/r_1)} \right] \end{cases}$$

Si noti che da esse segue  $q_1 + w = q_2$ , come è ovvio dal bilancio energetico.

Può essere interessante studiare un problema che sia l'analogo del problema piano (2.32) e cioè considerare il settore adiabatico in  $r=r_1$ , con temperatura imposta  $T_2$  in  $r_2$ : in modo formale

$$(3.15) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi_0}{\kappa} & \text{per } r_1 < r < r_2 \\ \frac{dT}{dr} = 0 & \text{per } r = r_1 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{cases}$$

Con qualche calcolo si ottiene

$$(3.16) \quad T(r) = T_2 + \frac{\varphi_0}{4\kappa} [r_2^2 - r^2 + 2r_1^2 \log(r/r_2)]$$

e in particolare la temperatura dell'estremo isolato può essere scritta come

$$(3.17) \quad T_1 = T_2 + \frac{w}{2\kappa\Phi l} \frac{r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2 \log(r_2/r_1)}{r_2^2 - r_1^2}$$

In modo analogo, il problema con temperatura  $T_1$  assegnata in  $r=r_1$  ed adiabatico in  $r=r_2$ , e cioè

$$(3.18) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi_0}{\kappa} & \text{per } r_1 < r < r_2 \\ T = T_1 & \text{per } r = r_1 \\ \frac{dT}{dr} = 0 & \text{per } r = r_2 \end{cases}$$

ha come soluzione

$$(3.19) \quad T(r) = T_1 + \frac{\varphi_0}{4\kappa} [r_1^2 - r^2 + 2r_2^2 \log(r/r_1)]$$

La temperatura all'estremo isolato è dunque

$$(3.20) \quad T_2 = T_1 + \frac{w}{2\kappa\Phi l} \frac{r_1^2 - r_2^2 + 2r_2^2 \log(r_2/r_1)}{r_2^2 - r_1^2}$$

### 3.4 Cilindro pieno.

Si considera il caso  $r_1=0$ ; inoltre per semplicità di esposizione si assume  $\Phi=2\pi$  (il caso di  $\Phi$  generico è un'ovvia estensione), di modo che la geometria sia quella di un cilindro vero e proprio.

E' chiaro che in questo caso la superficie interna svanisce e che quindi la prima delle condizioni al contorno in (3.2) scompare; la mancanza di questa informazione sembrerebbe rendere il problema insolubile. In questo paragrafo si mostra che basta assumere che la temperatura resti finita sull'asse: è questa una condizione strettamente dettata dalla realtà fisica.

Cominciamo col considerare il caso di sorgente nulla; l'equazione di Fourier è la prima delle (3.4) con  $0 < r < r_2$ ; è chiaro che per  $r > 0$  il suo integrale generale è ancora  $T(r) = C_1 + C_2 \log r$ . Peraltro, al limite  $r \rightarrow 0$  la temperatura diverge; affinché essa resti finita si deve scegliere  $C_2 = 0$ . Con ciò la temperatura all'interno del cilindro deve essere una costante, uguale al valore ( $T_2$ ) che assume sul bordo; inoltre il flusso termico è nullo in ogni posizione del cilindro. In altre parole, il problema posto può essere formalizzato come:

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 & \text{per } 0 < r < r_2 \\ T \text{ finito} & \text{per } r = 0 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{array} \right.$$

ed ha per soluzione

$$(3.22) \quad T(r) = T_2.$$

Anche se si impone in  $r = r_2$  una condizione convettiva di temperatura esterna  $T_b$ , l'assenza di flusso nel cilindro implica che esso non abbia scambi termici col fluido: esso deve trovarsi a temperatura  $T_b$ , ovvero la soluzione del problema è  $T(r) = T_b$ . Inoltre non si può imporre un flusso termico (condizione di secondo tipo) diverso da zero in  $r = r_2$ , in quanto in disaccordo con il bilancio energetico (cfr. § 2.9); se si impone che sia zero (condizione di adiabaticità) si ha  $T(r) = \text{costante}$ , ma il valore della costante non è determinato.

Dal punto di vista matematico l'equazione di Fourier ha un punto singolare nell'origine e il suo integrale generale è la sovrapposizione (combinazione lineare) di due funzioni una delle quali diverge nel punto singolare; l'eliminazione della funzione divergente è l'informazione che basta per sopperire alla mancanza della condizione al contorno. Nel seguito tale condizione aggiuntiva verrà elencata nella formulazione del problema, come si è fatto in (3.21).

Si vuole ora risolvere lo stesso problema, con una sorgente uniforme ( $\varphi = \varphi_0$ ) nel cilindro, ovvero

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi_0}{\kappa} & \text{per } 0 < r < r_2 \\ T \text{ finito} & \text{per } r = 0 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{array} \right.$$

Al solito, nell'integrale generale

$$T(r) = C_1 + C_2 \log r - \frac{\varphi_0}{4\kappa} r^2$$

si deve porre  $C_2 = 0$ ; la condizione al contorno fornisce poi

$$C_1 = T_2 + \frac{\varphi_0}{4\kappa} r_2^2$$

ed infine si ottiene la soluzione

$$(3.24) \quad T(r) = T_2 + \frac{\varphi_0}{4\kappa} [r_2^2 - r^2]$$

che si identifica con il limite per  $r_1 \rightarrow 0$  della (3.16); inoltre la temperatura sull'asse può essere scritta:

$$(3.25) \quad T_0 = T_2 + \frac{\varphi_0}{4\kappa} r_2^2 = T_2 + \frac{w}{4\pi\kappa d}$$

### 3.5 Esempi.

In questo paragrafo si privilegiano gli aspetti applicativi di quanto discusso in precedenza. In particolare si fa uso dell'analogia elettrica per gli strati senza sorgente, mentre in presenza di sorgente o di cilindro pieno (ove non si ha l'analogia) si usano le soluzioni notevoli sopra riportate. Alcuni dettagli delle soluzioni sono lasciati agli studenti. In ogni caso qui considerato si ha  $\Phi=2\pi$  e i due piani che delimitano le estremità dei cilindri sono adiabatici.

**Esempio 3.1 (Cilindro con rivestimenti).** Si consideri un cilindro (0) di raggio  $r_1$ , con due strati di rivestimento (1 e 2) di raggi esterni  $r_2$  e  $r_3$  (fig. 3.3a); esso è lambito da aria a temperatura  $T_B$  con coefficiente di scambio  $h_B$ ; è nota la conduttività  $\kappa_j$  di ogni elemento (j) e la lunghezza  $l$ . Si calcolino le temperature sull'asse ( $T_0$ ), sul mantello del cilindro ( $T_1$ ), all'interfaccia tra i due strati di rivestimento ( $T_2$ ) ed a contatto con l'aria ( $T_3$ ), nei seguenti casi:

- non ci sono sorgenti,
- c'è una sorgente uniforme in (2) di potenza assegnata  $w$ ,
- c'è una sorgente uniforme in (1) di potenza assegnata  $w$ ,
- c'è una sorgente uniforme in (0) di potenza assegnata  $w$ .

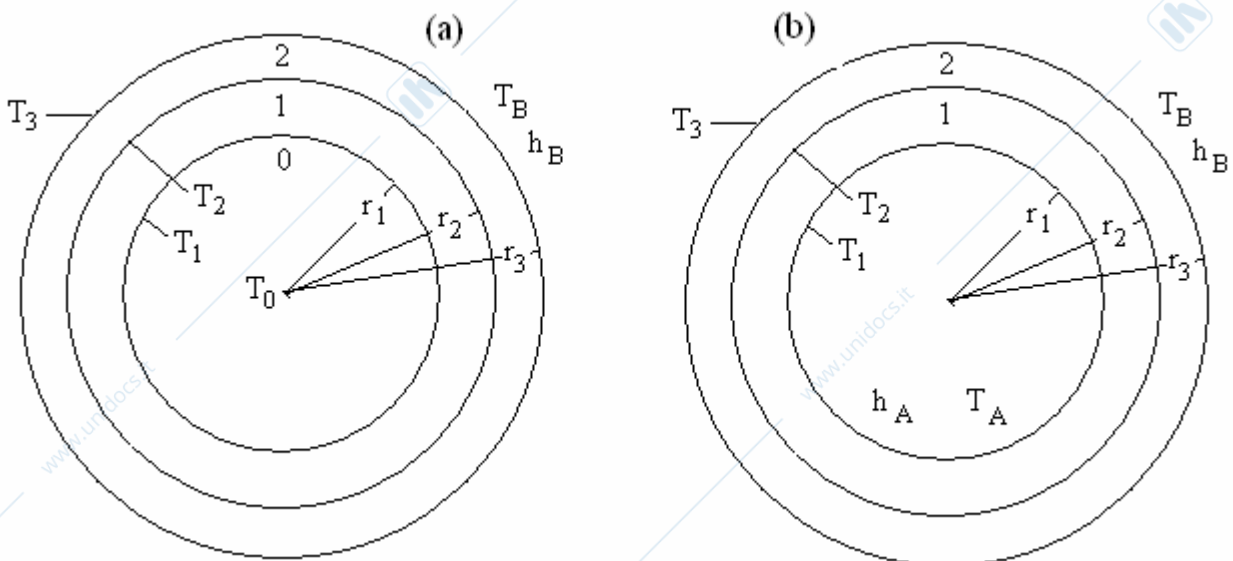


Fig. 3.3 – La geometria e le notazioni per gli esempi 3.1 e 3.2.

(a) Si possono schematizzare con tre resistenze termiche in serie gli strati di rivestimento ( $R_1$  e  $R_2$ ) e la convezione ( $R_B$ ) col fluido, usando la prima e la terza della (3.8).

La soluzione stazionaria nel cilindro (0) è  $T=\text{costante}$  ed implica che esso non scambia potenza con il suo esterno; non fluisce potenza nemmeno nelle tre resistenze e quindi tutto il complesso appare isoterma ed è alla temperatura dell'aria  $T_B$ . Pertanto

$$T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = T_B$$

(b) Il precedente ragionamento può essere qui ripetuto per il cilindro (0) ed il primo strato (1) in cui non c'è produzione; essi risultano alla stessa temperatura e non scambiano con lo strato (2); in altre parole, l'interfaccia 1-2 è adiabatica. Tutta la potenza termica  $w$  prodotta in (2) deve essere smaltita in aria per convezione, per cui

$$T_3 = T_B + w R_B$$

Inoltre il profilo di temperatura in (2) può essere ottenuto dalla (3.17) adattando i pedici ( $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$ ); in particolare in  $r=r_2$  si ha

$$T_2 = T_3 + \frac{w}{4\pi\kappa_2 l} \frac{r_3^2 - r_2^2 - 2r_2^2 \log(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2}$$

e infine

$$T_0 = T_1 = T_2$$

(c) Il cilindro è isotermo e l'interfaccia 0-1 è adiabatica; tutta la potenza  $w$  prodotta in (1) attraversa lo strato (2) e viene smaltita in aria. Pertanto la temperatura  $T_3$  è la stessa del caso precedente

$$T_3 = T_B + w R_B$$

mentre la  $T_2$  differisce da  $T_3$  per la caduta su  $R_2$  e quindi

$$T_2 = T_3 + w R_2 = T_B + w(R_2 + R_B)$$

Il profilo di temperatura in (1) è dato dalla (3.17) e quindi

$$T_1 = T_2 + \frac{w}{4\pi\kappa_1 l} \frac{r_2^2 - r_1^2 - 2r_1^2 \log(r_2/r_1)}{r_2^2 - r_1^2}$$

ed infine

$$T_0 = T_1$$

(d) La potenza  $w$  prodotta in (0) attraversa la serie delle tre resistenze ( $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_B$ ) e quindi le temperature  $T_2$  e  $T_3$  sono le stesse del precedente caso, mentre è

$$T_1 = T_B + w(R_1 + R_2 + R_B)$$

Infine la temperatura nel cilindro è ottenibile dalla (3.25) e sull'asse vale

$$T_0 = T_1 + \frac{w}{4\pi\kappa_0 l}$$

**Esempio 3.2 (Tubo multistrato).** Si consideri un tubo cilindrico (1) di raggi  $r_1$  e  $r_2$ , con un rivestimento (2) di raggio esterno  $r_3$ ; all'interno del tubo si trova un fluido a temperatura uniforme  $T_A$  con coefficiente di scambio  $h_A$ ; all'esterno del rivestimento c'è aria a temperatura  $T_B$  ( $T_A > T_B$ ) con coefficiente di scambio  $h_B$  (fig. 3.3b). Sia  $l$  la lunghezza totale; sono note anche le conduttività termiche  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  del tubo e del rivestimento. Si calcolino le temperature  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  (ai bordi del tubo e del rivestimento) nei seguenti casi:

(a) non c'è alcuna produzione interna;

(b) c'è una produzione uniforme assegnata di potenza  $w$  in (2), con un perfetto isolamento verso l'aria ( $h_B=0$ );

(c) c'è una produzione uniforme di potenza in (2), regolata in modo che non si abbia scambio termico col fluido interno (ma si ha scambio con l'aria:  $h_B \neq 0$ );

(d) c'è una produzione uniforme assegnata di potenza  $w$  in (2).

(a) Il circuito equivalente è quello di fig. 3.2 con  $n=2$ : la potenza che fluisce dal fluido interno all'aria è

$$q = \frac{T_A - T_B}{R_A + R_1 + R_2 + R_B}$$

Pertanto si ha

$$T_1 = T_A - q R_A, \quad T_2 = T_A - q (R_A + R_1), \quad T_3 = T_A - q (R_A + R_1 + R_2).$$

(b) Dato l'isolamento in  $r=r_3$ , il problema nel rivestimento è del tipo (3.18), con l'adattamento dei pedici ( $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$ ); tutta la potenza  $w$  prodotta fluisce verso il fluido interno, attraverso la serie delle resistenze  $R_A$  e  $R_1$ ; questa osservazione permette di calcolare subito le temperature  $T_1$  (sulla superficie interna del tubo) e  $T_2$  (all'interfaccia tubo-rivestimento):

$$T_1 = T_A + w R_A, \quad T_2 = T_A + w (R_A + R_1)$$

La temperatura della faccia adiabatica del rivestimento segue dalla (3.20)

$$T_3 = T_2 + \frac{w}{4\pi\kappa_2 l} \frac{r_2^2 - r_3^2 + 2r_3^2 \log(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2}$$

(c) Dal momento che il fluido interno è più caldo dell'aria esterna è possibile scaldare il rivestimento (2) in modo che non si abbia alcuna trasmissione di potenza termica tra il fluido e l'interfaccia tubo-rivestimento; in altre parole si deve dissipare in (2) una potenza termica  $w$  (da determinare) in modo che nella serie di resistenze  $R_A$  e  $R_1$  non fluisca alcuna potenza termica: ne segue subito

$$T_A = T_1 = T_2$$

L'intera potenza prodotta  $w$  deve essere smaltita per convezione attraverso la resistenza  $R_B$  per cui

$$T_3 = T_B + w R_B$$

Resta da calcolare  $w$  studiando il rivestimento (2); per esso vale il problema (3.15); in particolare dalla (3.17) si trae

$$T_2 = T_3 + \frac{w}{4\pi\kappa_2 l} \frac{r_3^2 - r_2^2 - 2r_2^2 \log(r_3/r_2)}{r_3^2 - r_2^2}$$

Questa e la precedente costituiscono un sistema di due equazioni nelle incognite  $w$  e  $T_2$  che permette di rispondere al quesito.

