

Descrizione delle operazioni teoriche volte alla realizzazione di una rappresentazione "metrica" di una porzione di territorio

Rappresentare in maniera metrica una porzione di territorio è un'attività che coinvolge più ambiti del sapere scientifico quali ad esempio: l'astronomia, la trigonometria, la statistica, etc. L'attività umana ha, da sempre, avuto la necessità di conoscere in modo approfondito e dettagliato l'ambiente circostante. Questa necessità deriva da una qualità intrinseca nella natura umana ovvero la curiosità che ci spinge a cercare di comprendere il "mondo" che ci circonda sotto differenti aspetti. Uno tra questi è sicuramente comprendere la geometria del territorio e le interazioni che gli elementi, naturali o antropici, hanno tra loro rispetto alla loro collocazione nello spazio. Le carte topografiche (erroneamente chiamate "cartine" termine orribile! del resto il termine "sasso" fa saltare dalla sedia i miei colleghi Geologi!) e i moderni strumenti di rappresentazione del territorio (GIS, Google Earth, WorldWind, etc.) adempiono esattamente a questo scopo: "fornire strumenti semplici e fruibili per comprendere le dinamiche dei processi territoriali".

La rappresentazione metrica e semantica di una porzione di territorio va incontro ad alcune difficoltà che le discipline Geo-Topo-Cartografiche hanno, sempre nei rispettivi ambiti, affrontato e superato con il rigore matematico e logico che una disciplina Scientifica necessariamente richiede. Ad oggi rimangono ancora ben saldi i concetti fondamentali che le discipline Geo-Topo-Cartografiche hanno tracciato; purtroppo alcuni strumenti, di gestione dei dati georeferenziati, tendono a mascherare velatamente importanti aspetti quali ad esempio i sistemi di riferimento con annessa trasformazione di "Datum", la "scala nominale" di una banca dati territoriale, la qualità metrica del dato georeferenziato e altri aspetti che sono di capitale importanza per un corretto trattamento del dato georeferenziato.

Non è infrequente trovare utenti che utilizzano la funzione "zoom" e credono o pensano di ottenere un dato metricamente più dettagliato rispetto al dato originale! È proprio in questi casi che una conoscenza di base delle discipline Geo-Topo-Cartografiche può e deve accompagnare l'utente a compiere operazioni ed elaborazioni sui dati georeferenziati in modo critico e consapevole.

Operazioni teoriche atte alla rappresentazione metrica di una porzione di territorio

La rappresentazione metrica del terreno incontra una serie di problemi che normalmente non sono presenti quando si rappresenta un oggetto di piccole dimensioni; infatti, la porzione di territorio che si vuole rappresentare eccede decisamente la dimensione dell'uomo, il terreno ha una forma irregolare, e la superficie ideale di rappresentazione non è piana. Tutti questi fattori rendono complesse le attività connesse alla realizzazione di una rappresentazione metrica del terreno. Si osservi la figura 1 dove sono illustrate due superfici: la superficie *fisica* ed il *geoide*; il terreno è ridotto ad uno strato sottile, dove insistono gli elementi naturali o antropici che si vogliono rappresentare (case, strade, fiumi, etc.). La seconda superficie geoide è dove tali elementi sono riportati 'a misura'. Con il termine 'a misura' indichiamo la modalità con la quale è possibile "estrapolare" valori numerici di grandezze geometriche (distanze, azimut, angoli azimutali e dislivelli) tra punti sulla rappresentazione.

