

VC CONTINUA

VC DISCRETA

$f_z(z) = f_{xy}(x, y)$

$P: z = P(x = x_i, y = y_j)$

$\int \int f_{xy}(x, y) = 1$

$\sum_i \sum_j P: z = 1$

CONGIUNTE

$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dy$

$q_i = \sum_{j=1}^m P: z$

MARGINALI

$f_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y) dx$

$z_j = \sum_{i=1}^m P: z$

$f_{xy}(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

$P: z = q_i z_j$

COND. NESS. STOC.

MEDIA $\underline{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\underline{\mu z} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$

$\mu_x = \sum_i x_i q_i = M_x[x]$

$\mu_x = \int x f(x) dx$

$\mu_y = \sum_j y_j z_j = M_y[y]$

$\mu_y = \int y f(y) dy$

TEO MEDIA

$\underline{\mu w} = \begin{bmatrix} \int \int g_1(x, y) f(x, y) \\ \int \int g_2(x, y) f(x, y) \end{bmatrix}$

$\underline{\mu w} = \begin{bmatrix} \sum_i \sum_j g_1(x_i, y_j) P: z \\ \sum_i \sum_j g_2(x_i, y_j) P: z \end{bmatrix}$

MAT COVARIANZA

COEFF COVARIANZA

$C_{zz} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$

$\sigma_{xy} = M_{xy}[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$

• LINEARE

INDIPENDENZA STOCASTICA

Prop. Variabile $\underline{w} = A\underline{z} + \underline{b}$

$C_{zz} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$

Prop. covar. $C_{ww} = A C_{zz} A^t$

Mat cov diag \Rightarrow comp. stocast ind \Rightarrow dip. lineare

$\underline{\mu w} = A \underline{\mu z} + \underline{b}$

COEFF DI CORR. LINEARE

• NON LINEARE

Var $\underline{w} = f(z) + \underline{b}$

$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$

Covar $C_{ww} = \int C_H f^t = \int C_{zz} f^t$

NON LINEARE $\rho_{xy} = 0$

LINEARE $\rho_{xy} = \pm 1$

TEO CENTRALE DELLA STATISTICA

$X_m = \sum_{i=1}^m x_i$ $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{X_m}(x_m) = N[m\mu, m\sigma^2]$

ERRORE ACCIDENTALE DI MISURA $y = \sum_i y_i$

TEORIA DELLA STIMA

Descrive esp m rip INDIP di un esp descritto da VC x

VAR. CASUALE CAMPIONARIA $\underline{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

gdop $L(\underline{y}) = \prod_{i=1}^m f_{x_i}(x_i)$

funz verosim $L(x, \theta)$ → Stabilire proprietà che avvicinano al valore θ
 stimatore $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x, x_m)$ → Stabilire la forma → criteri

COMPATTO $U(\hat{\theta}) = \theta$ (es media comp $U[m] = \mu$)
 Non garantisce unicita

CONSISTENTE $\lim_{m \rightarrow \infty} U[\hat{\theta}(x_m)] = \theta$ $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^2[\hat{\theta}(x_m)] = 0$ Non garantisce unicita

CRITERIO MASSIMA VEROSIMILITANZA

$L(x, \hat{\theta}(x)) = \max L(x, \theta(x))$ stimatore di σ inc = VC (funz VC campionaria) che
 max funz di verosimiglianza

VC STIMATORE	STIMA
A priori VC funzione della VC camp. la cui forma e' ottenuta con un criterio di stima	A posteriori V s (numero) sostituendo estraz VC camp

CRITERIO STIMA MIN QUADRATI

VC α^* dim $\alpha^* = m$ Non conosco g ddp
 MAT DI COVARIANZA $C \alpha^* \alpha^{*T} = \sigma^2 Q \alpha^* \alpha^{*T}$
 INCOGNITA \downarrow MAT COFATTORI (NOTA)

Se misure, comp. di α indipendenti e di ugual precisione $\Rightarrow Q = I$

Determinare stimatori dei valori medi di α^* e di x (medi)

$Q = I$
 LINEARE

Problema $\begin{cases} \sum (\alpha_i - \hat{\alpha}_i)^2 = (\alpha - \hat{\alpha})^T (\alpha - \hat{\alpha}) = \min \\ \hat{\alpha} = A \hat{x} + L \end{cases}$ univoco