(d) E' questo il caso più laborioso; il problema della distribuzione di temperatura in (2) è formalizzato in (3.10), con i soliti aggiustamenti dei pedici ( $1 \Rightarrow 2$ ,  $2 \Rightarrow 3$ ) e con le temperature  $T_2$  e  $T_3$  da determinare. Pertanto le potenze ( $q_2$  e  $q_3$ ) che attraversano le sezioni estreme del rivestimento possono essere desunte da (3.14), con il solito aggiustamento dei pedici:

$$q_3 = \frac{T_2 - T_3}{R_2} + \frac{w}{2(r_3^2 - r_2^2)} \left[ 2r_3^2 - \frac{r_3^2 - r_2^2}{\log(r_3/r_2)} \right], \quad q_2 = q_3 - w$$

D'altro canto, lo scambio termico con l'aria esterna è di tipo convettivo e pertanto

$$T_3 - T_B = q_3 R_B$$

Lo scambio con il fluido interno avviene per conduzione nel tubo e poi per conduzione, e quindi attraverso la serie di resistenze  $R_1 + R_A$ ; si ha allora

$$T_A - T_2 = q_2 (R_A + R_1)$$

Le ultime quattro espressioni costituiscono un sistema algebrico lineare nelle incognite ( $T_2$ ,  $T_3$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ); risolto questo, la temperatura sul bordo interno del tubo è subito data da

$$T_1 = T_A - q_2 R_A$$

### 3.6 Spessore critico dell'isolante.

Si consideri una superficie cilindrica di raggio  $r_1$  e temperatura  $T_1$ ; se essa è lambita esternamente da un fluido a temperatura  $T_b$ , lo scambio convettivo verso di esso è caratterizzato da una resistenza termica

$$R_B^0 = \frac{1}{hA_1} = \frac{1}{2\pi r_1 l h}$$

(con  $h$  coefficiente di scambio). L'applicazione di uno strato isolante, di raggio esterno  $r_2$  e conduttività  $\kappa$ , può in qualche caso provocare una diminuzione della resistenza tra la superficie originaria e il fluido; tale resistenza è infatti la somma della resistenza di conduzione dello strato isolante ( $R_2$ ) e di quella convettiva ( $R_B$ ) che differisce da quella sopra calcolata per la presenza del raggio  $r_2$  (in luogo di  $r_1$ ):

$$R_{serie} = R_2 + R_B = \frac{1}{2\pi l} \left[ \frac{1}{\kappa} \log(r_2/r_1) + \frac{1}{hr_2} \right]$$

Mentre la resistenza conduttiva cresce con  $r_2$  (quindi con lo spessore dell'isolante, essendo  $r_1$  fisso), quella convettiva diminuisce in quanto  $r_2$  compare a denominatore. Se si assume, in prima approssimazione (accettabile in molti casi con  $r_2$  piccolo), che il coefficiente  $h$  sia una costante, è facile calcolare il valore di  $r_2$  che minimizza la resistenza (*raggio critico dell'isolante*); si deriva  $R_{serie}$  rispetto a  $r_2$  e si impone che il risultato sia zero

$$\frac{1}{\kappa r_2} - \frac{1}{hr_2^2} = 0 \quad \text{da cui} \quad r_{2,critico} = \frac{\kappa}{h}$$

Il valore minimo  $R_{serie}^*$  della resistenza può essere facilmente calcolato sostituendo  $r_2=r_{2,critico}$  nella sua espressione; si ottiene

$$\frac{R_{serie}^*}{R_B^0} = \left( \frac{hr_1}{\kappa} \right) \left[ 1 + \log\left( \frac{hr_1}{\kappa} \right) \right] = \left( \frac{r_1}{r_{2,critico}} \right) \left[ 1 + \log\left( \frac{r_1}{r_{2,critico}} \right) \right]$$

Il raggio critico dell'isolante non dipende dal raggio  $r_1$ ; se  $r_1 < r_{2,critico}$ , l'aggiunta di isolante sulla superficie originaria diminuisce la resistenza fino a raggiungere il valore minimo in  $r_2=r_{2,critico}$ , mentre ulteriori aggiunte fanno nuovamente aumentare la resistenza; se  $r_1 > r_{2,critico}$ , ogni aggiunta di isolante aumenta la resistenza. L'effetto è dunque importante per il rivestimento di superfici cilindriche di piccolo raggio, con materiali con  $\kappa$  non troppo basso e per piccoli valori del coefficiente di scambio. In particolare se il fluido esterno è aria poco mossa, il coefficiente di scambio  $h$  è dell'ordine di  $5-10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ , e se l'isolante è una plastica o una gomma la conduttività  $\kappa$  è dell'ordine di  $1 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ; ne segue che il raggio critico è dell'ordine di 0,10 m; se l'isolante è una schiuma con  $\kappa$  dell'ordine di  $0,05 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ , il raggio critico scende a meno di un centimetro.

Se, come nell'esempio 3.2a, l'isolante è applicato su un tubo contenente un fluido, la diminuzione della sua resistenza verso l'aria esterna comporta un aumento dello scambio termico tra fluido ed aria. Si invece, come nell'esempio 3.1d, l'isolante è applicato ad un cilindro sede di una sorgente termica interna di potenza assegnata, la diminuzione della resistenza verso l'aria esterna comporta una diminuzione della temperatura del cilindro. Una applicazione pratica di questo caso si ha nell'applicazione di uno strato di isolante su fili elettrici: oltre a provvedere un adeguato isolamento elettrico, l'isolante mantiene il filo a temperatura inferiore rispetto al filo scoperto.

### 3.7 L'equazione di Fourier in coordinate sferiche.

Per i problemi in simmetria sferica si procede in modo analogo a quelli in simmetria cilindrica; pertanto qui si ripetono praticamente gli stessi concetti di § 3.1, con i dovuti aggiustamenti.

Si ricorda dapprima che in coordinate sferiche  $(r, \vartheta, \phi)$  il laplaciano della funzione  $f$  assume la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

per cui l'equazione di Fourier (1.11) può essere riscritta come

$$(3.26) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

Per ottenere soluzioni stazionarie a simmetria sferica  $T(r)$ , occorre:

- che il termine di sorgente dipenda solo dalla coordinata radiale  $r$ ,
- che la geometria sia quella di una sfera cava,
- che le condizioni al contorno siano anche esse simmetriche.

In tali condizioni il gradiente di temperatura è puramente radiale ed ha come componente  $dT/dr$ ; inoltre solo il primo termine a primo membro dei (3.26) non si annulla identicamente. Pertanto la formulazione del problema in simmetria sferica può essere formulato, in analogia a (3.2) e (2.43), come

$$(3.27) \quad \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi(r)}{\kappa} & \text{per } r_1 < r < r_2 \\ -k_1 \frac{dT}{dr} + h_1 T = f_1 & \text{per } r = r_1 \\ k_2 \frac{dT}{dr} + h_2 T = f_2 & \text{per } r = r_2 \end{cases}$$

con il significato delle costanti  $k_1, k_2, h_1, h_2, f_1, f_2$  precisato in §2.9. Inoltre, l'integrale generale della prima riga può essere facilmente ottenuto procedendo in analogia a § 3.1; si ottiene

$$(3.28) \quad T(r) = C_1 - \frac{C_2}{r} - \frac{1}{k} \int \frac{1}{r'^2} dr' \int r''^2 \varphi(r'') dr''$$

La condizione di simmetria sferica  $T(r)$  implica che le superfici isoterme siano delle superfici sferiche concentriche ( $r=\text{costante}$ ); i coni  $\vartheta=\text{costante}$  e i piani  $\phi=\text{costante}$  sono delle superfici adiabatiche. Anche in questo caso se si delimita una porzione di sfera cava con una coppia di tali coni ed una di tali piani bene isolati dall'esterno, si ritrova il problema (3.27); tale generalizzazione è di limitato interesse pratico e nel seguito ci si riferisce alle intere superfici sferiche. Ovviamente, l'area della superficie con  $r=\text{costante}$  è

$$A = 4\pi r^2$$

mentre il volume del guscio di raggi  $r_1$  e  $r_2$  è

$$V = \frac{4\pi}{3} (r_2^3 - r_1^3).$$

### 3.8 Soluzioni elementari in simmetria sferica.

I problemi in simmetria sferica possono essere risolti con gli stessi metodi degli analoghi problemi in simmetria cilindrica: ne riportiamo alcuni.

Il problema della sfera cava, in assenza di sorgente, con condizioni di primo tipo, può essere così formulato

$$(3.29) \quad \begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 & \text{per } r_1 < r < r_2 \\ T = T_1 & \text{per } r = r_1 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{cases}$$

ed ha come soluzione, per  $r_1 > 0$ ,

$$(3.30) \quad T(r) = \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1} \frac{1}{r}$$

Se  $T_1 > T_2$ , il profilo di temperatura è decrescente con  $r$  ed ha la concavità rivolta verso l'alto. Anche in questo caso il flusso varia, ma resta costante la potenza che attraversa la sfera cava

$$(3.31) \quad q = -\kappa A \frac{dT}{dr} = \frac{4\pi\kappa r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R} \quad \text{con} \quad R = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\kappa r_1 r_2} = \frac{1}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Chiaramente la  $R$  è la *resistenza termica conduttiva* della sfera cava. Ciò permette estendere ad una parete multistrato di tipo sferico la stessa analogia elettrica di fig. 3.2, con

$$(3.32) \quad R_j = \frac{1}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_{j+1}} \right), \quad R_A = \frac{1}{4\pi h_A r_1^2}, \quad R_B = \frac{1}{4\pi h_B r_{n+1}^2}$$

Se invece la sfera è piena ( $r_1=0$ ), il problema viene formulato come

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 & \text{per } 0 < r < r_2 \\ T \text{ finito} & \text{per } r = 0 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{array} \right.$$

ed ha per soluzione

$$(3.34) \quad T(r) = T_2.$$

Si riporta anche il problema di una produzione uniforme in una sfera, con la temperatura assegnata sulla sua periferia, la cui formulazione è

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\varphi}{\kappa} & \text{per } 0 < r < r_2 \\ T \text{ finito} & \text{per } r = 0 \\ T = T_2 & \text{per } r = r_2 \end{array} \right.$$

e che ha soluzione

$$(3.36) \quad T(r) = T_2 + \frac{\varphi_0}{6\kappa} (r_2^2 - r^2)$$

che presenta al centro una temperatura (con  $w$  potenza totale prodotta dalla sorgente)

$$(3.37) \quad T_0 = T_2 + \frac{\varphi_0}{6\kappa} r_2^2 = T_2 + \frac{w}{8\pi\kappa r_2}$$

### 3.9 Altro metodo di soluzione.

In §1.1 si è sottolineato come l'equazione di conduzione condensi in sé l'equazione di bilancio energetico in forma locale ed il postulato di Fourier; ciò suggerisce che in casi stazionari ad alta simmetria, quali quelli considerati finora, sia possibile risolvere più rapidamente i problemi di conduzione applicando l'equazione di bilancio in forma integrale ad un volume, opportuno ma generico, tenendo conto del postulato di Fourier. A tal proposito si ricorda che, in condizioni stazionarie, l'equazione integrale di bilancio energetico (1.6') si riduce semplicemente a

$$(3.38) \quad q_{sor} = -q_{fr}$$

In altre parole, l'intera potenza termica prodotta dalla sorgente, nel volume prescelto, viene ceduta all'esterno attraverso la frontiera (il segno  $-$  compare in quanto in termodinamica si usa definire positivo il calore "entrante" nel volume; con  $n_i$  si indica il versore della normale alla frontiera orientato verso l'esterno); se con  $V_c$  si indica il volume in studio e con  $A_c$  la sua frontiera si ha

$$q_{sor} = \int_{V_c} \varphi dV_c, \quad q_{fr} = - \int_{A_c} q_i n_i dA_c = \int_{A_c} \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dA_c.$$

(Si noti che nei precedenti paragrafi si è indicata con  $w$  la potenza termica prodotta nell'intero solido, e cioè  $q_{sor}=w$  se  $V_c=V$ ).

Il metodo basato sulla (3.38) richiede una oculata scelta del volume per il bilancio, in modo da poter esprimere semplicemente la potenza termica scambiata; nel caso di simmetria piana, conviene scegliere, all'interno del solido, uno strato con uno dei due piani che lo delimitano alla coordinata  $x$  generica (non prefissata); analogamente, nel caso di simmetria cilindrica o sferica, conviene scegliere un elemento con una delle due facce a  $r$  generico. Il problema poi viene risolto da una equazione differenziale del primo ordine (invece che del secondo come l'equazione di Fourier). A chiarimento del procedimento, si ritrovano qui alcuni dei risultati ottenuti in precedenza.

*Lastra piana senza sorgente.* Si vuole risolvere il problema (2.3); si sceglie come volume uno strato delimitato dal piano  $x=0$  e dal generico piano in  $x$  ( $x \leq L$ ). Poiché  $q_{sor}=0$ , dalla (3.38) segue che  $q_{fr}=0$  e cioè la potenza entrante in  $x=0$  è uguale a quella uscente alla generica coordinata  $x$ : c'è una sola potenza che attraversa la lastra e quindi

$$-\kappa A \frac{dT}{dx} = q$$

con  $q$  costante da determinare. E' questa una semplicissima equazione differenziale del primo ordine; integrando si ha

$$T = -\frac{q}{\kappa A} x + D$$

La condizione in  $x=0$  impone subito che  $D=T_1$ , mentre quella in  $x=L$  porge direttamente la (2.7); sostituendo le costanti nella precedente espressione si ritrova la soluzione (2.2).

*Strato cilindrico senza sorgente.* Il problema da risolvere è (3.4); il volume in studio è quello delimitato dalla superficie  $r=r_1$  e da quella in  $r$  generico ( $r_1 < r \leq r_2$ ). Anche qui da  $q_{sor}=0$  segue  $q_{fr}=0$ : la potenza uscente dalla generica coordinata  $r$  è uguale a quella entrante in  $r=r_1$ :

$$-\kappa \cdot 2\pi l \cdot \frac{dT}{dr} = q$$

Integrando questa equazione differenziale si ha

$$T = -\frac{q}{2\pi\kappa l} \log r + D$$

con  $q$  e  $D$  costanti da determinare mediante le condizioni al contorno: ovviamente si ritrovano la soluzione (3.5) e l'espressione della resistenza termica (3.7) con  $\Phi=2\pi$ .

Se  $r_1=0$  (cilindro pieno), il problema è (3.21); in questo caso non c'è alcuna potenza entrante e quindi quella uscente dalla generica posizione  $r$  è nulla, ovvero  $dT/dr=0$ ; si ritrova così la (3.22).

*Strato sferico senza sorgente.* Il problema, formalizzato in (3.29), è del tutto simile al precedente; anche qui si deve scrivere che la potenza uscente dalla generica coordinata  $r$  è uguale a quella entrante in  $r=r_1$  (differisce solo l'espressione dell'area):

$$-\kappa \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr} = q$$

Integrando si ha

$$T = \frac{q}{4\pi\kappa} \cdot \frac{1}{r} + D$$

Imponendo le condizioni, si ritrovano la soluzione (3.30) e l'espressione della resistenza termica (3.31).

Anche il caso ( $r_1=0$ ) di sfera piena, problema (3.33), si risolve considerando che la potenza uscente dalla superficie sferica nella generica posizione  $r$  è nulla, ovvero  $dT/dr=0$ ; si ritrova così la (3.34).

*Lastra piana con sorgente uniforme.* Si vuole risolvere il problema (2.32), con la superficie in  $x=0$  adiabatica e la temperatura in  $x=L$  assegnata. Anche qui, si studia lo strato delimitato dal piano  $x=0$  e dal generico piano in  $x$  ( $0 < x \leq L$ ); la potenza prodotta dalla sorgente in tale volume è  $q_{sor} = Ax\varphi_0 = xw/L$ , mentre la potenza uscente dalla superficie non adiabatica è  $-q_{fr} = -\kappa A(dT/dx)$ ; la (3.38) conduce dunque all'equazione differenziale

$$-\kappa \frac{dT}{dx} = \varphi_0 x$$

Integrando ed imponendo la condizione in  $L$ , ritrova la (2.33).

*Strato cilindrico con sorgente uniforme.* Si vuole risolvere il problema (3.15), con la superficie in  $r=r_1$  adiabatica e la temperatura in  $r=r_2$  assegnata. Si procede in stretta analogia al caso precedente: si sceglie come volume in studio lo strato delimitato dalla superficie cilindrica in  $r=r_1$  e dalla generica superficie cilindrica in  $r$  ( $r_1 < r \leq r_2$ ); per la potenza prodotta in tale volume e per quella uscente dal suo estremo non adiabatico si ha, rispettivamente,

$$q_{sor} = \pi(r^2 - r_1^2)l \cdot \varphi_0, \quad -q_{fr} = -\kappa \cdot 2\pi r l \cdot \frac{dT}{dr}$$

Uguagliando queste due quantità si ha l'equazione

$$-\kappa \frac{dT}{dr} = \frac{\varphi_0}{2} \left( r - \frac{r_1^2}{r} \right)$$

e imponendo la condizione in  $r_2$  si ritrova la (3.16).

Nel caso di cilindro pieno ( $r_1=0$ ), e cioè per il problema (3.23), si considera il volume costituito da un cilindro pieno di raggio generico  $r$ ; la potenza prodotta è  $q_{sor} = \pi^2 l \varphi_0$ , mentre quella uscente resta invariata; pertanto l'equazione differenziale si ottiene sostituendo  $r_1=0$  nell'equazione precedente e si ritrova la (3.24).

*Strato sferico con sorgente uniforme.* E' l'analogo in simmetria sferica del precedente caso (non è stato trattato in precedenza); si assume che la superficie in  $r=r_1$  sia adiabatica e che quella in  $r=r_2$  sia assegnata la temperatura  $T_2$ . Si considera come volume di studio lo strato sferico delimitato da  $r=r_1$  e da  $r$  generico; si ha

$$q_{sor} = \frac{4}{3} \pi l (r^3 - r_1^3) \cdot \varphi_0, \quad -q_{fr} = -\kappa \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr}$$

Uguagliando queste due quantità si ha l'equazione

$$-\kappa \frac{dT}{dr} = \frac{\varphi_0}{3} \left( r - \frac{r_1^3}{r^2} \right)$$

che ha come integrale generale

$$T(r) = -\frac{\varphi_0}{6\kappa} \left( r^2 + \frac{2r_1^3}{r} \right) + D$$

Determinando la costante  $D$  in base alla  $T(r_2) = T_2$ , si ha la soluzione cercata

$$T(r) = T_2 + \frac{\varphi_0}{6\kappa} \left( r_2^2 - r^2 - \frac{2r_1^3}{r} + \frac{2r_1^3}{r_2} \right)$$

Il caso di sfera piena, corrispondente al problema (3.35), si ottiene semplicemente ponendo (come sopra)  $r_1=0$ ; si ritrova così la (3.36).