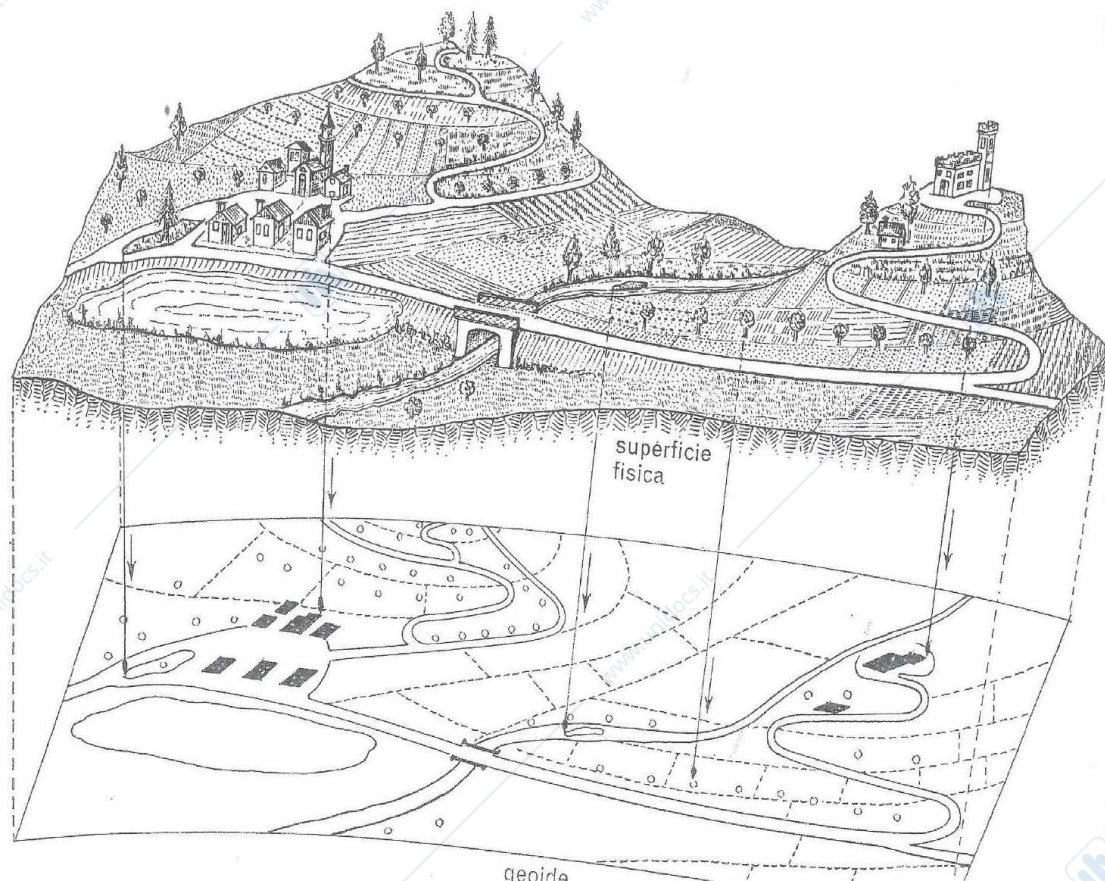


Figura 1 - Superficie fisica e geoide

Definite le due superfici, si proiettino i punti individuati sulla superficie fisica sul geoide; tale proiezione è fatta lungo linee legate al campo della gravità o *linee della verticale o del filo a piombo*. Unendo i punti proiettati sul geoide otteniamo le forme planimetriche degli elementi corrispondenti alla superficie fisica, ad esempio quattro punti per un edificio, o punti cadenzati sui bordi di una strada o sull'asse per piccoli sentieri, etc.

Possiamo schematizzare il percorso di costruzione di una rappresentazione del terreno in forma metrica:

- individuati un numero sufficiente di punti per la rappresentazione questi sono proiettati lungo la linea della verticale che collega le due superfici
- vicino al punto proiettato andrebbe riportata la lunghezza della linea della verticale congiungente punto sulla superficie fisica e punto sul geoide
- percorrendo il geoide si misurano angoli e distanze tra i punti proiettati (attenzione la superficie è curva!)
- dalle misure di angoli e distanze si ricavano le coordinate dei punti proiettati (bisogna definire le relazioni tra misure e coordinate!)
- ottenute le coordinate dei punti notiamo che il supporto su quale sono rappresentati è curvo! Scopo principale della Cartografia è portare i punti proiettati su un supporto *piano* (la carta!), ovvero trovare due funzioni bi-univoche $N = f(\varphi, \lambda)$, $E = g(\varphi, \lambda)$ chiamate equazioni della carta.

Osserviamo che alcune delle operazioni sopra descritte sono praticamente impossibili mentre altre necessitano di ulteriori approfondimenti.

In ogni punto della Terra è individuabile la direzione del vettore della forza di gravità. La forza di gravità \vec{g} e altre grandezze ad essa associate sono oggetto di studio della Geodesia. La lunghezza della linea della verticale che collega un punto sulla superficie fisica al corrispondente sul geoide è chiamata *quota ortometrica*. Le misure di angoli e distanze tra i punti proiettati sono impossibili da realizzarsi come descritto (non possiamo camminare sul geoide!), tuttavia i metodi e gli strumenti di misura a disposizione consentono di affermare che:

'angoli e distanze tra punti della superficie fisica sono tali da fornire angoli e distanze quali si sarebbero misurati sul geoide (G.Inghilleri "Topografia Generale" - UTET)'

L'affermazione ha un impatto positivo per il proseguo dell'iter atto alla rappresentazione metrica; si pensi alle conseguenze se risultasse falsa! Allora bisognerà definire l'equazione del geoide, istituire un sistema di coordinate curvilinee (latitudine e longitudine) necessario per identificare planimetricamente un qualsiasi punto della superficie, ed essendo il geoide una superficie curva angoli e distanze dovranno essere definiti, inoltre si dovrà definire le relazioni e i metodi di calcolo che permettono di dedurre le coordinate curvilinee dalle misure, ed infine specificare le relazioni che permettono di passare da punti sul geoide a punti sul piano quantificando le deformazioni delle rappresentazioni piane così ottenute.

Come si può dedurre i problemi da risolvere sono difficili; tuttavia, è possibile introdurre alcune semplificazioni che permettono di superare le difficoltà sopra descritte.

Il geoide è una superficie chiusa e, nell'intorno di un punto ampio alcune decine di km, può essere approssimato con una calotta sferica di raggio opportuno, e nell'intorno di pochissimi km può essere approssimato con un piano tangente centrato nel punto.

Un'altra semplificazione di notevole importanza e di grande impatto operativo è che il grandissimo numero di punti necessari per riportare sul geoide gli elementi della superficie fisica può essere diviso in due categorie:

1. punti di inquadramento
2. punti di dettaglio

I punti di inquadramento sono una piccolissima percentuale del totale e costituiscono l'ossatura sulla quale costruire il rilievo. Questi punti compongono una rete a maglia triangolare, ricoprente tutto il territorio nazionale, le coordinate dei vertici sono determinate per via geodetica con operazioni topografiche (trilaterazione, triangolazione, poligonazione, etc.). Le coordinate di ogni punto costituente la rete più altre informazioni accessorie sono depositate in appositi documenti chiamati monografie. In un triangolo della rete è possibile operare un raffittimento, ovvero a partire dai due/tre vertici di coordinate note ricavare, nello stesso sistema di riferimento, le coordinate di altri vertici che svolgeranno le funzioni di punti di inquadramento per il rilievo finale. Ossia si determinano altri punti di inquadramento per poter operare su piccole porzioni di terreno in modo da approssimare la superficie geoide con un piano tangente. Dalla figura 2, i punti A e B (di coordinate note) sono utilizzati come riferimento per il rilievo di nuovi punti di inquadramento; si noti che angoli e lati dei triangoli componenti la rete sono misurati al fine di determinare, con appropriati metodi matematici/statistici, le coordinate dei punti della sotto-rete 1, 2, 3, ..., 13.