Soluzioni $\begin{matrix} A & \text{MATRICE DI SECONDO} & \text{Pretemplate} & \text{dim } \hat{x} = m & (m > m) \\ N & \text{NORMALE} & \text{Quadrata} & \text{dim } \hat{\alpha} = m & A_{m \times m} \\ & & & & N_{m \times m} \end{matrix}$

U VETTORE DEGLI SCARTI $U = \alpha - \hat{\alpha}$
 $m-m$ RIDONDANZA Sempre 0

$\hat{x} = N^{-1} A^T (\alpha - L)$ $\hat{\alpha} = A \hat{x} + L$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{U^T U}{m-m}$ STIMATORE min
 $C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}^2 N^{-1}$ $C_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 A N^{-1} A^T$ $C_{\omega\omega} = \hat{\sigma}^2 [I - A N^{-1} A^T]$ q con param agg.

$C_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ $C_{\hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_0} = \hat{\sigma}_0^2 A N^{-1} A^T$ $C_{\omega_0 \omega_0} = \hat{\sigma}_0^2 [I - A N^{-1} A^T]$ STIMA

$Q \neq I$

Problema $\begin{cases} (\alpha - \hat{\alpha})^T Q^{-1} (\alpha - \hat{\alpha}) = \min \\ \hat{\alpha} = A \hat{x} + L \end{cases}$ $Q = Q_{dd}$

$N = A^T Q^{-1} A$ Q_{dd} $m \times m$
 Quadrata

$\hat{x} = N^{-1} A^T Q^{-1} (\alpha - L)$ $\hat{\alpha} = A \hat{x} + L$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{\omega^T Q^{-1} \omega}{m-m}$

$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}^2 N^{-1}$ $C_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} = \hat{\sigma}^2 A N^{-1} A^T$

$C_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ $C_{\hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_0} = \hat{\sigma}_0^2 A N^{-1} A^T$ $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\omega^T Q^{-1} \omega}{m-m}$

A → dipende da disegno rete, dalla posizione relativa dei punti, e dal tipo di osservazioni

Q → dipende dagli strumenti che si utilizzano e dalle tecniche di rilievo

FASE DI SIMULAZIONE

Calcolo $Q \hat{x}$ stime PARAMETRI Identifico misure strett. necess.
 MAT COEFFICI $Q \hat{x}$ stime OSSERVAZIONI
 $Q \hat{u}$ stime SCARTI delle equazioni

PIRONDANZA $m - m > 0$ $\dim X = m > \dim Y = m$

2 EFFETTI / si ottiene stima affidabile \pm
 / si migliora la precisione della stima \pm

1. se non \pm errori grossolani (OUTLIER) $u_i \sim N(0, \sigma^2_{u_i})$

• se u_i NORMALE $P(-2\sigma_{u_i} < u_i < 2\sigma_{u_i}) \approx 95\%$

$u_i > 2\sigma_{u_i} \rightarrow$ osserv. x_{0i} OUTLIER

VARIANZA DELLO SCARTO $\hat{\sigma}^2_{u_i} = \hat{\sigma}_0^2 [Q - AN^{-1}A^T]_{ii}$

se $|u_{0i}| > 2\sigma_{u_i}$ x_{0i} OUTLIER

NON LINEARE

$\bar{x} = f(\bar{y})$ $\bar{x} \approx f(\bar{y}) + f_x(\bar{y})(\bar{y} - \hat{y})$

$\bar{x} \approx L + A \hat{e}$

lett termini noti:

Mat der parziali: calcolate nei val approx \hat{x}

vett correzioni:

$L = f(\hat{y}) = \begin{bmatrix} f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_m) \\ f_m(\hat{x}_1, \hat{x}_m) \end{bmatrix}$

$A = f_x(\hat{y}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_m} \\ \frac{df_m}{dx_1} & \frac{df_m}{dx_m} \end{bmatrix}_{\hat{x}}$

$\hat{e} = (\bar{x} - L) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \hat{x}_1 \\ \bar{x}_m - \hat{x}_m \end{bmatrix}$