**Appendice: equazione di Fourier in forma generalizzata.**

Molti testi amano scrivere sinteticamente l'espressione dell'equazione di Fourier per il caso monodimensionale simmetrico nella forma

$$(3.39) \quad \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial r} \left( A \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

Se infatti si considera il problema a simmetria piana  $T(x,t)$ , basta porre in (3.38)  $A=\text{costante}$  ed effettuare la sostituzione  $r \Rightarrow x$ , per ritrovare l'equazione

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

Per il problema a simmetria cilindrica  $T(r,t)$ , poiché  $A$  è proporzionale ad  $r$ , dalla (3.38) segue subito

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

in accordo con la (3.1). In modo analogo, per il problema a simmetria sferica  $T(r,t)$ , poiché  $A$  è proporzionale ad  $r^2$ , dalla (3.38) segue

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

in accordo con la (3.26).

## 4. Sbarre e alette in approssimazione monodimensionale.

Vengono presi in considerazione alcuni problemi stazionari che, pur non essendo a rigore monodimensionali, possono essere utilmente trattati in approssimazione monodimensionale; in tale categoria ricadono strutture in cui si abbia una trasmissione del calore essenzialmente lungo una direzione longitudinale (asse  $x$ ), in modo che la temperatura vari essenzialmente lungo tale asse (vari molto poco in direzione trasversale). In pratica sbarre sottili, fili ed alette possono essere studiati, almeno come primo approccio, in questa approssimazione. Infine, nell'ultimo paragrafo, si considera un caso di una lastra con sorgente interna linearmente dipendente dalla temperatura, che dà luogo ad un'equazione di Fourier formalmente simile a quella di una sbarra.

### 4.1 L'equazione di conduzione per una struttura quasi monodimensionale.

A titolo di esempio si considerino le due situazioni bidimensionali stazionarie raffigurate in sezione in fig. 4.1; in entrambi i casi le facce parallele al piano del disegno sono adiabatiche ed i materiali considerati sono omogenei.

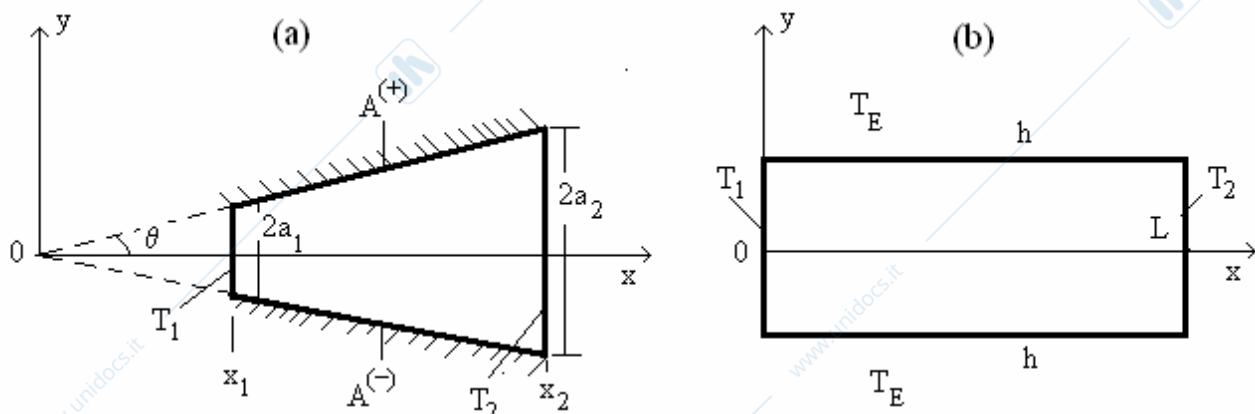


Fig. 4.1 – Due situazioni bidimensionali: cuneo troncato (a) e parallelepipedo (b).

Nel primo caso, il cuneo troncato ha temperatura  $T_1$  sulla base in  $x=x_1$  (di altezza  $2a_1$ ) e temperatura  $T_2$  sulla base in  $x=x_2$  (di altezza  $2a_2$ ), mentre è bene isolato verso l'alto e verso il basso. La configurazione è bidimensionale in quanto le isoterme non possono essere dei piani perpendicolari all'asse  $x$ , dovendo incidere ortogonalmente sulle facce adiabatiche; solo se l'angolo di semiapertura del cuneo  $\vartheta = \arctan(a_1/x_1) = \arctan(a_2/x_2)$  è piccolo, è piccola anche la curvatura delle superfici isoterme e la temperatura varia poco con  $y$ .

Nel secondo caso il parallelepipedo ha la base in  $x=0$  mantenuta alla temperatura  $T_1$  e quella in  $x=L$  alla temperatura  $T_2$ ; inoltre è in contatto con un fluido a temperatura  $T_E$  (con un coefficiente di scambio costante  $h$ ) attraverso le facce rivolte verso l'alto e verso il basso. La configurazione è bidimensionale in quanto sulle facce ove ha luogo lo scambio convettivo, deve essere non nulla la componente  $q_y''$  del flusso termico e pertanto il gradiente di temperatura non è parallelo all'asse  $x$ ; solo se il parallelepipedo è lungo e di piccolo spessore, si può ritenere che la temperatura sia approssimativamente la stessa a parità di  $x$ .

In generale, si consideri un materiale omogeneo (di forma generica), lambito sul suo mantello da un fluido e per il quale si possa applicare l'approssimazione monodimensionale (fig. 4.2). Si vuole esaminare il bilancio energetico di una sua fetta assai sottile, compresa tra le coordinate  $x$  e  $x+dx$ , avente perimetro  $p$ , area  $\sigma$  (possono entrambi variare con  $x$ ) e quindi volume elementare  $dV=\sigma dx$ .

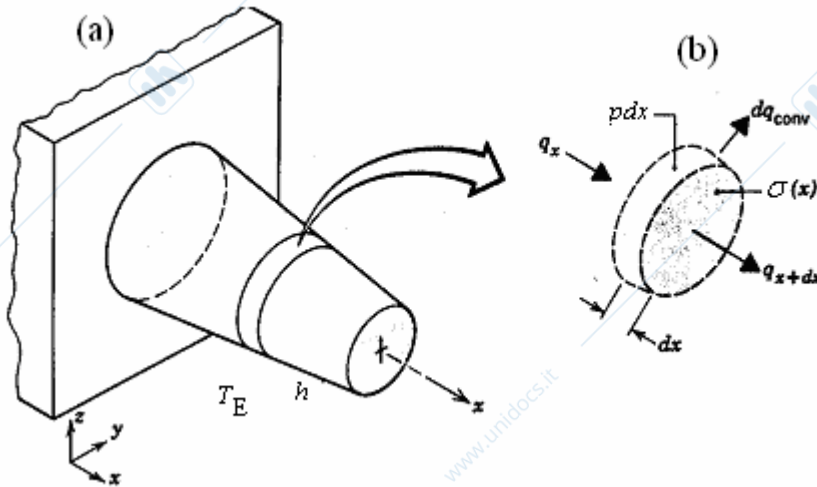


Fig. 4.2 – Sistema quasi monodimensionale lambito da un fluido sul mantello (a) e scambi termici elementari (b).

In essa, attraverso l'area frontale in  $x$  entra per conduzione la potenza termica  $q_x$  ed attraverso l'area in  $x+dx$  esce la potenza  $q_{x+dx}$ :

$$q_x = -\kappa \left( \sigma \frac{dT}{dx} \right) \quad q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx = -\kappa \left( \sigma \frac{dT}{dx} \right) - \kappa \frac{d}{dx} \left( \sigma \frac{dT}{dx} \right) dx$$

Pertanto la potenza acquisita per conduzione dall'elemento in studio è

$$dq_{cond} = dq_x - dq_{x+dx} = \kappa \frac{d}{dx} \left( \sigma \frac{dT}{dx} \right) dx$$

Attraverso il mantello, di area  $p dx$ , si ha uno scambio convettivo di coefficiente  $h$  con un fluido esterno a temperatura  $T_E$  che provoca l'uscita di una potenza

$$dq_{conv} = hp(T - T_E) dx$$

In altre parole lo scambio termico con l'esterno è  $dq_{fr} = dq_{cond} - dq_{conv}$ . La variazione temporale dell'entalpia dell'elemento è

$$\frac{dl}{dt} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \sigma dx$$

mentre un'eventuale sorgente interna contribuisce con una potenza

$$dq_{sor} = \varphi dV = \varphi \sigma dx$$

Pertanto, usando la (1.6'), si trova

$$(4.1) \quad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{hp}{\kappa \sigma} (T - T_E) = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

In tale equazione le quantità  $\sigma$ ,  $p$  e  $\varphi$  sono, in generale, funzioni di  $x$ .

La (4.1) è assai simile all'equazione di Fourier monodimensionale in coordinate cartesiane; il primo termine, derivante dagli scambi per conduzione, tiene conto del fatto che l'area  $\sigma$  della sezione può variare con  $x$ . Compare inoltre un termine aggiuntivo, relativo agli scambi convettivi sul mantello: portando tale termine a secondo membro, la (4.1) assume la forma

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \left[ \varphi - \frac{hp}{\sigma} (T - T_E) \right] = -\frac{\varphi - \varphi^*}{\kappa}$$

in cui si è introdotta la potenza ceduta per convezione dall'unità di volume del solido

$$(4.2) \quad \varphi^* = \frac{dq_{conv}}{dV} = \frac{hp}{\sigma}(T - T_E)$$

Pertanto, nell'approssimazione monodimensionale la perdita superficiale di potenza per convezione viene interpretata come un "pozzo" termico distribuito all'interno del solido.

Infine, in assenza di scambi convettivi ( $h=0$ ), la (4.1) appare formalmente identica alla (3.39); ciò suggerisce che l'approssimazione monodimensionale, con la convezione spalmata come un pozzo termico nel solido, possa essere usata anche in casi a simmetria cilindrica e (più raramente) sferica.

**Esempio 4.1 (Conduzione in un cuneo).** *Si scriva la formulazione esatta del problema del cuneo illustrato in fig. 4.1a e la soluzione in approssimazione monodimensionale.*

Si usa come parametro l'angolo di semiapertura del cuneo; le superfici adiabatiche  $A^{(+)}$  e  $A^{(-)}$  sono individuate rispettivamente da

$$y = \pm x \tan \vartheta \quad (x_1 < x < x_2)$$

ed hanno normali di versori

$$n_i^{(+)} = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta, 0) \quad n_i^{(-)} = (-\sin \vartheta, -\cos \vartheta, 0)$$

Pertanto il problema bidimensionale stazionario in  $T(x,y)$  può essere formulato mediante le

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ T = T_1 \quad (x = x_1, -a_1 < y < a_1) \\ T = T_2 \quad (x = x_2, -a_2 < y < a_2) \\ -n_i^{(+)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \equiv \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial x} - \cos \vartheta \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{su } A^{(+)} \\ -n_i^{(-)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \equiv \sin \vartheta \frac{\partial T}{\partial x} + \cos \vartheta \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{su } A^{(-)} \end{array} \right.$$

che esprimono l'equazione di Fourier e le condizioni al contorno. Nell'approssimazione monodimensionale solo il primo termine della (4.1) è non nullo, con  $\sigma = 4b \tan \vartheta \cdot x$  ( $2b$  è la profondità del cuneo, peraltro ininfluyente); delle condizioni al contorno sopra scritte permangono solo le prime due; si ha dunque il problema in  $T(x)$ , del tutto analogo a (3.4),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (x_1 < x < x_2) \\ T = T_1 \quad (x = x_1) \\ T = T_2 \quad (x = x_2) \end{array} \right.$$

la cui soluzione è, cfr. (3.5),

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\log(x_2/x_1)} \log(x/x_1)$$

Il fatto che la soluzione qui ottenuta per il cuneo sia uguale alla soluzione dell'analogo problema per il settore circolare di § 3.2, chiarisce il tipo di approssimazione introdotta.

#### 4.2 L'equazione della sbarra e soluzioni notevoli.

Si intende per sbarra una struttura quasi monodimensionale a sezione costante (di forma qualsiasi) con scambio convettivo sul mantello (come per il parallelepipedo di fig. 4.1b) verso un fluido esterno di temperatura costante  $T_E$ . Introducendo il salto di temperatura rispetto al fluido,  $\theta = T - T_E$ , la (4.1) può essere riscritta nella forma

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \omega^2 \theta = -\frac{\varphi}{\kappa} \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{hp}{\kappa\sigma}$$

costante positiva. L'equazione lineare a coefficienti costanti (4.3) verrà indicata nel seguito come *equazione della sbarra*. E' chiaro che l'ipotesi che la sbarra possa essere trattata come una struttura quasi monodimensionale significa che, per ogni  $x$ , il salto termico tra centro sbarra e la periferia sia molto piccolo rispetto al salto tra sbarra e fluido; come è noto (Tf. §1.4, cfr. anche § 7.1) ciò è garantito se il numero di Biot è piccolo

$$Bi = \frac{h \cdot (\text{volume})}{\kappa \cdot (\text{area di scambio})} = \frac{h\sigma}{\kappa p} \ll 1$$

Dapprima ci si sofferma sul caso stazionario, in assenza di sorgente, in cui la (4.3) si semplifica in

$$(4.4) \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$$

E' questa un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti: la sua equazione caratteristica  $z^2 - \omega^2 = 0$  ha soluzioni  $\pm \omega$ , per cui l'integrale generale può essere scritto in una delle due forme alternative (ma equivalenti)

$$(4.5) \quad \theta(x) = \begin{cases} C_1 \exp(\omega x) + C_2 \exp(-\omega x) \\ A \sinh(\omega x) + B \cosh(\omega x) \end{cases}$$

ove  $(C_1, C_2)$  oppure  $(A, B)$  sono le costanti che debbono essere determinate in base alle condizioni al contorno, nei due casi.

Una soluzione assai semplice si ha nel caso di una *sbarra molto lunga* ( $L \rightarrow \infty$ ), di cui non interessa la porzione più lontana; si suppone che sia assegnata la temperatura  $T_1$  in  $x=0$ , mentre per grandi  $x$  si impone che la temperatura resti una quantità finita e cioè

$$\theta(0) = T_1 - T_E \equiv \theta_1, \quad \theta(x) \text{ sia finita per } x \rightarrow \infty$$

Conviene scegliere la prima forma della (4.5), in quanto la seconda condizione implica  $C_1=0$ ; con ciò la prima condizione comporta  $C_2=\theta_1$ . Pertanto la soluzione cercata è

$$(4.6) \quad \theta(x) = \theta_1 \exp(-\omega x)$$

che esprime un decadimento esponenziale del salto di temperatura dal suo valore iniziale verso un valore nullo (cioè la temperatura tende ad eguagliare quella del fluido); la (4.6) mostra chiaramente che la porzione iniziale di sbarra, che ha una temperatura significativamente diversa da quella del fluido, ha una lunghezza dell'ordine di

$$\lambda = \frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{\kappa\sigma}{hp}}$$

Tale lunghezza caratteristica è tanto maggiore quanto più la conduttività  $\kappa$  del solido e l'area  $\sigma$  della sua sezione sono elevate; si noti l'influenza del coefficiente di scambio convettivo a denominatore (grandi  $h$  portano a piccoli  $\lambda$ ); è evidente che la condizione di sbarra molto lunga può essere esplicitata nella forma  $L \gg \lambda$ .

E' facile anche calcolare la potenza  $q_{conv}$  che la sbarra cede per convezione al fluido; infatti, per un bilancio energetico dell'intera sbarra, essa deve coincidere con quella  $q_1$  entrante nella sbarra in  $x=0$

$$(4.7) \quad q_{conv} = q_1 = -\kappa\sigma \left( \frac{dT}{dx} \right)_0 = \kappa\sigma\omega\theta_1 = \sqrt{\kappa\sigma hp} (T_1 - T_E)$$

E' possibile riscrivere tale relazione nella forma

$$(4.7') \quad q_{conv} = \frac{T_1 - T_E}{r_\infty} \quad \text{con} \quad r_\infty = \frac{1}{\sqrt{\kappa\sigma hp}}$$

che consente di introdurre la resistenza termica  $r_\infty$  tra la temperatura della radice della sbarra e quella del fluido, come indicato in fig. 4.3; tale resistenza tiene contemporaneamente conto sia della conduzione entro la sbarra che della convezione sul suo mantello (non è possibile separarle).