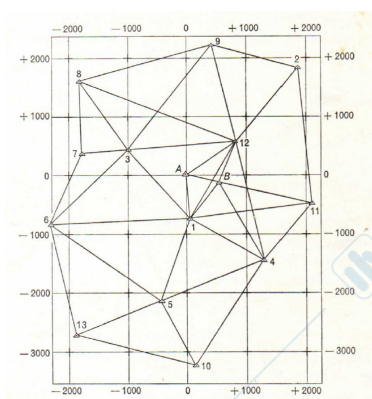


Figura 2 – Sotto-rete punti fissi A e B

Tutto questo per quanto riguarda la componente planimetrica, mentre per operare sulla componente altimetrica la superficie di riferimento sarà il geode.

Il geode come superficie di rappresentazione

Il geode si può visualizzare come la superficie coincidente con la superficie degli oceani, prolungata sotto le terre emerse, qualora l'acqua avesse temperatura e densità costanti ed in assenza di perturbazioni periodiche e non periodiche dovute a correnti, maree, venti, etc.

Per identificare in maniera più concreta il geode si deve iniziare dal filo a piombo (verticale) che identifica la direzione del vettore forza di gravità \vec{g} . Nel campo si identificano delle linee di forza o linee della verticale e in ogni punto il vettore \vec{g} risulta tangente, la direzione della tangente è chiamata *verticale*. Le linee di forza del campo sono curve gobbe ovvero non sono contenute in un piano (\vec{g} cambia in modulo e direzione). In fig. 3 è riportata una linea di forza e i vettori \vec{g} (verticale) che sono tangenti in ogni punto della linea.

Il campo di forza della gravità ammette potenziale, ovvero esiste una funzione **scalare** W il cui gradiente riproduce il campo vettoriale $\vec{g}(x, y, z) = \text{grad}(W)$

Le superfici a potenziale costante sono chiamate *equipotenziali*, e hanno queste caratteristiche (figura 3):

- sempre ortogonali alle linee di forza del campo
- non sono parallele tra loro
- hanno forma di sfera a grandissima distanza (quando la massa terrestre può essere "vista" come concentrata in un punto)
- hanno forma di un ellissoide di rotazione a una distanza prossima a pochi raggi terrestri

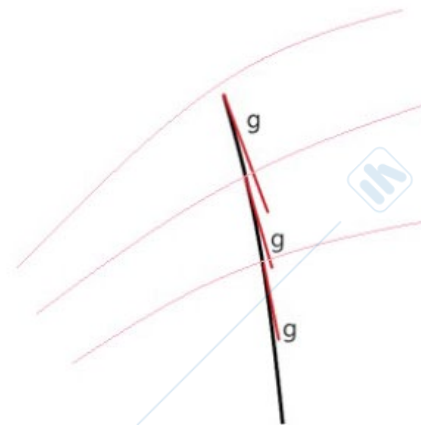
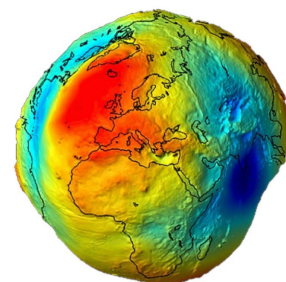


Figura 3 – Linea di forza, \vec{g} e superfici equipotenziali

La superficie equipotenziale con valore $W=0$ (posto per convenzione) è chiamata Geode (figura 4).



Fig. 4 – Geode e superficie topografica o fisica



Rappresentazione della superficie geode

Coordinate naturali o astrogeodetiche

Identificata la superficie geodetica si pone ora il problema di definire le coordinate curvilinee su tale superficie. Sono definite per ogni punto sulla superficie terrestre: latitudine astronomica, longitudine

astronomica ed altezza ortometrica. Il sistema di coordinate scelto è legato, ovviamente, alla gravità ed è così definito:

- l'asse Z coincidente con l'asse di rotazione terrestre (direzione convenzionale in quanto l'asse di rotazione non è fisso)
- il centro della terna cartesiana coincidente con il centro di massa terrestre
- il piano XY coincidente con il piano equatoriale
- il piano XZ coincidente con il piano contenente il meridiano di Greenwich.

Dato un punto P sulla superficie topografica, si proietti lungo la verticale il punto sul geode. Sia P' il punto proiettato, la distanza misurata lungo la linea verticale è l'altezza ortometrica. Si prolunghi tale linea, questa intersecherà il piano equatoriale formando un angolo chiamato *latitudine astronomica*. Infine, l'angolo formato tra il piano contenente il meridiano passante per Greenwich e il piano contenente il meridiano passante per il punto P' è chiamato *longitudine astronomica*. In figura 5 sono riportati gli angoli e l'altezza definiti.