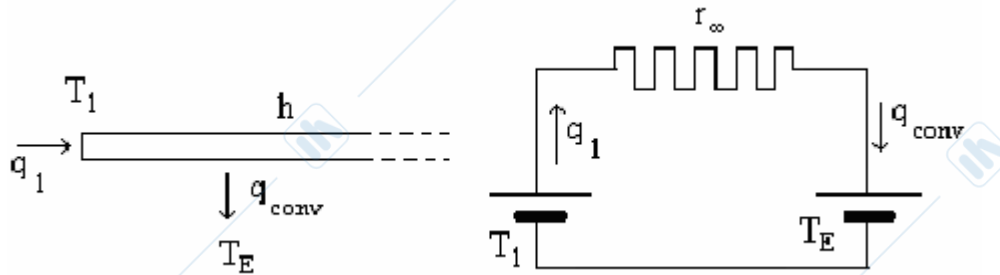


Fig. 4.3 – Sbarra molto lunga e suo circuito equivalente

Le precedenti considerazioni possono essere estese al caso di una sbarra di lunghezza finita (fig. 4.1b) con le temperature assegnate alle due estremità; si hanno le condizioni di primo tipo:

$$\theta(0) = T_1 - T_E \equiv \theta_1 \quad \theta(L) = T_2 - T_E \equiv \theta_2$$

Usando la seconda forma delle (4.5) si ha

$$B = \theta_1, \quad A \sinh(\omega L) + B \cosh(\omega L) = \theta_2 \quad \text{da cui} \quad A = \frac{\theta_2 - \theta_1 \cosh(\omega L)}{\sinh(\omega L)}$$

e la soluzione cercata risulta

$$(4.8) \quad \theta(x) = \frac{\theta_2 - \theta_1 \cosh(\omega L)}{\sinh(\omega L)} \sinh(\omega x) + \theta_1 \cosh(\omega x) = \theta_1 \frac{\sinh[\omega(L-x)]}{\sinh(\omega L)} + \theta_2 \frac{\sinh(\omega x)}{\sinh(\omega L)}$$

L'ultima espressione, ottenuta usando dell'identità  $\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \sinh(y)\cosh(x)$ , mette in luce l'invarianza rispetto allo scambio dei due estremi. In fig. 4.4 è riportato l'andamento del profilo di temperatura lungo la sbarra per 3 valori di  $\omega L$  (è rappresentato un caso in cui  $T_1 > T_2 > T_E$ ).

Si noti che:

- per  $\omega L \ll 1$  l'andamento è pressoché lineare tra le temperature assegnate agli estremi,
- per  $\omega L \gg 1$  buona parte della sbarra ha temperatura assai prossima alla temperatura del fluido esterno; solo le porzioni iniziali e finali, di lunghezza dell'ordine di  $\lambda$ , risentono significativamente della temperatura degli estremi.

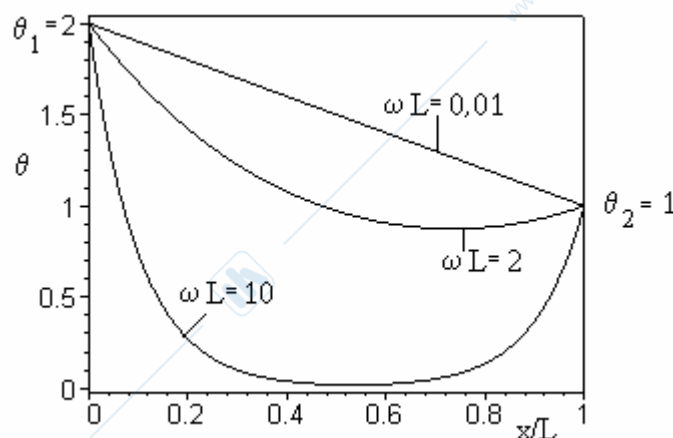


Fig. 4.4 – Andamento del salto di temperatura lungo la sbarra.

Dalla precedente relazione si possono ottenere le potenze “entranti” per conduzione nella sbarra dalle due estremità

$$q_1 = -\kappa\sigma \left( \frac{dT}{dx} \right)_0 = \frac{\theta_1}{r} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{R}, \quad q_2 = \kappa\sigma \left( \frac{dT}{dx} \right)_L = \frac{\theta_2}{r} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{R}$$

con

$$R = \frac{\sinh(\omega L)}{\kappa\sigma\omega} = \frac{\sinh(\omega L)}{\sqrt{\kappa\sigma hp}}, \quad r = \frac{\sinh(\omega L)}{\kappa\sigma\omega[\cosh(\omega L) - 1]} = \frac{\sinh(\omega L)}{\sqrt{\kappa\sigma hp}[\cosh(\omega L) - 1]}$$

Di conseguenza la potenza termica ceduta dalla sbarra al fluido per convezione risulta

$$q_{conv} = q_1 + q_2 = \frac{\theta_1}{r} + \frac{\theta_2}{r}$$

Anche in questo caso, le quantità  $R$  e  $r$  sopra introdotte possono essere interpretate come “resistenze termiche”; la formula sopra ottenuta per  $q_1$  può essere letta dicendo che la potenza termica entrante nella sbarra in  $x=0$  è la somma di due “correnti” termiche proporzionali ai salti termici  $\theta_1=T_1-T_E$  e  $\theta_1-\theta_2=T_1-T_2$  tramite le resistenze  $r$  e  $R$ ; una analoga lettura può essere data per le formule concernenti  $q_2$  e  $q_{conv}$ . Ne segue pertanto che il comportamento termico della sbarra può essere rappresentato da un “triangolo” di tre resistenze ( $R,r,r$ ) come rappresentato in fig. 4.5.

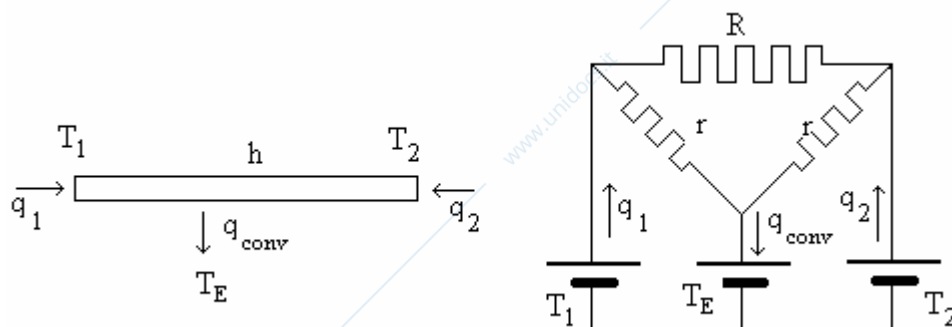


Fig. 4.5 – Sbarra con estremi termostatati e suo circuito equivalente.

Le resistenze termiche introdotte non possono essere interpretate né come resistenze conduttive, né convettive, ma solo come resistenze combinate conduzione-convezione; solo per  $\omega L \ll 1$  si ha

$$R \approx \frac{L}{\kappa\sigma} \quad r \approx \frac{2}{hpL}$$

( $pL$  è l’area del mantello della sbarra); in tal caso la  $R$  è imputabile alla conduzione lungo la sbarra e la  $r$  alla convezione di mezza sbarra verso il fluido esterno.

Nel caso limite di  $\omega L \gg 1$  si ha invece

$$r \approx \frac{1}{\sqrt{hp\kappa\sigma}} = r_\infty$$

mentre la  $R$  diviene molto elevata (il ramo superiore del circuito appare interrotto) e si hanno due correnti termiche indipendenti tra le estremità della sbarra e il fluido.

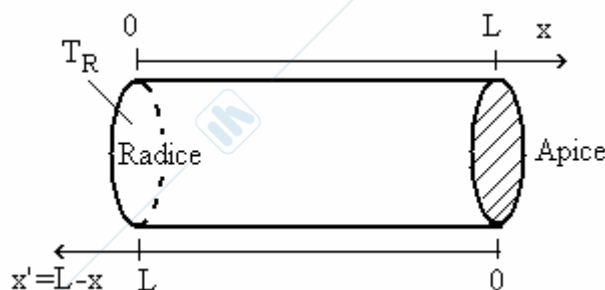


Fig. 4.6 – Schema di una sbarra (o aletta) con apice isolato e notazioni usate.

Una situazione particolarmente semplice, ma significativa (fig. 4.6), si ha quando uno dei due estremi della sbarra (apice) è *adiabatico*, mentre l’altro (radice) ha *temperatura imposta*  $T_R$ ; se si assume la coordinata  $x'$  con origine nell’apice, il problema stazionario  $\theta(x')$  è caratterizzato da

$$(4.9) \quad \begin{cases} \frac{d^2\theta}{dx'^2} - \omega^2\theta = 0 \\ \left(\frac{d\theta}{dx'}\right)_0 = 0 \\ \theta(L) = \theta_R \end{cases}$$

Esprimendo l'integrale generale come sovrapposizione di seno e coseno iperbolici, come in (4.5), la prima condizione impone che il coefficiente del seno sia nullo; imponendo anche la seconda condizione si ottiene

$$(4.10) \quad \theta(x') = \theta_R \frac{\cosh(\omega x')}{\cosh(\omega L)} \quad \text{ovvero} \quad \theta(x) = \theta_R \frac{\cosh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L)}$$

ove, nella seconda forma, si è usata la coordinata  $x=L-x'$  con origine nella radice.

Anche in questo caso è facile osservare che la potenza termica "entrante" nella sbarra dalla radice deve uguagliare (per il bilancio energetico della sbarra) quella scambiata per convezione; si ha cioè

$$q_{conv} = q_R = \kappa\sigma \left(\frac{d\theta}{dx'}\right)_L = \kappa\sigma\omega\theta_R \frac{\sinh(\omega L)}{\cosh(\omega L)} = \kappa\sigma\omega \tanh(\omega L) \cdot (T_R - T_E)$$

A questa espressione si può dare una forma più significativa introducendo l'area della superficie laterale  $A_{lat}=pL$  e la quantità adimensionale

$$(4.11) \quad \eta = \frac{\tanh(\omega L)}{\omega L}$$

che è una funzione del gruppo  $\omega L$  (lunghezza della sbarra rapportata alla lunghezza caratteristica  $\lambda$ ); l'interpretazione fisica come efficienza dell'aletta è discussa in §4.4. L'andamento è indicato in fig. 4.7; per piccoli valori dell'argomento è approssimabile con  $1-(\omega L)^2/3$ , per grandi valori tende a zero con  $1/(\omega L)$ . Con ciò si può scrivere:

$$(4.12) \quad q_{conv} = q_R = \eta h A_{lat} (T_R - T_E)$$

che permette di interpretare tale scambio termico come dovuto ad una resistenza termica  $R^*$ :

$$(4.13) \quad q_{conv} = q_R = \frac{T_R - T_E}{R^*} \quad \text{con} \quad R^* = \frac{1}{\eta h A_{lat}}$$

Nella stessa approssimazione si possono trattare gli effetti termici in *fili* sottili, percorsi da corrente elettrica e pertanto *sede di una sorgente termica dovuta all'effetto Joule*; per un filo a sezione costante, la (4.1) assume la forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \omega^2 (T - T_E) = -\frac{w'}{\sigma\kappa}$$

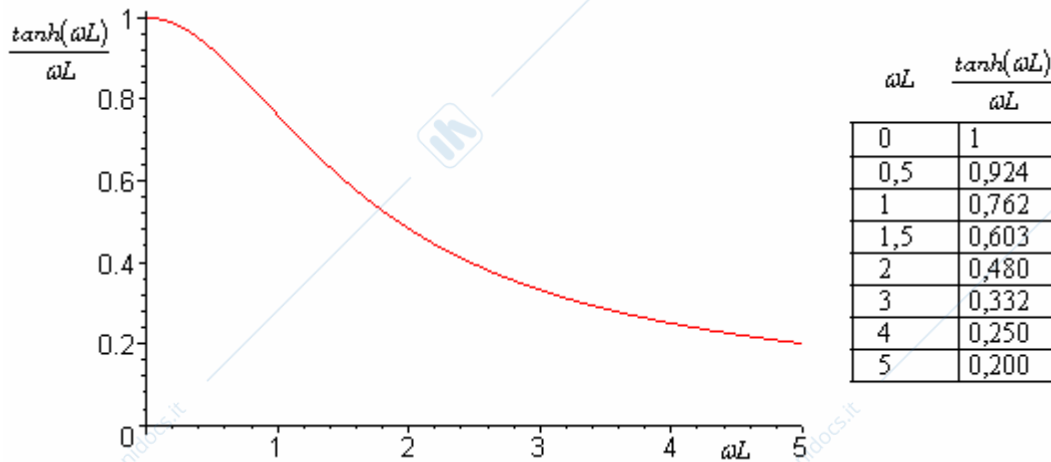


Fig. 4.7 – Andamento dell'efficienza di un'aletta a sezione costante.

avendo indicato con  $w' = \varphi\sigma$  la potenza dissipata per unità di lunghezza del filo; se questa è costante, è conveniente introdurre la nuova temperatura

$$(4.14) \quad T_E^* = T_E + \frac{w'}{hp}$$

ed usare come funzione incognita il salto di temperatura rispetto ad essa:  $\theta = T - T_E^*$ ; con tale accorgimento si trasforma l'equazione non omogenea del filo nell'equazione omogenea (4.3) della sbarra. Il significato fisico della nuova temperatura definita in (4.14) appare evidente se considera un filo molto lungo, in condizioni stazionarie; a grande distanza dall'origine (ove è imposta la condizione al contorno) il filo ha una temperatura uniforme  $T_\infty$ ; il bilancio energetico per un tratto di filo di lunghezza  $\Delta x$  non presenta contributi dovuti agli scambi conduttivi: tutta la potenza prodotta per effetto Joule viene smaltita per conduzione, ovvero  $w'\Delta x = hp\Delta x(T_\infty - T_E)$ . Ne segue che la temperatura asintotica  $T_\infty$  si identifica la  $T_E^*$  definita in (4.14).

Nota. Se si considera la (4.3) in condizioni stazionarie, ma con termine di sorgente non nullo  $\varphi(x)$ , la (4.4) viene generalizzata in

$$(4.4') \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} - \omega^2\theta = -\frac{\varphi(x)}{\kappa}$$

Si può mostrare che il suo integrale generale può essere espresso nella forma

$$(4.5') \quad \theta(x) = C_1 \exp(\omega x) + C_2 \exp(-\omega x) + \frac{\exp(-\omega x)}{2\kappa\omega} \int \exp(\omega x') \varphi(x') dx' - \frac{\exp(\omega x)}{2\kappa\omega} \int \exp(-\omega x') \varphi(x') dx'$$

### 4.3 Esempi.

A chiarimento e a complemento del precedente paragrafo, si riportano diversi esempi.

Esempio 4.2 (Uso del circuito equivalente). *Si deduca la (4.13) dal circuito equivalente di fig. 4.5.*

Se il terminale in  $x=L$  è adiabatico (e non a temperatura imposta), nel circuito equivalente si ha  $q_2=0$  e il ramo a sinistra può essere "aperto"; ne segue che tra il terminale a temperatura imposta (in  $x=0$ ) e il fluido è vista una resistenza, data dal parallelo di  $r$  e  $r+R$ ,

$$\frac{r(r+R)}{2r+R} = \frac{1}{\kappa\sigma\omega \tanh(\omega L)} = \frac{1}{\eta h A_{lat}}$$

Essa è coincidente con la  $R^*$  riportata nella (4.13).

Esempio 4.3 (Sbarra con convezione sull'apice). *Si determini l'andamento di temperatura in una sbarra con temperatura  $T_R$  sulla radice e con l'apice che ha uno scambio termico convettivo di coefficiente  $h'$  col fluido esterno.*

Per le notazioni si fa riferimento alla fig. 4.6; si noti che il coefficiente  $h'$  (sull'apice) può differire da  $h$  (sul mantello), perché il moto del fluido origina una diversa convezione.

Il problema, in analogia a (4.9), può essere formalizzato come

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dx'^2} - \omega^2\theta = 0 \\ -h'\theta(0) = -\kappa\left(\frac{d\theta}{dx'}\right)_0 \\ \theta(L) = \theta_R \end{cases}$$

Scrivendo l'integrale generale  $\theta(x') = A \sinh(\omega x') + B \cosh(\omega x')$ , le condizioni al contorno danno luogo al sistema algebrico

$$h' B = \kappa \omega A \quad A \sinh(\omega L) + B \cosh(\omega L) = \theta_R$$

nelle incognite  $A$  e  $B$ ; con qualche calcolo si può esprimere la soluzione nella forma

$$\theta = \theta_R \frac{\cosh(\omega x') + \frac{h'}{\omega \kappa} \sinh(\omega x')}{\cosh(\omega L) + \frac{h'}{\omega \kappa} \sinh(\omega L)} = \theta_R \frac{\cosh[\omega(L-x)] + \frac{h'}{\omega \kappa} \sinh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L) + \frac{h'}{\omega \kappa} \sinh(\omega L)}$$

che generalizza la (4.10).

**Esempio 4.4 (Sonda che attraversa una parete).** *Un vapore saturo è contenuto in un recipiente, il cui contenitore è costituito da uno strato di ottimo isolante termico dello spessore di 5 cm; attraverso un foro in esso praticato, viene inserita una sonda, schematizzabile come un cilindro di acciaio ( $\kappa = 50 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) di diametro 0,5 cm e lunghezza 20 cm, di cui 5 cm sporgono nel vapore e 10 cm nell'aria all'esterno.*

*Supponendo che la temperatura del vapore sia  $T_v = 120 \text{ C}$  con coefficiente di scambio vapore-sonda  $h_v = 5000 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ , che la temperatura dell'aria sia  $T_a = 0 \text{ C}$  con coefficiente  $h_a = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ , si calcoli la potenza termica ceduta dal vapore all'aria.*

La situazione è rappresentata in fig. 4.8 che riporta anche lo schema elettrico equivalente del problema; infatti le parti della sonda immerse nel vapore e nell'aria possono essere considerate come due sbarre di resistenza termica (4.13), in serie con una sbarra ben isolata sul suo mantello caratterizzata da una resistenza (2.6).

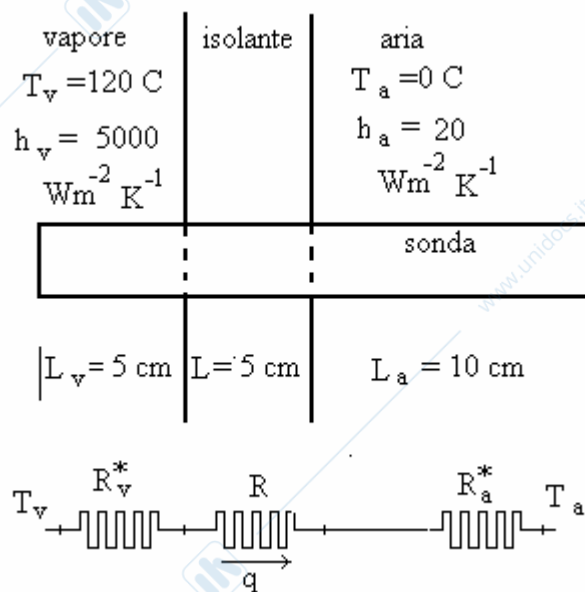


Fig. 4.8 – Schema ed equivalente elettrico per l'esempio 4.4

Si noti che la sonda ha perimetro  $p = \pi D$  ed area  $\sigma = \pi D^2/4$ , ove  $D = 0,005 \text{ m}$  è il diametro; per la parte immersa nel vapore e per quella in aria si ha dunque

$$\omega_v L_v = L_v \sqrt{\frac{4h_v}{\kappa D}} = 14,14 \quad \omega_a L_a = L_a \sqrt{\frac{4h_a}{\kappa D}} = 1,26$$

mentre le tre resistenze sono

$$R_v^* = \frac{1}{\kappa \sigma \omega_v \tanh(\omega_v L_v)} = 3,6 \text{ K/W}, \quad R = \frac{L}{\kappa \sigma} = 50,9 \text{ K/W}, \quad R_a^* = \frac{1}{\kappa \sigma \omega_a \tanh(\omega_a L_a)} = 94,5 \text{ K/W}$$

La potenza termica dispersa attraverso la sonda è dunque

$$q = \frac{T_v - T_a}{R_v^* + R + R_a^*} = 0,805 \text{ W}$$

Esempio 4.5 (Spira con riscaldamento puntuale). Una spira circolare di filo omogeneo, di lunghezza  $2L$  e caratteristiche note, è lambita da aria a temperatura assegnata  $T_E$ , con la quale scambia per convezione. La spira è scaldata puntualmente in  $P$ ; si calcoli la potenza necessaria per mantenere una temperatura assegnata  $T_P$  in  $P$ .

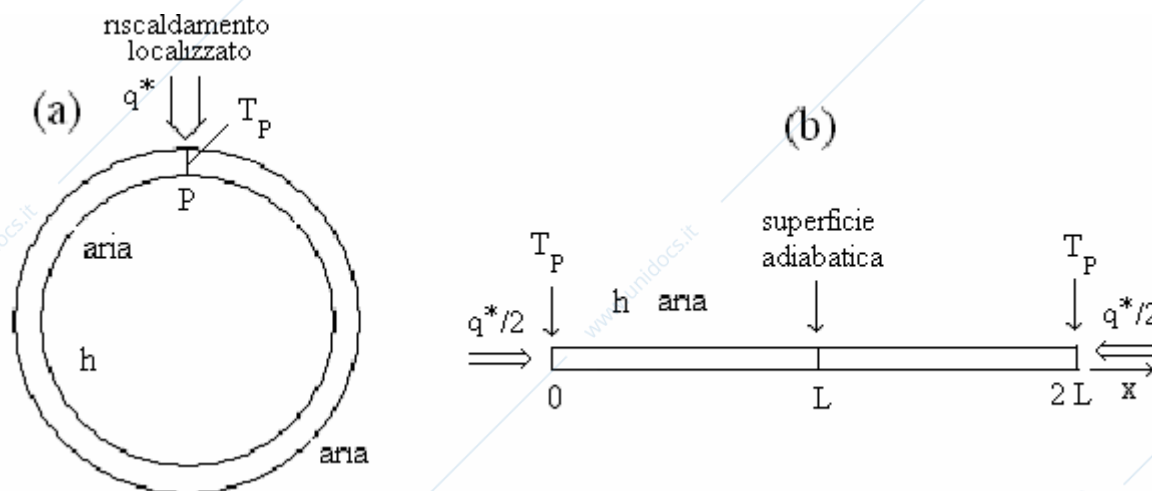


Fig. 4.9 – Schema (a) dell'esempio 4.5 e sbarra diritta equivalente (b).

Supponendo il raggio della spira circolare molto maggiore delle dimensioni trasversali del filo, si adotta l'approssimazione monodimensionale (fig. 4.9): chiaramente la spira equivale ad una sbarretta diritta ottenuta “tagliando” la spira in  $P$ , con entrambi gli estremi alla temperatura  $T_P$ .

Si assume poi il primo estremo come origine della coordinata  $x$ : allora la prima metà della sbarra ha temperatura assegnata  $T_P$  in  $x=0$  ed ha un estremo adiabatico in  $x=L$ ; per il salto di temperatura rispetto alla temperatura dell'aria, si può allora applicare direttamente la (4.10):

$$\theta(x) = \theta_R \frac{\cosh[\omega(L-x)]}{\cosh(\omega L)}$$

La stessa relazione continua a valere, per simmetria, nella seconda parte della sbarra. Per calcolare la potenza  $q^*$  necessaria per il riscaldamento, basta osservare che essa è il doppio di quella che entra nella sbarra nell'origine, ovvero per la (4.12).

$$q^* = 2q_p = 2\eta hpL\theta_p = 2\eta hpL(T_P - T_E)$$

Esempio 4.6 (Filo elettrico con morsetti termostatati). Si consideri un filo elettrico di lunghezza  $L$  (e caratteristiche note) che scambia convettivamente con aria a temperatura  $T_E$ ; si calcoli la potenza elettrica  $w$  con cui deve essere alimentato, se si vuole che raggiunga una temperatura massima prefissata  $T_M$ .

Se si introduce la temperatura di riferimento (4.14)

$$T_E^* = T_E + \frac{w'}{hp} = T_E + \frac{w}{hpL}$$

l'equazione per il salto termico è ancora la (4.4); risultano inoltre assegnati i salti termici agli estremi

$$\theta_1 = \theta_2 = -\frac{w}{hpL}$$

Il profilo di temperatura nel filo si ottiene subito, sostituendo tali valori nella (4.8); si ottiene

$$\theta(x) = -\frac{w}{hpl} \frac{\sinh[\omega(L-x)] + \sinh(\omega x)}{\sinh(\omega L)}$$

Data l'invarianza rispetto allo scambio  $x \leftrightarrow (L-x)$ , il massimo di  $\theta$  è al centro del filo ( $x=L/2$ ) e vale

$$\theta_M = -\frac{2w}{hpl} \frac{\sinh(\omega L/2)}{\sinh(\omega L)}$$

Imponendo l'eguaglianza con

$$\theta_M = T_M - T_E - \frac{w}{hpl}$$

si ricava

$$w = \frac{hpl(T_M - T_E)}{1 - \frac{2 \sinh(\omega L/2)}{\sinh(\omega L)}}$$

Se il filo è molto lungo ( $\omega L \gg 1$ ) il rapporto tra i due seni iperbolici è molto piccolo rispetto ad 1 e risulta

$$w \approx hpl(T_M - T_E)$$

in accordo con l'interpretazione fisica della temperatura  $T_E^*$  definita in (4.14).

**Esempio 4.7** (Filo elettrico con un tratto isolato o di materiale diverso). *Si consideri un filo molto lungo, di caratteristiche note, percorso da corrente elettrica ed in contatto termico convettivo con l'aria esterna (supposta a temperatura costante); per la regione centrale (di lunghezza  $2L$ ) del filo si prendano in esame due diverse situazioni:*

- è termicamente isolata dall'aria,
- è costituita da un tratto di filo di conduttività  $\kappa^*$  diversa e di resistività elettrica doppia (le proprietà geometriche  $p$ ,  $\sigma$  e il coefficiente  $h$  sono le stesse).

Supposta nota la temperatura  $T_\infty$  del filo a grande distanza, si vuole determinare (in entrambi i casi), la distribuzione di temperatura ed il suo valore massimo.

Si indica con  $T(x)$  il salto di temperatura rispetto all'aria; per la simmetria del problema, si sceglie come origine delle coordinate ( $x=0$ ) il punto di mezzo della zona centrale e si considera solo la metà destra ( $x>0$ ), assumendo l'adiabaticità  $dT/dx=0$  in  $x=0$ .

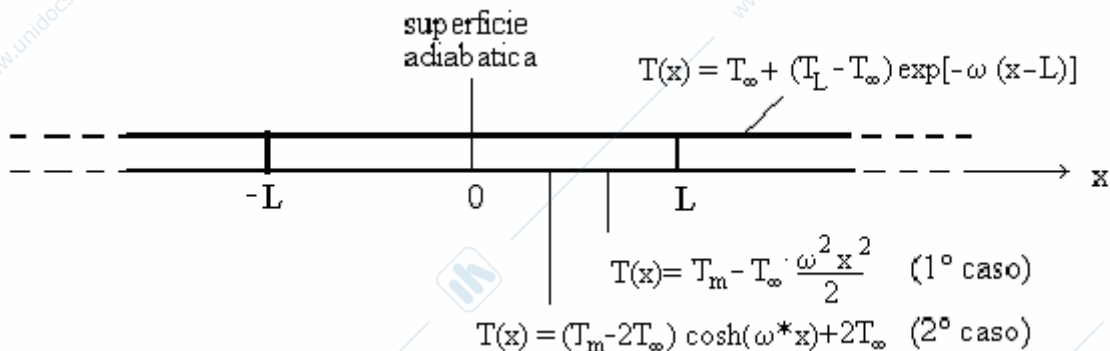


Fig. 4.10 – Schema per l'esempio 4.7.

Per  $x > L$  vale, in entrambe le situazioni, l'equazione della sbarra in condizioni stazionarie con  $w'$  potenza dell'effetto Joule per unità di lunghezza di filo

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \omega^2 T = -\frac{w'}{\kappa \sigma} \quad (x > L)$$

e con la condizione che  $T$  rimanga finita per  $x \rightarrow \infty$ . È evidente che il comportamento asintotico (per grandi  $x$ ), già usato nella (4.14), è dato dall'integrale particolare (costante)

$$T_{\infty} = \frac{w'}{\kappa\sigma\omega^2} = \frac{w'}{hp}$$

il cui valore è un dato del problema. Sommando a questo integrale particolare la soluzione non divergente dell'equazione omogenea si ha per il salto termico:

$$T(x) = T_{\infty} + A \exp(-\omega x) = T_{\infty} + (T_L - T_{\infty}) \exp[-\omega(x-L)] \quad (x > L)$$

Le due espressioni a destra contengono ciascuna una costante ( $A$  oppure  $T_L$ ) da determinare in base al comportamento per  $x < L$  e sono tra loro equivalenti. La seconda è preferibile in quanto il significato della costante  $T_L$  è proprio il salto termico con l'aria nella posizione  $x=L$ ; il suo valore può essere determinato solo studiando il comportamento del filo per  $x < L$ , distinguendo le due situazioni.

1° caso. Per  $0 < x < L$ , vale l'equazione di Fourier monodimensionale con lo stesso effetto Joule

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{w'}{\kappa\sigma} \quad \text{con} \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = 0$$

Scrivendo  $w' = T_{\infty} hp = T_{\infty} \kappa\sigma\omega^2$  la sua soluzione (v. §2.7) diviene

$$T(x) = T_m - \frac{w' x^2}{2\kappa\sigma} = T_m - T_{\infty} \frac{\omega^2 x^2}{2} \quad (0 < x < L)$$

la cui costante arbitraria  $T_m$  ha il significato di salto termico con l'aria nella posizione  $x=0$ , ove chiaramente si ha la temperatura massima del filo.

Restano da determinare le due costanti  $T_m$  e  $T_L$ ; le due condizioni fisiche che consentono la loro determinazione sono la continuità della temperatura e del flusso termico in  $x=L$ : pertanto i valori di  $T(L)$  e  $-\kappa(dT/dx)_L$  devono essere gli stessi quando sono calcolati con le due espressioni sopra trovate. Si ottiene così il sistema:

$$T_m - T_{\infty} \frac{\omega^2 L^2}{2} = T_L \quad (\text{continuità della temperatura})$$

$$T_{\infty} \omega^2 L = \omega(T_L - T_{\infty}) \quad (\text{continuità del flusso})$$

Si noti che in questo caso, in cui da entrambi i lati di  $x=L$  si ha la stessa  $\kappa$ , la continuità del flusso termico implica la continuità del gradiente di temperatura. Risolvendo il sistema si ottiene:

$$T_L = T_{\infty} [1 + \omega L] \quad T_m = T_{\infty} [1 + \omega L + \frac{1}{2} \omega^2 L^2]$$

2° caso. Per  $0 < x < L$ , vale l'equazione della sbarra con conduttività  $\kappa^*$  e  $\omega^* = \sqrt{hp/\sigma\kappa^*}$ ; inoltre essendo la corrente elettrica la stessa, ma la resistività doppia, è  $w'^* = 2w' = 2T_{\infty} hp = 2T_{\infty} \sigma\kappa^* \omega^{*2}$ . Con ciò si ha

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \omega^{*2} T = -\frac{w'^*}{\sigma\kappa^*} = -2T_{\infty} \omega^{*2} \quad \text{con} \quad \left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = 0$$

La soluzione di tale equazione può essere scritta nella forma

$$T(x) = (T_m - 2T_{\infty}) \cosh(\omega^* x) + 2T_{\infty} \quad (0 < x < L)$$

in cui la costante arbitraria  $T_m$  rappresenta nuovamente il salto termico in  $x=0$  e quindi il massimo salto termico. Come sopra, le due costanti  $T_m$  e  $T_L$  possono essere determinate imponendo in  $x=L$  la continuità della temperatura e del flusso termico (in questo caso il gradiente di temperatura non è continuo); si ha

$$(T_m - 2T_{\infty}) \cosh(\omega^* L) + 2T_{\infty} = T_L \quad (\text{continuità della temperatura})$$

$$-\omega^* \kappa^* (T_m - 2T_{\infty}) \sinh(\omega^* L) = \omega\kappa(T_L - T_{\infty}) \quad (\text{continuità del flusso})$$

Risolvendo il sistema si ottiene infine:

$$T_L = T_{\infty} \frac{\kappa\omega \cosh(\omega^* L) + 2\kappa^* \omega^* \sinh(\omega^* L)}{\kappa\omega \cosh(\omega^* L) + \kappa^* \omega^* \sinh(\omega^* L)}$$

$$T_m = T_\infty \frac{2\kappa\omega \cosh(\omega^* L) + 2\kappa^* \omega^* \sinh(\omega^* L) - \kappa\omega}{\kappa\omega \cosh(\omega^* L) + \kappa^* \omega^* \sinh(\omega^* L)}$$

Esempio 4.8 (Aletta piana lambita da due fluidi diversi). Si consideri una lamina di lunghezza  $L$ , spessore  $2a \ll L$  (molto sottile), e larghezza  $2b \gg 2a$  (assai larga); essa separa due gas a differenti temperature ( $T_A$  e  $T_B$ ) con due diversi coefficienti di scambio ( $h_A$  e  $h_B$ ); le superfici in  $z = \pm b$  (parallele al piano del disegno in fig. 4.11) e in  $x=0$  sono adiabatiche, mentre quella in  $x=L$  è mantenuta a temperatura  $T_R$ . Si vuole calcolare in approssimazione monodimensionale, la distribuzione di temperatura nella lamina, e le potenze cedute per convezione a ciascuno dei gas.

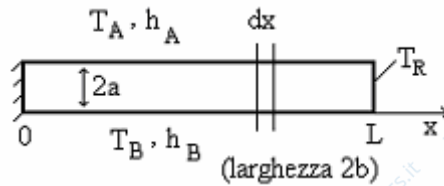


Fig. 4.11 – Notazioni per l'esempio 4.8 (a).