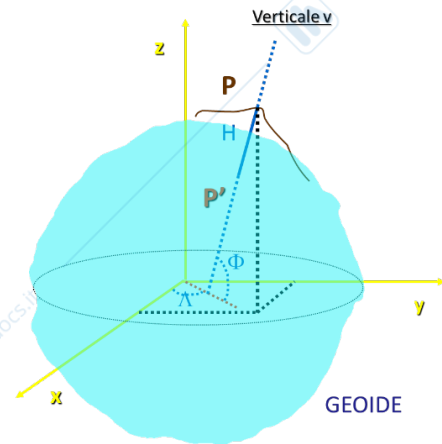
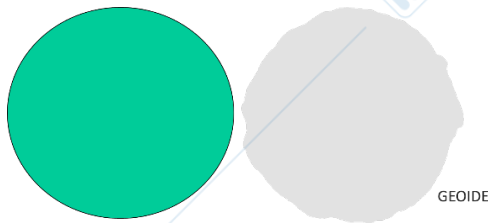


Figura 5 - Latitudine, longitudine ed altezza ortometrica

Note le coordinate e l'equazione della carta si potrebbe pensare che: dalla superficie topografica passiamo al geode e dal geode alla rappresentazione metrica sul piano tramite l'equazione della carta. Purtroppo l'equazione del geode è molto complessa e non esprimibile in un numero finito di termini; essa è una somma infinita di funzioni (armoniche sferiche) dipendenti dalla posizione del punto. Il geode è sostituito con un'ellissoide di rotazione che "approssima", nel senso che vedremo in seguito, la superficie geodetica.



Ellissoide Geode

L'ellissoide (3D) nasce dalla rotazione intorno all'asse minore di un'ellisse (2D) con semiassi a e b. Quindi l'equazione dell'ellissoide è matematicamente semplice

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Storicamente sono stati definiti molti ellissoidi, segno che l'arte del rilevamento metrico del terreno era ristretta ad un ambito

prettamente militare!

I parametri a e b erano calcolati in base a misure eseguite sulla superficie topografica, tipicamente archi di geodetica, e in zone estensivamente limitate ad alcune centinaia di km. Queste pratiche hanno portato alla definizione di una lunga lista di ellissoidi con parametri differenti. Oggigiorno i parametri a e b sono ricavati da misure satellitari.

In termini di campo e potenziale della gravità possiamo pensare che l'ellissoide costituisce una buona base per approssimare sia il campo che il potenziale della gravità. Si arriva così a definire il campo e potenziale *normale*, ovvero quello generato da un ellissoide di rotazione di massa M (pari alla massa della Terra) e volume $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Con questa posizione si scompone il campo della gravità (geode) in due termini campo normale dovuto all'ellissoide e una parte residua chiamato *campo anomalo*. Allora si può pensare alla superficie ellissoidica come alla *superficie equipotenziale del campo normale*. Il campo e il potenziale anomalo sono oggetto di studio della disciplina Geodesia che studia e sviluppa modelli matematici sempre più sofisticati per descrivere il campo e il potenziale della gravità.

Risulta chiaro che le due direzioni verticale (geoidale) e normale alla superficie ellissoidica in un punto non coincidono (figura 6) altrimenti i due campi (normale e di gravità) avrebbero valori uguali. La coincidenza tra le due direzioni potrà essere realizzata solo in un punto quando siamo noi ad imporla.

Così come si è definito un sistema di coordinate curvilinee sul geoidale è necessario definire un sistema di coordinate curvilinee sull'ellissoide.

Sistema di coordinate geodetiche o ellissoidiche

Riferendosi alla figura 7, si prenda una terna di assi x, y, z con origine nel centro dell'ellissoide di semiassi a e b , ora si orienti l'ellissoide solidale con la terna cartesiana nel seguente modo:

- l'asse Z parallelo all'asse di rotazione terrestre
- il piano XY coincidente con il piano equatoriale
- il piano XZ parallelo con il piano passante per il meridiano di Greenwich.

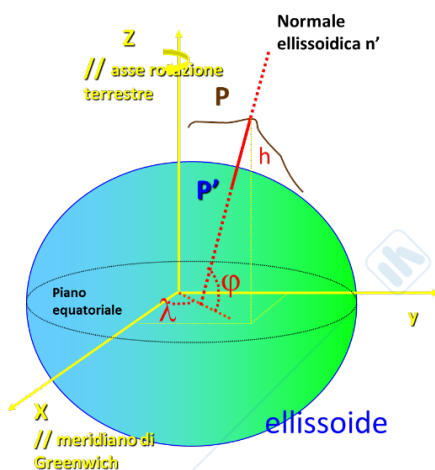


Figura 7 - coordinate ellissoidiche

Allora, identificato un punto P sulla superficie topografica, si prenda la **normale** e la si prolunghi fino al piano equatoriale. Il segmento che unisce P a P' (proiezione di P lungo la normale sull'ellissoide) è chiamata *quota ellissoidica* h . L'angolo che si forma tra il prolungamento della normale ed il piano equatoriale è detta *latitudine ellissoidica o geodetica* φ , infine l'angolo tra il piano XY e il piano contenente l'asse Z e la normale n (piano contenente il meridiano passante per P') è chiamata *longitudine ellissoidica o geodetica* λ . Nel proseguo si utilizzeranno i termini latitudine e longitudine intendendo sempre ellissoidiche. Per la componente in quota la distinzione tra ortometrica H ed ellissoidica h è di importanza fondamentale.

La posizione di un punto generico P su di una superficie geometrica, può essere agevolmente individuata istituendo sulla superficie (ellissoide) un sistema di linee coordinate (latitudine, longitudine), capace di definire in maniera univoca la relativa ubicazione rispetto a due linee coordinate prescelte come origine di riferimento (equatore ellissoidico e meridiano fondamentale). Infatti, sezionando l'ellissoide di rotazione terrestre, prima con un infinito insieme di piani normali all'asse di rotazione terrestre, poi con un fascio di piani aventi per costola l'asse Z , è possibile ottenere sull'ellissoide stesso due distinte famiglie di curve, denominate paralleli e meridiani, intersecantesi ad angolo retto, capaci di compiere la stessa funzione di riferimento assoluta dagli assi cartesiani ortogonali del piano. L'ortogonalità di meridiani e paralleli è una diretta conseguenza della genesi della superficie ellissoidica che è di rotazione.