Si consideri un elemento di lastra di lunghezza  $dx$ , area di scambio col singolo gas  $dA = 2b dx$  e temperatura  $T(x)$ ; esso cede convettivamente ai due gas le potenze termiche

$$dq_{conv,A} = h_A dA (T - T_A), \quad dq_{conv,B} = h_B dA (T - T_B)$$

Sommando questi contributi si ottiene la potenza complessivamente ceduta per convezione ai gas

$$dq_{conv} = dq_{conv,A} + dq_{conv,B} = 2h^\circ dA (T - T^\circ)$$

con

$$h^\circ = \frac{h_A + h_B}{2}, \quad T^\circ = \frac{h_A T_A + h_B T_B}{h_A + h_B}$$

Possiamo tenere conto di tale scambio in approssimazione monodimensionale introducendo, come in (4.2), un pozzo termico

$$\varphi^* = \frac{dq_{conv}}{2a dA} = \frac{h^\circ}{a} (T - T^\circ)$$

Scrivendo  $\theta = T - T^\circ$ , l'equazione di conduzione si riduce ancora alla (4.4) e cioè

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{h^\circ}{\kappa a}$$

e si ha la soluzione (4.10), con  $x' \Rightarrow x$ ,

$$\theta(x) = \theta_R \frac{\cosh(\omega x)}{\cosh(\omega L)} \quad \text{ovvero} \quad T(x) = T^\circ + (T_R - T^\circ) \frac{\cosh(\omega x)}{\cosh(\omega L)}$$

La potenza "entrante" nella lamina dalla radice ( $x=L$ ), in base alla (4.12), è

$$q_R = \sigma \kappa \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_L = 4bL \eta h^\circ (T_R - T^\circ)$$

(si noti che l'area della sezione è  $\sigma = 4ab$ , mentre  $A_{lat} = 4bL$  è l'area laterale di tutta la lamina, somma dell'area lambita dal gas A e da quello B); tale potenza coincide chiaramente con quella persa globalmente dalla lamina (ceduta ai gas).

Allo scopo di calcolare la potenza ceduta dalla lamina al gas A, si deve integrare su tutta la faccia lambita dal gas lo scambio elementare sopra considerato e cioè

$$q_{conv,A} = \int dq_{conv,A} = \int_0^L h_A (T - T_A) 2b dx$$

Tenendo conto che

$$T - T_A = \theta + T^\circ - T_A = \theta + \frac{h_B}{h_A + h_B} (T_B - T_A)$$

si ottiene

$$q_{conv,A} = 2bh_A \left[ \int_0^L \theta dx + \frac{h_B}{h_A + h_B} (T_B - T_A) \int_0^L dx \right] = 2bh_A \frac{\theta_R}{\cosh(\omega L)} \int_0^L \sinh(\omega x) dx + 2bL \frac{h_A h_B}{h_A + h_B} (T_B - T_A) =$$

$$= 2bh_A \theta_R \frac{\tanh(\omega L)}{\omega} + 2bL \frac{h_A h_B}{h_A + h_B} (T_B - T_A)$$

Infine, usando la (4.11),

$$q_{conv,A} = 2bLh_A \eta (T_R - T^\circ) + 2bL \frac{h_A h_B}{h_A + h_B} (T_B - T_A)$$

ed in modo analogo

$$q_{conv,B} = 2bLh_B \eta (T_R - T^\circ) + 2bL \frac{h_A h_B}{h_A + h_B} (T_A - T_B)$$

#### 4.4 Superfici alettate.

Alla fine di § 3.6 si è notato, in un caso particolare, come la diminuzione della resistenza convettiva tra un corpo e un fluido (ottenuta aumentando l'area di scambio) può essere utile:

- per accrescere lo scambio termico,
- per mantenere più freddo il corpo (raffreddamento passivo).

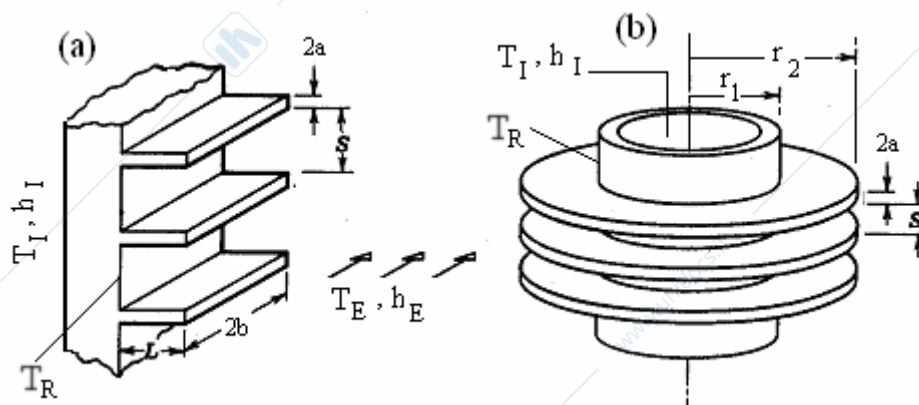


Fig. 4.12 – Alette rettangolari (a) e circolari (b).

In effetti, un modo molto efficace di ridurre la resistenza convettiva, consiste nell'incrementare l'area di scambio, applicando delle alette alla superficie; in fig. 4.12 sono mostrate delle alette rettangolari applicate ad una superficie piana e delle alette circolari applicate ad una superficie cilindrica.

Affinché le alette siano vantaggiose, esse non devono diminuire il preesistente coefficiente di scambio convettivo; a tal scopo, devono essere disposte parallelamente alla velocità del fluido con cui scambiano (come indicato in fig. 4.12) e, in particolare, devono essere disposte verticalmente in presenza di convezione naturale. Lo scambio termico è incrementato aumentando il numero delle alette e ciò può richiedere di collocarle molto ravvicinate tra loro. Però c'è un limite inferiore alla distanza tra due alette, poiché il coefficiente di scambio diminuisce quando gli strati limite del fluido, che si sviluppano sulle superfici delle alette, interferiscono. La distanza tra due alette non può essere minore del doppio dello spessore di strato limite: come ordine di grandezza, un flusso d'aria su una piastra lunga 30 cm con velocità 15 m/s origina uno strato limite di spessore 2,5 mm circa; basse velocità, tipiche della convezione naturale, possono originare strati limiti dello spessore

di 1 cm. Nel seguito supporremo che il coefficiente di scambio  $h$  sia lo stesso sia in presenza delle alette che in loro assenza.

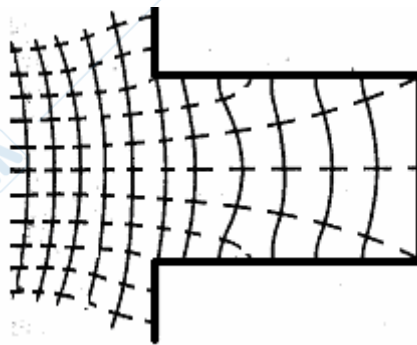


Fig. 4.13 – Configurazione delle isoterme (linee continue) e delle adiabatich (a tratto) nell'intorno di un'aletta.

Per quanto riguarda il campo termico della parete alettata, esso è in generale assai complesso: un'idea del suo andamento attorno ad un'aletta rettangolare, in una situazione bidimensionale stazionaria, è dato dalla fig. 4.13. Per un'analisi quantitativa, fissiamo l'attenzione su una superficie alettata che separa due fluidi; sarà utile schematizzare il problema in successivi passi (fig. 4.14).

- (a) In primo luogo si suppone che i due fluidi siano entrambi isotermi ed abbiano coefficienti di scambio uniformi; data la struttura ripetitiva dell'alettatura, ci si potrà limitare a studiare una singola porzione del solido: ad esempio, questa potrebbe essere la base per uno studio numerico della superficie alettata. Dal punto di vista analitico il problema è ancora assai complicato, data la geometria del contorno del solido.

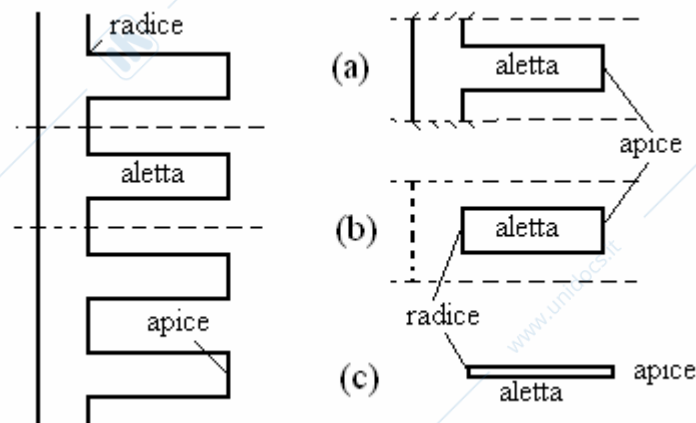


Fig. 4.14 – Rappresentazione di una superficie con alette rettangolari e le schematizzazioni utilizzate.

- (b) Di solito la parete alettata è costituita da un buon conduttore; un secondo passo può consistere nel supporre che le temperature delle due facce della parete, sia quella libera che quella alettata, abbiano temperatura uniforme; ciò significa approssimare le superfici isoterme, nel corpo della parete, con piani paralleli alle facce. Si può allora analizzare la singola aletta, con la sua radice a temperatura  $T_R$  costante ed uguale a quella di tutta la superficie alettata; con tale approccio studieremo l'aletta rettangolare in condizioni stazionarie col metodo di separazione delle variabili nel § 17.
- (c) Se infine si suppone che l'aletta sia lunga e caratterizzata da un numero di Biot piccolo, si può usare l'approssimazione monodimensionale introdotta nei precedenti paragrafi.

Già nell'ambito della schematizzazione (b), si pone il problema di risalire al comportamento globale della superficie alettata, a partire da quello della singola aletta; per questa, indipendentemente dalla sua forma, la potenza termica scambiata col fluido è certamente proporzionale (per la linearità del

problema) al salto di temperatura tra radice e fluido ( $T_R - T_E$ ); introducendo anche l'area di scambio  $A_{al}$  tra aletta e fluido, si può scrivere tale potenza nella forma

$$q_{al} = A_{al} h \eta (T_R - T_E)$$

in cui  $\eta$  è un parametro dimensionale, detto *efficienza termica* dell'aletta, che dipende dalle caratteristiche geometriche e fisiche di questa; chiaramente se tutta la superficie di scambio dell'aletta fosse alla stessa temperatura  $T_R$  della radice la potenza scambiata (ovviamente la massima possibile) sarebbe

$$q_{al}^{max} = A_{al} h (T_R - T_E)$$

Ne segue che l'efficienza dell'aletta può essere definita come il rapporto tra la potenza scambiata dall'aletta e quella che verrebbe scambiata se si trovasse alla temperatura della radice:

$$(4.15) \quad \eta = \frac{q_{al}}{q_{al}^{max}}$$

Si indica con  $A$  l'area totale della parete (in assenza delle alette) e con  $q_p = Ah(T_R - T_E)$  la potenza scambiata dalla parete nuda; se sono presenti  $n$  alette con area  $\sigma$  della sezione alla radice, resta libera un'area  $(A - n\sigma)$  che scambia direttamente una potenza

$$(A - n\sigma)h(T_R - T_E)$$

col fluido. Pertanto, in totale, la potenza scambiata dalla parete alettata è

$$(4.16) \quad q_{p\_al} = (A + nA_{al}\eta - n\sigma)h(T_R - T_E)$$

Si noti che se le alette vengono applicate in modo da non cambiare apprezzabilmente il coefficiente di scambio  $h$ , la potenza scambiata può essere notevolmente più elevata di quella in assenza di alettatura,  $Ah(T_R - T_E)$ . In altri termini la resistenza convettiva della parete alettata

$$(4.17) \quad R_{p\_al} = \frac{1}{(A + nA_{al}\eta - n\sigma)h}$$

può risultare apprezzabilmente più piccola di quella  $R_p = 1/(Ah)$  della parete nuda. Spesso si indica *efficacia* dell'alettatura il rapporto

$$(4.18) \quad \varepsilon_{p\_al} = \frac{q_{p\_al}}{q_p} = \frac{R_p}{R_{p\_al}} = \frac{A + nA_{al}\eta - n\sigma}{A}$$

che quantifica l'incremento dello scambio termico ovvero la riduzione di resistenza termica.

#### 4.5 Aletta rettangolare e sua ottimizzazione.

Un'aletta di sezione  $\sigma$  costante (di forma qualsiasi), con piccolo numero di Biot, può essere studiata in approssimazione monodimensionale; inoltre, dato che l'area  $\sigma$  è piccola rispetto all'area del mantello  $pL$ , lo scambio convettivo che ha luogo sull'apice (dove la temperatura è più prossima a quella del fluido) è piccolo rispetto a quello che ha luogo sul mantello e può essere trascurato; in tali condizioni il profilo di temperatura nell'aletta è dato dalla (4.10), mentre la (4.11) ne fornisce l'efficienza (si veda l'esempio 4.3 se non si vuole trascurare tale scambio).

In questo paragrafo ci si sofferma sul caso particolare di un'aletta rettangolare, di altezza  $2a$  e larghezza  $2b$  (fig. 4.15): ne segue che il perimetro e l'area della sezione sono

$$p = 4(a + b) \quad \sigma = 4ab$$

e quindi i principali parametri dell'aletta possono essere esplicitati come

$$(4.19) \quad \omega^2 = \frac{hp}{\kappa\sigma} = \frac{h(a+b)}{\kappa ab} \Rightarrow \frac{h}{\kappa a}, \quad Bi = \frac{h\sigma}{\kappa p} = \frac{hab}{\kappa(a+b)} \Rightarrow \frac{ha}{\kappa}$$

Le espressioni dopo la freccia valgono al limite per  $b \gg a$  e cioè nel caso, molto frequente, di aletta molto larga. Se è nota la temperatura alla radice, si ricorda che il salto di temperatura  $\theta = T - T_E$  a regime (espresso in funzione dalla coordinata  $x$  indicata in fig. 4.14) è

$$(4.20) \quad \theta(x) = \theta_R \frac{\cosh(\omega x)}{\cosh(\omega L)}$$

per cui il flusso termico entrante nell'aletta dalla radice ( $x=L$ ), e quindi ceduto al fluido esterno, è

$$(4.21) \quad q_R'' = \theta_R \omega \kappa \tanh(\omega L)$$

Se invece è noto il flusso entrante  $q_R''$ , l'espressione della temperatura risulta

$$(4.22) \quad \theta(x) = \frac{q_R'' \cosh(\omega x)}{\omega \kappa \sinh(\omega L)}$$

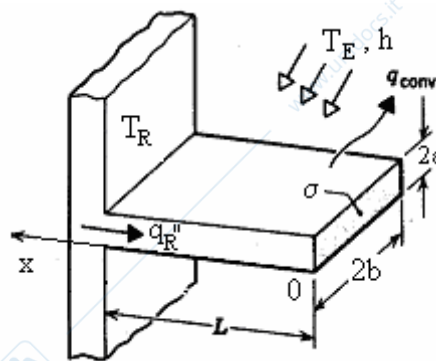


Fig. 4.15 – Le notazioni per l'aletta rettangolare.

Al fine di aumentare lo scambio termico, o meglio realizzare una parete alettata con piccola resistenza termica, conviene prima di tutto aumentare il numero  $n$  delle alette. Ci si può poi porre il quesito di ottimizzare la forma delle alette: ovviamente occorre precisare quale sia la quantità da ottimizzare e quali siano i vincoli imposti. In molti casi è utile limitare la quantità di materiale impiegato o il peso dell'alettatura (ad esempio per impieghi in aeronautica). Si considera allora un'aletta molto larga della quale sia assegnato il volume  $4abL$ , o la massa  $4\rho abL$ : per comodità di scrittura si considera assegnata l'area  $S=aL$ , ad essi proporzionale. Si vuole determinare il semispessore  $a$  (e quindi la lunghezza  $L$ ) in modo da massimizzare la potenza scambiata dall'aletta:

$$(4.23) \quad q_R = \sigma q_R'' = 4\theta_R ab \omega \kappa \tanh(\omega L) = 4\theta_R b \sqrt{h\kappa a} \tanh\left(S \sqrt{\frac{h}{\kappa a^3}}\right)$$

ove si è usata l'espressione di  $\omega$  per aletta larga (4.19) e si è sostituito  $L=S/a$ . La (4.23) ha un massimo quando  $dq_R/da=0$ ; ricordando che

$$\frac{d \tanh(x)}{dx} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

si ha

$$0 = \frac{dq_R}{da} = 2\theta_R b \sqrt{\frac{h\kappa}{a}} \tanh\left(S \sqrt{\frac{h}{\kappa a^3}}\right) - \frac{6\theta_R b S h}{a^2} \frac{1}{\cosh^2\left(S \sqrt{\frac{h}{\kappa a^3}}\right)}$$

Introducendo la quantità ausiliaria

$$(4.24) \quad \xi = \omega L = S \sqrt{\frac{h}{\kappa a^3}}$$

la precedente equazione può essere riscritta nella forma

$$\tanh(\xi) - \frac{3\xi}{\cosh^2(\xi)} = 0$$

Risolvendo numericamente l'equazione trascendente si trova

$$(4.25) \quad \xi_{out} = 1,419$$

da cui segue  $\tanh(\xi_{out}) = 0,889$ ; l'efficienza dell'aletta così ottimizzata è dunque

$$(4.26) \quad \eta_{out} = \frac{\tanh(\xi_{out})}{\xi_{out}} = 0,626$$

Il valore ottimale per il semispessore è, per la (4.24),

$$(4.27) \quad a_{out} = \left( \frac{hS^2}{\xi_{out}^2 \kappa} \right)^{1/3}$$

cui corrispondono

$$(4.27') \quad L_{out} = \left( \frac{\xi_{out}^2 S \kappa}{h} \right)^{1/3} \quad (q_R)_{out} = 4\theta_R b \left( \frac{h^2 \kappa S}{\xi_{out}} \right)^{1/3} \tanh(\xi_{out})$$

Si noti che l'ultima relazione mostra che se si incrementa la quantità di materiale impiegata per un'aletta (e cioè  $S$ ) di un fattore  $m$ , lo scambio termico ottimizzato aumenta solo di un fattore  $m^{1/3}$ ; se invece si impiega lo stesso materiale per costruire  $m$  alette separate, lo scambio aumenta di un fattore  $m^{2/3}$ . Ciò conferma l'importanza di aumentare il numero delle alette.

E' forse più significativo sostituire  $S = a_{out} L_{out}$  nella (4.27) e ricavare il rapporto tra la lunghezza dell'aletta e il suo semispessore in condizioni ottimizzate:

$$(4.28) \quad \frac{L_{out}}{a_{out}} = \xi_{out} \sqrt{\frac{\kappa}{h a_{out}}} = \frac{1,419}{\sqrt{Bi_{out}}}$$

Esso decresce con l'aumentare del numero di Biot in condizioni ottimizzate.

Utilizzando la (4.23) e le definizioni di  $\xi$  e del numero di Biot, la potenza termica scambiata dall'aletta può essere scritta come

$$q_R = 4\theta_R b a h \sqrt{\frac{\kappa}{h a}} \tanh(\xi) = \frac{4\theta_R b a h \tanh(\xi)}{\sqrt{Bi}}$$

quella che sarebbe scambiata dalla stessa superficie  $\sigma$  in assenza di aletta è invece

$$q_{senza} = 4\theta_R b a h$$

Il rapporto tra le due potenze, spesso indicato come *efficacia* dell'aletta, in condizioni ottimizzate risulta

$$(4.29) \quad \frac{(q_R)_{out}}{q_{senza}} = \sqrt{\frac{\kappa}{h a}} \tanh(\xi_{out}) = \frac{0,889}{\sqrt{Bi_{out}}}$$

Pertanto mentre l'efficienza di un'aletta così ottimizzata è indipendente dalle sue caratteristiche fisiche, l'efficacia aumenta col diminuire del numero di Biot.

**Esempio 4.9** (Valutazioni numeriche per un'aletta). *Si consideri una piastra quadrata di lato  $l = 30$  cm, lambita da aria con coefficiente di scambio  $h = 100 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$  e con un salto di temperatura  $\theta_R = 100 \text{ C}$  rispetto all'aria; si intende incrementare lo scambio termico applicando alette in acciaio ( $\kappa = 55 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) di spessore 3 mm con spaziatura di 5 mm con il minimo peso. Si calcoli lo scambio termico previsto e l'efficacia dell'alettatura.*

In assenza di alette, lo scambio convettivo vale

$$q_p = l^2 h \theta_R = 900 \text{ W}$$

Con le notazioni sopra usate si ha:

$$\begin{aligned} a &= \text{semispessore} = 0,0015 \text{ m,} \\ b &= \text{semilarghezza} = l/2 = 0,15 \text{ m,} \\ Bi &= ha/\kappa = 2,73 \cdot 10^{-3} \\ s &= \text{spaziatura} = 0,005 \text{ m.} \end{aligned}$$

In condizioni ottimizzate, la lunghezza dell'aletta deve essere per la (4.28)

$$L = \frac{1,419a}{\sqrt{Bi}} = 0,0408 \text{ m}$$

mentre la potenza scambiata può essere calcolata in base dell'efficienza (4.26) come  $pL\eta h\theta_R$  (con  $p=4b$ ) o mediante l'efficacia (4.29) come  $0,889\sigma h\theta_B / \sqrt{Bi}$ , con  $\sigma=4ab$ ; si ottiene

$$q_R = 153,1 \text{ W}$$

Il numero massimo di alette che si possono applicare con la spaziatura assegnata, si ottiene prendendo la parte intera di  $l/(2a+s)=37,5$  e quindi  $n=37$ .

Si noti che l'alettatura occupa un'area  $2lna$  attraverso la quale scambia la potenza  $nq_R$ ; attraverso la restante area  $l^2-2lna$  la parete scambia la potenza  $(l^2-2lna)h\theta_R$ . In totale la potenza scambiata dall'intera parete alettata risulta

$$q_{p\_al} = nq_R + l(l-2na)h\theta_R = 6232 \text{ W}$$

ed infine, per la (4.18), l'efficacia dell'alettatura è  $\varepsilon_{p\_al} = 6,92$ .

#### 4.6 Equazioni e funzioni di Bessel.

Come indicato alla fine di §4.1, per un disco *sottile* di spessore  $2a$  e scambio convettivo sulle due facce (di coefficiente  $h$  con un fluido a temperatura  $T_E$ ) si può ancora usare la (4.1) con  $x \Rightarrow r$ ; si ha allora

$$p = 4\pi a, \quad \sigma = 4a\pi, \quad \omega^2 = \frac{hp}{\kappa\sigma} = \frac{h}{a\kappa}, \quad Bi = \frac{h\sigma}{\kappa p} = \frac{ha}{\kappa}$$

Scrivendo ancora  $\theta = T - T_E$ , l'equazione del disco diviene, in analogia alla (4.3)

$$(4.30) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \omega^2 \theta = -\frac{\varphi}{\kappa}$$

Nel caso stazionario e in assenza di sorgente, la (4.30) si semplifica in analogia alla (4.4)

$$(4.31) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta}{dr} \right) - \omega^2 \theta = 0$$

La (4.31) è un'equazione lineare omogenea con coefficienti non costanti e con un punto singolare in  $r=0$ ; il suo integrale generale non può essere espresso mediante funzioni elementari. Essa è peraltro un caso particolare dell'*equazione di Bessel modificata*:

$$(4.32) \quad \frac{d}{dz} \left( z \frac{dZ}{dz} \right) - \left( z + \frac{\nu^2}{z} \right) Z = 0 ;$$

se infatti si pone  $z = \omega r$  e  $\nu=0$  si ritrova la (4.31). Questa equazione, che ha  $\nu$  come parametro (detto *ordine*), è stata molto studiata; in queste lezioni verranno soprattutto considerati i casi  $\nu=0$  e  $\nu=1$ .

www.unidocs.it

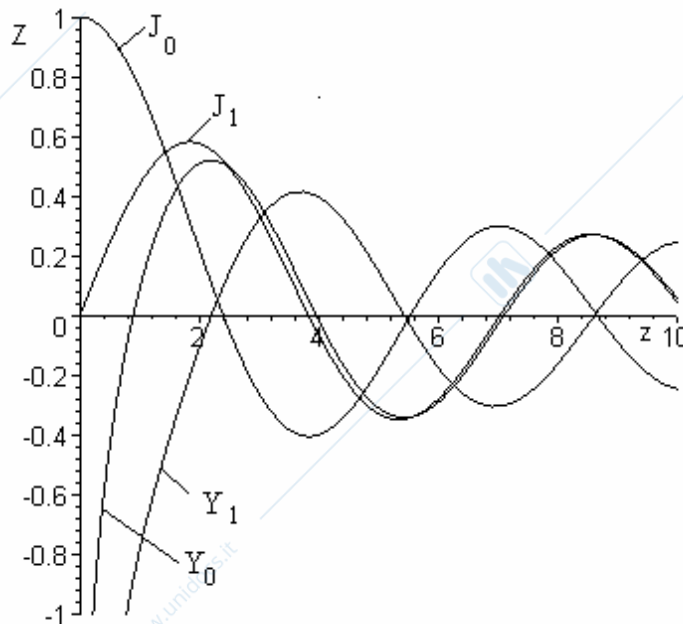
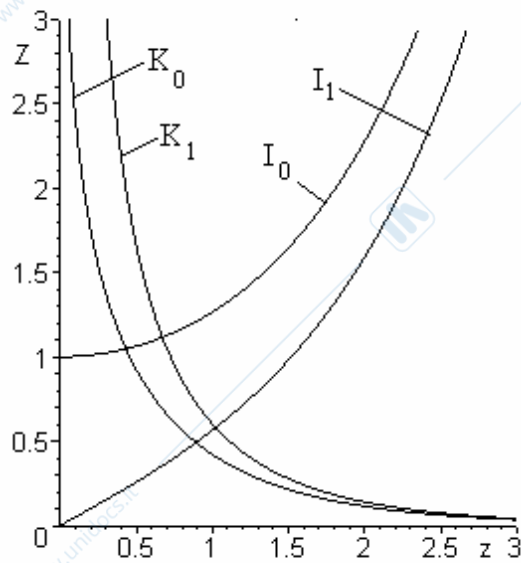


Fig. 4. 16 – Andamento delle varie funzioni di Bessel per  $\nu=0$  e  $\nu=1$ .

L'integrale generale della (4.32) può essere espresso come combinazione lineare di due funzioni  $I_\nu(z)$  e  $K_\nu(z)$ , dipendenti dall'ordine  $\nu$ , la prima delle quali resta finita nel punto singolare  $z=0$ , l'altra invece diverge; tali funzioni sono dette *funzioni di Bessel modificate* di ordine  $\nu$ , rispettivamente di *primo* e *secondo tipo*. Seppure, non esprimibili mediante funzioni elementari, tali funzioni si possono trovare tabellate in vari testi e sono direttamente computate da vari programmi di calcolo; l'andamento di quelle di ordine 0 ed 1 è indicato in fig. 4.16. Si riportano qui alcune proprietà delle funzioni di Bessel modificate:

- In  $z=0$  le funzioni  $I_\nu(z)$  restano finite ed in particolare si ha  $I_0(0)=1, I_\nu(0)=0$  per  $\nu>0$ , mentre le funzioni  $K_\nu(z)$  divergono. L'andamento per piccoli  $z$  è ( $\gamma =$  costante di Eulero  $= 0,57722$ )

$$(4.33) \quad \begin{cases} I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{16} + \dots \\ I_1(z) = \frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} K_0(z) = -\log\left(\frac{z}{2}\right) - \gamma - \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1\right] \frac{z^2}{4} + \dots \\ K_1(z) = \frac{1}{z} + \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\right] \frac{z}{2} + \dots \end{cases}$$

- Per  $z$  grandi, le funzioni di primo tipo divergono, mentre quelle di secondo tipo tendono a zero; più precisamente il loro comportamento asintotico ( $z \rightarrow \infty$ ) è

$$(4.34) \quad I_\nu(z) \approx \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \quad K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z)$$

- Per le derivate e gli integrali delle funzioni di ordine zero si ha

$$(4.35) \quad \begin{cases} \frac{dI_0(z)}{dz} = I_1(z) \\ \frac{dK_0(z)}{dz} = -K_1(z) \end{cases} \quad \begin{cases} \int zI_0(z)dz = zI_1(z) \\ \int zK_0(z)dz = -zK_1(z) \end{cases}$$

Un'equazione strettamente legata alla (4.32), che differisce da essa solo per il cambiamento di segno davanti alla variabile  $z$  nella seconda parentesi, è l'*equazione di Bessel*:

$$(4.36) \quad \frac{d}{dz} \left( z \frac{dZ}{dz} \right) + \left( z - \frac{\nu^2}{z} \right) Z = 0 ;$$

che verrà utilizzata nel seguito del corso. Il suo integrale generale può essere espresso come combinazione lineare di due funzioni  $J_\nu(z)$  e  $Y_\nu(z)$ , dipendenti dall'ordine  $\nu$ , la prima delle quali resta finita nel punto singolare  $z=0$ , l'altra invece diverge; tali funzioni sono dette *funzioni di Bessel* di ordine  $\nu$ , rispettivamente di *primo* e *secondo tipo*. Anch'esse non sono esprimibili mediante funzioni elementari, ma sono tabellate in vari testi e i loro valori sono forniti da vari programmi di calcolo; l'andamento di quelle di ordine 0 ed 1 è indicato in fig. 4.16. Se ne riportano alcune proprietà:

- In  $z=0$  le funzioni  $J_\nu(z)$  restano finite ed in particolare si ha  $J_0(0)=1$ ,  $J_1(0)=0$  per  $\nu>0$ , mentre le funzioni  $Y_\nu(z)$  divergono. L'andamento per piccoli  $z$  è ( $\gamma =$  costante di Eulero  $= 0,57722$ )

$$(4.37) \quad \begin{cases} J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{16} + \dots \\ J_1(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left[ \log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] - \left[ \log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1 \right] \frac{z^2}{2\pi} + \dots \\ Y_1(z) = -\frac{2}{\pi z} + \left[ \log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1 \right] \frac{z}{\pi} + \dots \end{cases}$$

- Per  $z$  grandi, le funzioni di Bessel hanno un comportamento oscillatorio smorzato; più precisamente il loro comportamento asintotico ( $z \rightarrow \infty$ ) è

$$(4.38) \quad J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$

- Per le derivate e gli integrali delle funzioni di ordine zero si ha

$$(4.39) \quad \begin{cases} \frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z) \\ \frac{dY_0(z)}{dz} = -Y_1(z) \end{cases} \quad \begin{cases} \int zJ_0(z)dz = zJ_1(z) \\ \int zY_0(z)dz = zY_1(z) \end{cases}$$

In conclusione, per le applicazioni è utile ricordare che ponendo  $z = \omega r$  le equazioni di Bessel modificate (4.32) assumono la forma

$$(4.32') \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dZ}{dr} \right) - \left( \omega^2 r + \frac{\nu^2}{r} \right) Z = 0$$

ed hanno come integrale generale

$$AI_\nu(\omega r) + BK_\nu(\omega r)$$

Le equazioni di Bessel (4.36) assumono invece la forma

$$(4.36') \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dZ}{dr} \right) + \left( \omega^2 r - \frac{\nu^2}{r} \right) Z = 0$$

ed hanno come integrale generale

$$AJ_\nu(\omega r) + BY_\nu(\omega r)$$

#### 4.7 Disco e aletta circolare.

Ritornando all'equazione del disco (4.31), il suo integrale generale può essere scritto come la combinazione lineare delle funzioni di Bessel modificate di ordine zero di argomento  $z = \omega r$ , e cioè

$$(4.40) \quad \theta(r) = AI_0(\omega r) + BK_0(\omega r)$$

Si pone come condizione al contorno che la temperatura sulla periferia, in  $r=r_1$ , sia tale che  $\theta(r_1) = \theta_1$ ; inoltre si richiede che essa sia finita in  $r=0$ . Ciò implica  $B=0$  e  $\theta_1 = AI_0(\omega r_1)$ ; si ha dunque

$$(4.41) \quad \theta(r) = \theta_1 \frac{I_0(\omega r)}{I_0(\omega r_1)}$$

La potenza entrante nel disco in  $r=r_1$  e ceduta per convezione al fluido può essere calcolata come

$$(4.42) \quad q_1 = \left[ \kappa \sigma \frac{d\theta}{dr} \right]_{r_1} = 4\pi\kappa\alpha r_1 \left( \frac{d\theta}{dr} \right)_{r_1} = \theta_1 \frac{4\pi\kappa\alpha r_1}{I_0(\omega r_1)} \left( \frac{dI_0(\omega r)}{dr} \right)_{r_1} = \theta_1 4\pi\omega\kappa\alpha r_1 \frac{I_1(\omega r_1)}{I_0(\omega r_1)}$$

in quanto, per la regola di derivazione in (4.35), si ha  $dI_0(\omega r)/dr = \omega I_1(\omega r)$ . Naturalmente allo stesso risultato si perviene integrando lo scambio convettivo elementare  $hpdr\theta$  tra  $r=0$  e  $r=r_1$  ed utilizzando la regola di integrazione in (4.35), ovvero  $\int rI_0(\omega r)dr = rI_1(\omega r)/\omega$ : si ha infatti

$$q_1 = \int_0^{r_1} hp\theta dr = \theta_1 \frac{4\pi h}{I_0(\omega r_1)} \int_0^{r_1} I_0(\omega r) r dr = \theta_1 \frac{4\pi h}{I_0(\omega r_1)} \frac{r_1 I_1(\omega r_1)}{\omega} = \theta_1 4\pi\omega\kappa\alpha r_1 \frac{I_1(\omega r_1)}{I_0(\omega r_1)}$$