Assumendo quindi come parallelo di origine quello contenente il piano equatoriale, e scegliendo un meridiano di origine, la posizione di un punto P sull'ellissoide sarà determinata dalla coppia di linee coordinate che si intersecano nello stesso punto P .

La scelta dell'ellissoide può essere fatta in due differenti modalità: locale e globale. Prima dell'avvento del GPS e più in generale dell'osservazione della Terra dallo spazio (Earth Observation, EO), ogni nazione istituiva un proprio sistema di riferimento geodetico (datum) e di conseguenza tutta la cartografia nazionale era riferita a quel particolare datum. L'ellissoide era scelto in modo da approssimare bene il geoidale solo su

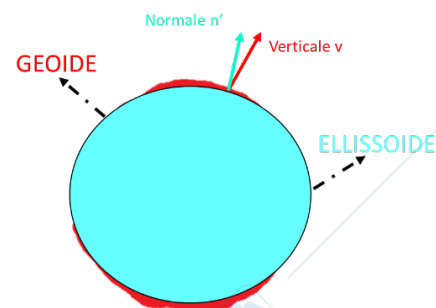


Figura 6 – Geoidale Ellissoide, verticale e normale

un'estensione ristretta del globo (orientamento locale). L'ellissoide utilizzato in una zona non si "raccorda" con un altro ellissoide orientato su un'altra area (figura 8). Si noti il caso in cui pur utilizzando lo stesso ellissoide orientato su zone differenti uno stesso punto fornisce coordinate *differenti* nei due differenti datum.

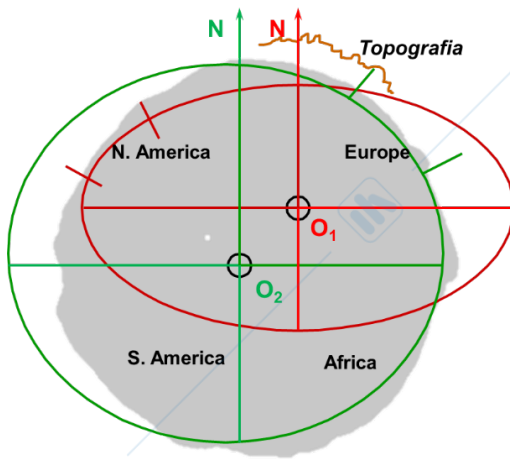


Figura 8 - Ellissoidi orientati su zone diverse

Con l'avvento del sistema di posizionamento globale GPS si è potuto stabilire un Datum Globale ovvero si è riuscito a stabilire un sistema di riferimento che funziona a scala globale. Questo ha avuto ed ha un impatto in tutta una serie di attività umane legate ad esempio all'osservazione della terra dallo spazio, alla navigazione, etc.

Il *World Geodetic System* (WGS84) utilizza un ellissoide con parametri: $a=6378137.0$ m $b=6356752.3142$ m.

WGS è un ellissoide orientato geocentricamente:

- L'origine coincide con il centro di massa della terra
- L'asse Z è perpendicolare al piano X, Y e coincide con l'asse medio di rotazione terrestre
- Gli assi X e Y sono perpendicolari tra loro e definiscono il piano equatoriale
- L'asse X passa per il Meridiano di Greenwich.

Nel WGS84 si definiscono le coordinate ellissoidiche φ, λ, h prendendo come direzione di riferimento la normale alla superficie ellissoidica, come illustrato in figura 10, si noti come la normale non interseca il centro degli assi XYZ. Questo lo si può vedere in figura 11 disegnando l'ellisse

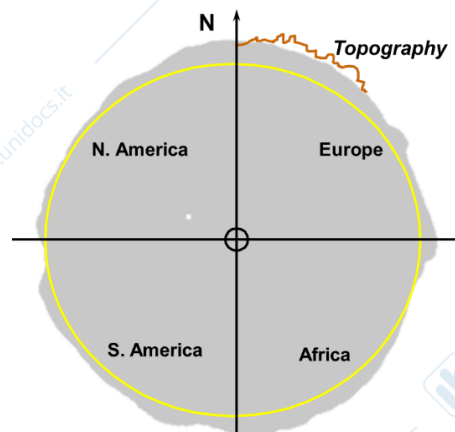


Figura 9 - WGS84 geocentrico

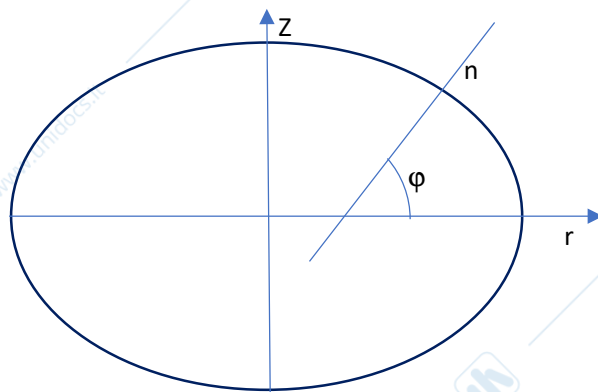


Figura 11 - Ellisse meridiana

meridiana e prolungata la normale da un punto P generico questa non cade in centro dell'ellisse meridiana ma interseca l'asse di rotazione z.