Consideriamo ora un'aletta circolare (cfr. fig. 4.12) di raggi  $r_1$  ed  $r_2$ , con la radice mantenuta a temperatura che eccede di  $\theta_R$  quella dell'aria e con l'apice adiabatico; in altre parole si affronta il problema:

$$(4.43) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\theta}{dr} \right) - \omega^2 \theta = 0 & \text{in } r_1 < r < r_2 \\ \theta = \theta_R & \text{in } r = r_1 \\ \frac{d\theta}{dr} = 0 & \text{in } r = r_2 \end{cases}$$

L'integrale generale è ancora espresso dalla (4.40) mentre le condizioni al contorno forniscono

$$\theta_R = AI_0(\omega r_1) + BK_0(\omega r_1) \quad 0 = \omega AI_1(\omega r_2) - \omega BK_1(\omega r_2)$$

e quindi

$$(4.44) \quad \theta(r) = \theta_R \frac{I_0(\omega r)K_1(\omega r_2) + K_0(\omega r)I_1(\omega r_2)}{I_0(\omega r_1)K_1(\omega r_2) + K_0(\omega r_1)I_1(\omega r_2)}$$

La potenza entrante nell'aletta in  $r=r_1$  e ceduta al fluido per convezione è

$$(4.45) \quad q_R = - \left[ \kappa \sigma \frac{d\theta}{dr} \right]_{r_1} = -\theta_R 4\pi\omega\kappa\alpha r_1 \frac{I_1(\omega r_1)K_1(\omega r_2) - K_1(\omega r_1)I_1(\omega r_2)}{I_0(\omega r_1)K_1(\omega r_2) + K_0(\omega r_1)I_1(\omega r_2)}$$

Si può introdurre l'efficienza dell'aletta in base alla definizione (4.15); poiché l'area totale di scambio dell'aletta è  $A_{al} = 2\pi(r_2^2 - r_1^2)$  si ha

$$(4.46) \quad \eta = \frac{q_R}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)h\theta_R} = \frac{2r_1}{\omega(r_2^2 - r_1^2)} \frac{K_1(\omega r_1)I_1(\omega r_2) - I_1(\omega r_1)K_1(\omega r_2)}{K_0(\omega r_1)I_1(\omega r_2) + I_0(\omega r_1)K_1(\omega r_2)}$$

Può essere interessante considerare il caso di aletta molto estesa ( $\omega r_2 \gg 1$ ). Si possono usare le formule asintotiche indicate in (4.34), oppure si può osservare che per  $r_2 \rightarrow \infty$ , si dovrà avere  $A=0$  nella (4.40), in quanto la temperatura deve rimanere finita e la funzione  $I_0(\omega r)$  diverge; si ricava allora subito

$$\theta(r) = \theta_R \frac{K_0(\omega r)}{K_0(\omega r_1)} \quad \text{e} \quad q_R = - \left[ \kappa \sigma \frac{d\theta}{dr} \right]_{r_1} = \theta_R 4\pi\omega\kappa\alpha r_1 \frac{K_1(\omega r_1)}{K_0(\omega r_1)}$$

#### 4.8 Aletta con profilo triangolare.

Se si ripensa all'aletta rettangolare studiata in §4.5, si può notare che procedendo verso l'apice (al decrescere di  $x$ ) la potenza termica che attraversa la sezione generica diminuisce. E' del tutto intuitivo pensare che il materiale conduttore, che forma l'aletta, non sia sfruttato adeguatamente: la sua sezione  $\sigma$  è troppo elevata per bassi  $x$ , ove la potenza è bassa, mentre è carente per alti  $x$  ove la potenza è alta; la condizione ottimale dovrebbe portare ad un flusso termico indipendente da  $x$ . Questa osservazione suggerisce che un'aletta a profilo triangolare (fig. 4.17), con l'apice a punta, possa essere più efficiente. Si suppone inoltre che essa sia molto larga ( $2b \gg 2a$ ) e si indica con  $2a$

l'altezza a metà aletta (pari all'altezza media dell'aletta) per cui  $4a$  è l'altezza alla radice; la situazione è assai simile a quella del cuneo di § 4.1 (cfr. anche esempio 4.1), ma con le facce verso l'alto e verso il basso che scambiano col fluido (e con  $x_1=0$ ,  $a_1=0$ ,  $x_2=L$ ,  $a_2=2a$ ).

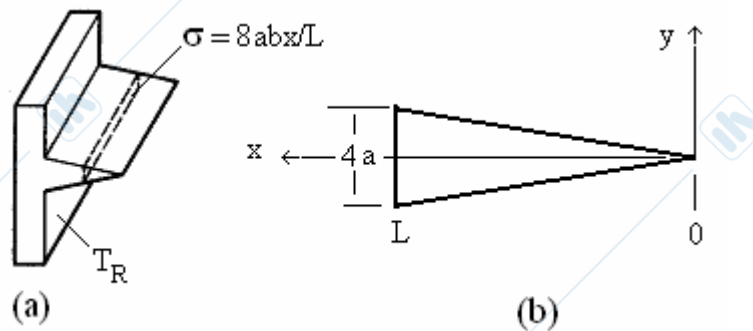


Fig. 4.17 - Schema e notazioni per l'aletta a profilo triangolare.

Si ha

$$p = 4b \qquad \sigma = 4by = 8ab \frac{x}{L} \qquad \frac{hp}{\kappa\sigma} = \frac{h}{\kappa a} \frac{L}{2x} = \omega_0^2 \frac{L}{2x}$$

in cui il parametro

$$\omega_0^2 = \frac{h}{\kappa a}$$

è stato definito in modo che si identifichi con  $\omega^2$  per un'aletta rettangolare che abbia un'altezza uguale all'altezza media dell'aletta qui in studio (cioè le due alette abbiano stessa area  $S=4ab$  e stesso volume, a parità di  $L$  e  $b$ ).

In condizioni stazionarie e in assenza di sorgente ( $\varphi=0$ ), la (4.1) diviene

$$(4.47) \quad \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\theta}{dx} \right) - \frac{1}{2} \omega_0^2 L \theta = 0$$

per la quale imponremo una condizione al contorno di primo tipo sull'apice  $\theta(L)=\theta_R$  e richiederemo che la  $\theta$  non diverga in  $r=0$ . La (4.47) può essere ridotta ad un'equazione modificata di Bessel con un'opportuna trasformazione della variabile indipendente  $x$ . Se poniamo  $x=\beta z^2$ , da cui segue

$$z = \sqrt{\frac{x}{\beta}}, \quad \frac{dx}{dz} = 2\beta z, \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\beta z} \frac{df}{dz},$$

la (4.47) si trasforma in

$$\frac{d}{dz} \left( z \frac{d\theta}{dz} \right) - (2\beta\omega_0^2 L)_z \theta = 0$$

Se pertanto si sceglie il valore di  $\beta$  in modo che il termine in parentesi sia uguale ad 1, e cioè sia

$$\beta = \frac{1}{2\omega_0^2 L},$$

si ottiene un'equazione di Bessel modificata di ordine  $\nu=0$ ; se ne conclude che l'integrale generale della (4.47) è

$$\theta = AI_0(z) + BK_0(z) = AI_0(\omega_0 \sqrt{2Lx}) + BK_0(\omega_0 \sqrt{2Lx})$$

La condizione che la  $\theta$  rimanga finita per  $x \rightarrow 0$  implica  $B=0$ ; imponendo poi la condizione al contorno si ottiene il profilo di temperatura nell'aletta

$$(4.48) \quad \theta = \theta_R \frac{I_0(\omega_0 \sqrt{2Lx})}{I_0(\omega_0 L \sqrt{2})}$$

La potenza entrante nell'aletta dalla radice e ceduta al fluido esterno è dunque

$$q_R = \left( \kappa \sigma \frac{d\theta}{dx} \right)_L = \theta_R \frac{8ab\kappa}{I_0(\omega_0 L \sqrt{2})} \left[ \frac{dI_0}{dz} \frac{dz}{dx} \right]_{x=L} = \theta_R \frac{8ab\omega_0\kappa}{\sqrt{2}} \frac{I_1(\omega_0 L \sqrt{2})}{I_0(\omega_0 L \sqrt{2})}$$

Poiché l'area di scambio dell'aletta è

$$A_{al} = \frac{4bL}{\cos \vartheta} \approx 4bL$$

(in approssimazione monodimensionale), con qualche calcolo la precedente relazione può essere riscritta nella forma

$$(4.49) \quad q_R = hA_{al}\eta\theta_R \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 L} \frac{I_1(\omega_0 L \sqrt{2})}{I_0(\omega_0 L \sqrt{2})}$$

efficienza dell'aletta triangolare. La fig. 4.18 mostra come, a parità di volume dell'aletta, quella triangolare presenti una maggiore efficienza.

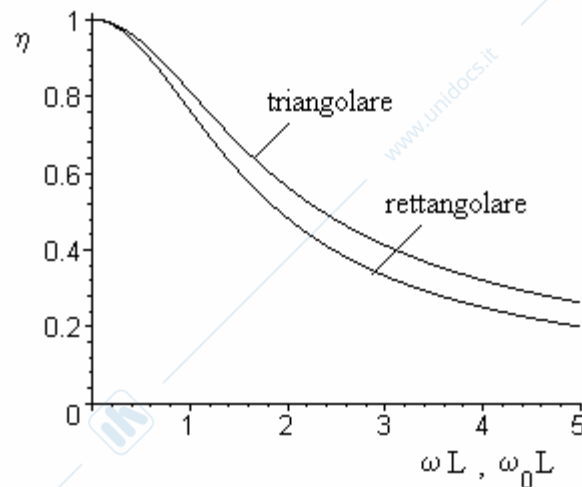


Fig. 4.18 – Confronto tra l'efficienza di un'aletta rettangolare e triangolare, a parità di volume.

#### 4.9 Lastra con sorgente interna dipendente dalla temperatura.

Nell'equazione di Fourier si considera che il termine di sorgente sia funzione della posizione ed eventualmente del tempo; in qualche caso esso può invece risultare funzione della temperatura, come ad esempio nel caso del pozzo termico, che simula la convezione in approssimazione monodimensionale, introdotto in § 4.1. In questo paragrafo si vuole mostrare l'effetto di una sorgente positiva, la cui potenza aumenta con la temperatura; per semplicità si considera che tale aumento sia lineare. Si realizza così un'equazione formalmente simile (c'è solo la differenza di un segno) a quella di una sbarra con un estremo adiabatico e l'altro a temperatura assegnata e cioè al problema stazionario (4.9); ad onta di tale analogia, le condizioni fisiche sono assai diverse.

Più precisamente si considera il caso di una parete omogenea, di spessore  $L$  ed adiabatica in  $x=0$ , sede di una produzione di calore volumetrica, uniformemente distribuita, che dipende dalla temperatura; si assume che tale dipendenza si accenda al di sopra di un valore di soglia  $T_s$  e che per semplicità abbia un incremento lineare; in formula

$$(4.50) \quad \varphi = \begin{cases} \chi(T - T_s) & \text{per } T > T_s \\ 0 & \text{per } T < T_s \end{cases}$$

con  $\chi$  fattore positivo che esprime la potenza sviluppata dalla sorgente per unità di volume e per un incremento termico di un grado al di sopra del valore di soglia. Si vuole studiare l'andamento della temperatura a regime se in  $x=L$  è assegnata la una temperatura  $T_L > T_s$ ; insieme a  $\chi > 0$ , ciò assicura

che la temperatura nella lastra sia sempre maggiore di  $T_s$  e che quindi si possa semplicemente sostituire la prima riga della (4.50) nell'equazione di Fourier.

Si assume come funzione incognita il salto termico  $\theta(x) = T(x) - T_s$  rispetto alla temperatura di soglia e si pone  $\Omega = \sqrt{\chi/\kappa}$ ; l'equazione di Fourier diviene

$$(4.51) \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} + \Omega^2\theta = 0 \quad \text{per } (0 < x < L),$$

mentre le condizioni al contorno sono

$$(4.52) \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 = 0, \quad \theta(L) = \theta_L \equiv T_L - T_s$$

Dal punto di vista formale, il presente problema si differenzia da (4.9) solo per la sostituzione  $\omega^2 \Rightarrow -\Omega^2$ ; l'integrale generale è dunque del tipo  $A \cos(\Omega x) + B \sin(\Omega x)$ .

Per la condizione di adiabaticità nell'origine è  $B=0$  e quindi  $\theta(x) = A \cos(\Omega x)$ . La costante  $A$  deve essere determinata in base alla condizione in  $x=L$ ; inoltre  $\theta$  deve essere positivo in tutta la lastra. Questo requisito impone che  $\cos(\Omega x)$  non cambi di segno in  $0 < x < L$  e quindi

$$(4.53) \quad \Omega L < \frac{\pi}{2} \quad \text{ovvero} \quad \chi < \frac{\pi^2 \kappa}{4L^2}$$

Al di fuori di questa limitazione non si hanno soluzioni valide e cioè non si può raggiungere una situazione di regime (per  $\chi$  troppo elevati si ha una sorta di esplosione).

Calcolando  $A$ , si ha dunque

$$(4.54) \quad \theta(x) = \theta_L \frac{\cos(\Omega x)}{\cos(\Omega L)} \quad \text{con} \quad \Omega L < \frac{\pi}{2}$$

Il flusso termico ceduto dalla lastra all'esterno è

$$(4.55) \quad -\kappa \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_L = \kappa \Omega \theta_L \tan(\Omega L)$$

che risulta uguale alla potenza generata, per unità di superficie nella lastra; ciò è evidente se si considera il bilancio energetico, ma può anche essere controllato come

$$\int_0^L \varphi dx = -\kappa \int_0^L \frac{d^2T}{dx^2} dx = -\kappa \left[\frac{dT}{dx}\right]_0^L = -\kappa \left(\frac{dT}{dx}\right)_L$$

(nel primo passaggio si è usata l'equazione di Fourier).

Si osserva infine che al limite  $\theta_L \rightarrow 0$ , dalla (4.54) si ha  $\theta(x) = 0$ ; in altre parole, se la temperatura al contorno è uguale a quella di soglia, allora la soluzione stazionaria si riduce a quella di equilibrio termico con produzione nulla; a maggior ragione si avrà la soluzione  $\theta(x) = \theta_L$ , per  $\theta_L < 0$ .

Si possono estendere le precedenti considerazioni al caso in cui in  $x=L$  si abbia una condizione convettiva

$$-\kappa \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_L = h[\theta(L) - \theta_E]$$

con  $\theta_E \equiv T_E - T_s$  ovvero

$$-\kappa A \Omega \sin(\Omega L) = hA \cos(\Omega L) - h\theta_E$$

Ricavando  $A$  e introducendo il numero di Biot

$$Bi = \frac{hL}{\kappa}$$

si ottiene per il salto termico l'espressione

$$\theta(x) = \theta_E \frac{Bi}{Bi \cos(\Omega L) - \Omega L \sin(\Omega L)} \cos(\Omega x)$$

Essa può essere scritta ancora come

$$(4.56) \quad \theta(x) = \theta_L \frac{\cos(\Omega x)}{\cos(\Omega L)} \quad \text{con} \quad \theta_L \equiv \theta(L) = \theta_E \frac{Bi}{Bi - \Omega L \tan(\Omega L)}$$

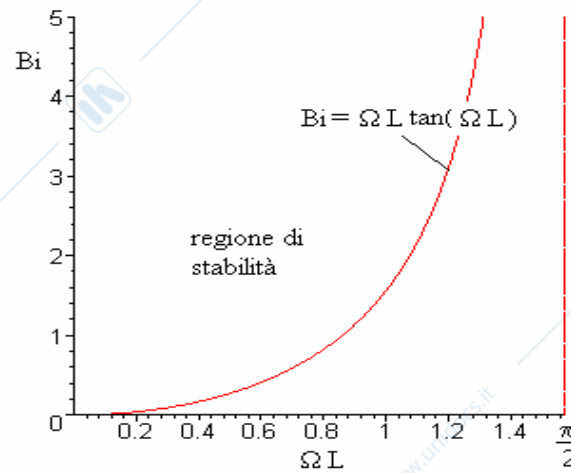


Fig. 4.19 – Solo entro la regione di stabilità la lastra può restare in condizioni stazionarie.

Perché  $\theta$  sia positivo, oltre alla condizione sopra posta, deve aversi anche  $Bi \cos(\Omega L) > \Omega L \sin(\Omega L)$  e cioè si ha limitazione

$$Bi > \Omega L \tan(\Omega L)$$

per il numero di Biot: se l'effetto convettivo non è sufficientemente alto, non si raggiunge una soluzione stazionaria. In un diagramma  $(Bi, \Omega L)$  la "regione di stabilità", in cui sono possibili le condizioni stazionarie, è quella che sta sopra la curva  $Bi = \Omega L \tan(\Omega L)$ , come visualizzato in figura. Ovviamente il flusso termico ceduto è ancora

$$-\kappa \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_L = \kappa \Omega \theta_L \tan(\Omega L)$$