Per uno stesso punto le coordinate ellissoidiche e coordinate astronomiche differiscono, in particolare la quota, determinata da misure GPS, è diversa dalla quota ortometrica riferita al geode. Si ricordi che la superficie dell'ellissoide approssima il geode! La differenza tra quota ellissoidica h e quota ortometrica H è chiamata separazione geodetica o ondulazione del geode N (figura 12).

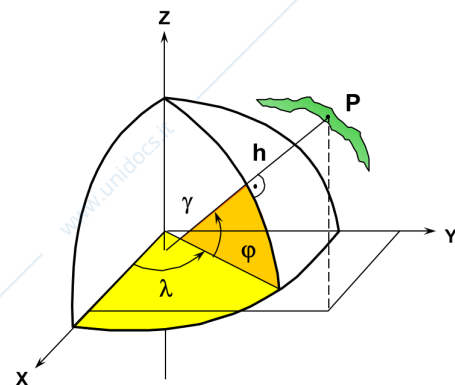


Figura 10 - WGS84 Coordinate ellissoidiche, si noti come la normale non interseca il centro degli assi XYZ.

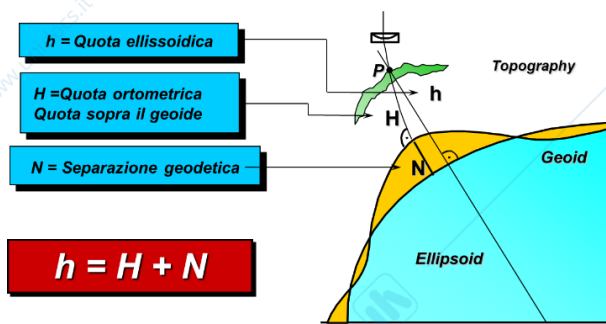


Figura 12 - Quote ellissoidiche ortometriche e ondulazione del geoidale

Si noti come l'ondulazione N dipenda dall'ellissoide preso come riferimento. Attualmente essendo il GPS diffuso a livello mondiale si tende a "uniformare" il datum altimetrico rispetto all'ellissoide associato al sistema GPS. La differenza tra le due superfici può assumere valori in un intervallo di ± 50 metri e dipende dall'angolo che le due direzioni verticale e normale formano in un punto, questo angolo vale al massimo poche decine di secondi sessagesimali e si chiama deviazione della verticale.

Quindi fissare il sistema di riferimento in ultima istanza significa adottare una approssimazione del campo della gravità. Storicamente, poiché la cartografia e più in generale la pratica del rilevamento metrico, erano ristrette ad un ambito militare ed i rilievi erano al massimo su estensioni nazionali, si prediligeva orientare un ellissoide localmente e si introducevano una serie di prescrizioni che rendevano "poco leggibile" una carta topografica. Questo e altri motivi hanno portato oggi ad avere differenti cartografie (nazionali) in differenti sistemi di riferimento (datum).

L'approssimazione ellissoide in vece del geoidale è valida se: "l'errore che l'approssimazione introduce sulle misure è inferiore al più piccolo errore di misura".

Planimetricamente si riesce a misurare con una precisione relativa di 10^{-6} , ovvero 1mm al km; quindi, tutte le approssimazioni introdotte che hanno effetti sulla misura inferiori a 10^{-6} sono validate. Questo è il motivo per cui su estensioni nazionali (1000-2000 km) non è possibile utilizzare come superficie la sfera!

Altimetricamente si utilizza il geoidale come superficie di riferimento, infatti i metodi e gli strumenti di misura per la determinazione delle quote sono tali da fornire errori di misura inferiori agli errori che l'approssimazione introduce. Quindi il geoidale sarà preso come superficie di riferimento per la parte altimetrica mentre l'ellissoide per la parte planimetrica.

Come descritto precedentemente, l'orientamento dell'ellissoide può essere globale o locale. Quest'ultimo lo si può realizzare facendo coincidere in un punto (punto di emanazione) la verticale con la normale. Operativamente questo avviene ricavando con misure astronomiche ripetute nel tempo latitudine e longitudine nel punto di emanazione, imponendo che questi valori siano gli stessi valori sull'ellissoide scelto come riferimento. In aggiunta si ricava, sempre per via astronomica, un azimut che lo si fa coincidere con il corrispondente azimut ellissoidico.

$$\varphi_{ell} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{astr} \quad \lambda_{ell} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{astr} \quad \alpha_{ell} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{astr}$$

In questo modo il "Datum" è fissato.

Per la parte planimetrica si può dimostrare che, dato un punto, nel raggio di alcune decine di km l'ellissoide è approssimabile con una calotta sferica (campo geodetico) e nel raggio di pochi km l'ellissoide è approssimabile con un piano tangente (campo topografico), figura 13.

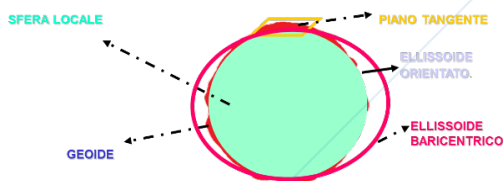


Figura 13 - Campo geodetico e campo topografico

Per la parte altimetrica, poiché le precisioni raggiungibili sono differenti rispetto ai metodi e agli strumenti impiegati, con la livellazione geometrica si utilizza il geode come superficie di riferimento, mentre per quote con un grado di precisione inferiore si può utilizzare la livellazione trigonometrica che ha come superficie di riferimento la sfera locale.

Definiti i due ambiti planimetrico e altimetrico si pone il problema di come riportare le misure fatte sulla superficie topografica sulla superficie ellissoidica.

Osservazioni:

- 1) Gli strumenti topografici sono posti 'in stazione' con un asse coincidente con la direzione della verticale (filo a piombo).
- 2) Le misure così effettuate saranno riferite all'ellissoide, tuttavia i punti sull'ellissoide sono proiettati lungo la normale; quindi, le ipotetiche misure fatte sulla superficie ellissoidica sono differenti da quelle reali fatte sulla superficie fisica.

Si tratta di capire se le approssimazioni, fin qui fatte, inducono nelle misure discrepanze (misura teorica vs misura reale) superiori agli errori di misura. La risposta è positiva ovvero le approssimazioni fin qui introdotte inducono sulle misure effetti inferiori al più piccolo errore di misura che si può ottenere.

Trasformazione di Datum

Fissato l'ellissoide di riferimento la posizione di un punto è esprimibile in due differenti modalità:

- 1) coordinate cartesiane geocentriche $P(X, Y, Z)$
- 2) coordinate ellissoidiche $P(\varphi, \lambda, h)$

Il passaggio da cartesiane a ellissoidiche e viceversa si basa su semplici equazioni di carattere matematico/geometrico:

$(\varphi, \lambda, h) \rightarrow (X, Y, Z)$

$$X = (R_n + h) \cos\varphi \cos\lambda \quad Y = (R_n + h) \cos\varphi \sin\lambda \quad Z = [(R_n(1 - e^2) + h) \sin\varphi$$

$$\text{dove: } R_n = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$(X, Y, Z) \rightarrow (\varphi, \lambda, h)$ calcolate in modalità iterativa

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \lambda = \text{atan2}(Y, X) \quad \varphi = \text{atan2}(Z, r)$$

$$N = a/W \quad W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}$$

- 1) $N = a/W$
- 2) $h = X/(\cos\varphi \cos\lambda) - N$
- 3) $\varphi = \text{atan2}(Z, r(1 - e^2 N/(N+h)))$
- 4) if $(|\varphi_n - \varphi_{n-1}| > \varepsilon_\varphi \quad \text{and} \quad |h_n - h_{n-1}| > \varepsilon_h)$ [vai a 1)]

I cambi di coordinate avvengono nello stesso datum, ovvero la loro accuratezza è data solo dalla qualità del dato di ingresso.

Differente è il problema di cambio o trasformazione di datum: qui si vuole esprimere le coordinate di un punto in due differenti ellissoidi orientati in modo diverso (e.g. da locale a geocentrico). È abbastanza evidente che uno stesso punto assume coordinate diverse in datum differenti figura 14.

La trasformazione di datum ha assunto un ruolo molto importante da quando la strumentazione GPS è entrata nelle pratiche del rilevamento. Infatti, si è da subito posto il problema di come inserire i risultati dei rilievi GPS all'interno dei sistemi geodetici nazionali presenti in Europa e più in generale nel mondo. Si osservi che:

- Il sistema di riferimento GPS è il geocentrico WGS84
- I sistemi geodetici locali impiegati in geodesia sono invece basati su ellissoidi orientati in modo da approssimare bene localmente la superficie geoidica
- Un qualsiasi ellissoide orientato localmente si differenzia da quello geocentrico del WGS84, non solo per i diversi parametri, ma soprattutto per la posizione del centro e l'orientamento degli assi
- Le coordinate geografiche di uno stesso punto nel datum locale e nel WGS84 risultano sensibilmente diverse.

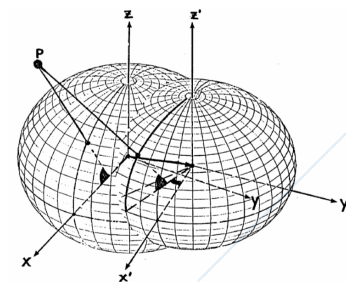


Figura 14 – Stesso punto in datum differenti

La trasformazione di datum è effettuata mediante una rototraslazione (3 traslazioni + 3 rotazioni) di un punto espresso in coordinate geocentriche nel datum1 nel corrispondente punto in coordinate geocentriche nel datum2. Ipotizzando di passare dal datum WGS84 (EPSG:4326) al datum locale ED50 (European Datum 1950 - EPSG:4230), le fasi della trasformazione sono:

1. nel WGS84 si passa dalle coordinate geografiche alle coordinate cartesiane, riferite alla terna d'assi associata all'ellissoide, $(\varphi, \lambda, h)_{\text{WGS84}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{WGS84}}$
2. si opera una rototraslazione nello spazio per passare alle coordinate cartesiane nel secondo sistema geodetico (terna cartesiana associata al secondo ellissoide), $(X, Y, Z)_{\text{WGS84}} \rightarrow (X, Y, Z)_{\text{ED50}}$
3. nel sistema locale si passa dalle coordinate cartesiane alle geografiche, $(X, Y, Z)_{\text{ED50}} \rightarrow (\varphi, \lambda, h)_{\text{ED50}}$

Le fasi 1 e 3 vengono eseguite all'interno dello stesso ellissoide, e sono applicate le espressioni viste in precedenza. Si noti che le espressioni seguono semplici regole geometriche e si basano su parametri (semiassi dell'ellissoide) determinati in modo definitivo.

Il cambiamento di datum vero e proprio si ha nella fase 2, nella quale è necessaria la conoscenza dei 6 parametri (3 traslazioni e 3 rotazioni) che definiscono la posizione relativa dei due sistemi cartesiani nello spazio.

In realtà avviene che ogni datum è definito da una rete di punti ad esso associata e quindi risente degli errori di misura e conseguenti distorsioni della rete stessa.

Quindi il modello teorico viene modificato aggiungendo un fattore di scala che permette di assorbire parzialmente le imperfezioni della rete.

I parametri da stimare per una rototraslazione con fattore di scala sono quindi 7: 3 traslazioni - 3 rotazioni - 1 fattore di scala

La rototraslazione con fattore di scala è detta anche 'conforme' in quanto mantiene invariati gli angoli e quindi la forma delle figure che costituiscono il rilievo originario.

Il problema principale è costituito dalla conoscenza dei valori dei 7 parametri che sono necessari per eseguire la trasformazione di datum.

I 7 parametri sono calcolati a partire dalla conoscenza di almeno 3 punti noti nei due sistemi di riferimento, chiamati punti doppi; in pratica è opportuno che i punti noti siano in numero superiore allo stretto necessario, per dare maggiore consistenza alla stima. In figura 15 è riportata la trasformazione da WGS84 a

ED50. Questa trasformazione è detta di Helmert, ovvero una rototraslazione con fattore di scala nello spazio 3D.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ED50} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + (1 - \gamma) \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{wgs84}$$

Nei GIS sono utilizzati parametri approssimati, solitamente solo le tre traslazioni, per cui i risultati della trasformazione risentono della scarsa precisione dei parametri.

T = traslazioni 3 parametri

Matrice di rotazione 3 parametri

γ = fattore di scala

n.b: a,b,c,...,i contengono somme e prodotti di cos e sin dei tre angoli di rotazione

Figura 15 – Trasformazione di Helmert

tratta di utilizzare la trasformazione di Helmert in cui sono note le (X, Y, Z) sia nel wgs84 che nell' ED50 così da determinare, con un procedimento matematico/statistico i 6 parametri e il fattore di scala della trasformazione.

Per stimare parametri sufficientemente precisi si possono utilizzare i punti doppi, ovvero conoscendo le coordinate di alcuni punti in entrambi i Datum si determinano i 7 parametri della trasformazione. La procedura di stima dei parametri di una rototraslazione è abbastanza complessa. In sostanza di

Come si può constatare dalla figura 16 il punto, Roma Monte Mario (punto di emanazione del datum Roma40) presenta coordinate sensibilmente differenti in due datum diversi. La massima differenza in latitudine è di quasi 3", che corrispondono a circa 90 metri! e 1" in longitudine che corrispondono circa 20 metri).

Roma 40: $\varphi = 43^\circ 07' 37,250''$
 $\omega = -0^\circ 23' 47,323''$ E M.Mario = $12^\circ 03' 21,077''$ E Greenwich

WGS 84: $\varphi = 43^\circ 07' 39,584''$
 $\omega = 12^\circ 03' 20,248''$ E Greenwich

Poiché il posizionamento dei punti di una rete geodetica nazionale ha una precisione di alcuni centimetri, si può ben capire come l'accuratezza dei parametri di rototraslazione sia di importanza basilare. Infatti, il rischio è di

Figura 16 - Punto Roma Monte Mario nei due datum WGS84 e Roma 40

determinare coordinate di punti con altissima precisione (pochi centimetri con misure GPS in differenziale) nel datum wgs84 per poi vanificare il tutto applicando una trasformazione (WGS84→ED50) che comporta un deterioramento della precisione di qualche metro!!

In tabella sono riportati i parametri dei principali ellissoidi utilizzati nelle cartografie nazionali, tra questi meritano una particolare attenzione l'ellissoide di Hayford chiamato ellissoide internazionale e l'ellissoide WGS84 legato al sistema di posizionamento satellitare GPS

Ellissoide	Semiassse maggiore	Schiacciamento
EVEREST (1830)	6.377.276 m	1/300.8
BESSEL (1841)	6.377.397 m	1/299.2
CLARKE (1866)	6.378.206 m	1/294.9
CLARKE (1880)	6.378.301 m	1/293.5
HELMERT (1906)	6.378.140 m	1/298.3
HAYFORD (1909)	6.378.388 m	1/297.0
KRASOVSKY (1942)	6.378.245 m	1/298.3
FISCHER (1960)	6.378.160 m	1/298.3
WGS84 (1987)	6.378.137 m	1/298.3

L'ellissoide di Hayford fu adottato nel 1924 dall'Unione Geodetica e Geofisica Internazionale con la denominazione di ellissoide internazionale. Lo schiacciamento è relazionato con i valori dei semiassi dalla relazione $f=1-b/a$. Nella tabella qui a fianco sono riportati i valori dei parametri che realizzano la trasformazione dal wgs84 a datum locale per diverse nazioni europee.

Region	Start datum	Target datum	C_x (Metre)	C_y (Metre)	C_z (Metre)	s (ppm)	r_x (Arcsecond)	r_y (Arcsecond)	r_z (Arcsecond)
Slovenia ETRS89	D48	D96	409.545	72.164	486.872	17.919665	-3.085957	-5.469110	11.020289
England, Scotland, Wales	WGS84	OSGB36 ²⁷	-446.448	125.157	-542.06	20.4894	-0.1502	-0.247	-0.8421
Ireland	WGS84	Ireland 1965	-482.53	130.596	-564.557	-8.15	1.042	0.214	0.631
Germany	WGS84	DHDN	-591.28	-81.35	-396.39	-9.82	1.4770	-0.0736	-1.4580
Germany	WGS84	Bessel 1841	-582	-105	-414	-8.3	-1.04	-0.35	3.08
Germany	WGS84	Krassovski 1940	-24	123	94	-1.1	-0.02	0.26	0.13
Austria (BEV)	WGS84	MGI	-577.326	-90.129	-463.920	-2.423	5.137	1.474	5.297
USA	WGS84	Clarke 1866	8	-160	-176	0	0	0	0