Soluzioni:

$\hat{e}_0 = N^{-1}A^T Q^{-1}(x_0 - L)$ $C \hat{e} \hat{e}^T = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$ $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{U^T Q^{-1} U}{m - m}$

• Processo iterativo \hat{e}_{01} $\hat{x}_{01} = \hat{x} + \hat{e}_{01}$ $\hat{x}_{02} = \hat{x}_{01} + \hat{e}_{02}$
 $\hat{x}_{01} = \hat{x}_{01}$ $\bar{x} \approx L + A_1 \hat{e}_{02}$ $\hat{e}_{0k} +$ trascurabile

• Ricalcolo solo L se se converge $\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}$

$\hat{y} = \hat{x} + \hat{e}$ $\hat{x} = A \hat{e} + L$ $\hat{u} = x_0 - \hat{x}$

Test verifica di ipotesi

- 1) $V \subset X$ gddp $\in f(x, \theta)$ θ incognito
- 2) $\hat{\theta}$ stimatore di θ di cui conosco gddp $\theta = \theta(x)$
- 3) $H_0: \theta = \theta_0$ ip + verifico ip sulla base del fatto che un campione n abbia fornito un valore empirico (stima) t_0 di θ
- 4) H_0 vera \rightarrow conosco gddp di $\hat{\theta}$ \rightarrow fisso α (LIVELLO SIGNIFICATIVITA) \rightarrow determino per $\hat{\theta}$ un intervallo I contenente θ_0 t.c. $P(\hat{\theta} \in I) = 1 - \alpha$
- 5) Regola $t_0 \in I \Rightarrow H_0$ accettata $t_0 \notin I \Rightarrow H_0$ rifiutata

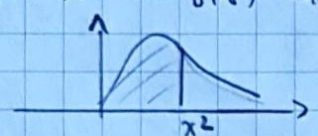
α LIVELLO SIGNIFICATIVITA - Rischio di rifiutare ip quando e' vera

INTERVALLO FIDUCIARIO I di tutti i valori teorici che portano ad accettare e' ipotesi per lo stesso campione e per lo stesso α

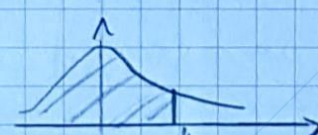
TEST A 2 CODE Scarto ip sia per valori troppo grandi, sia per valori piccoli

TEST A 1 CODA Ip non verificata \rightarrow si hanno valori campionari solo troppo grandi o troppo piccoli

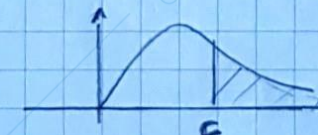
CHI-QUADRO

$y = \sum_{i=1}^m z_i^2$ $z_i \sim N(0,1)$ $y = \chi_m^2$ $f(y) = c_m y^{(m/2)-1} e^{-y/2}$ MEDIA m
 gddp non simmetrica  VARIANZA $2m$

T DI STUDENT

$t_m = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi_m^2}{m}}}$ gddp $f(t) = c_m (1 + \frac{t^2}{m})^{-\frac{(m+1)}{2}}$ simmetrica rispetto a 0
 MEDIA 0
 VARIANZA $\frac{m}{m-2}$


F DI FISHER

$F_{m, m-m} = \frac{\chi_m^2}{\chi_{m-m}^2}$ $y = \frac{\chi_1^2}{\frac{\chi_2^2}{m_2}}$


TEOREMI

$\chi_{(m-1)}^2 = (m-1) \frac{\bar{S}^2}{\sigma_0^2}$ $t_{m-1} = \frac{m-1}{\bar{S}/\sqrt{m}}$ $F_{1,2} = t_2^2$ $t_m = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi_m^2}{m}}}$
 $= \frac{\chi_1^2}{\frac{\chi_2^2}{2}}$

VERIFICA IP PER MEDIA TEORICA DI VC CON gdp NORMALE

VARIANZA NOTA	$H_0: \mu = \mu_0$	VARIANZA INCOGNITA
$ z_0 = \left \frac{m_0 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{m}} \right \leq z_{0,5 - \alpha/2}$		$ t_0 = \left \frac{m_0 - \mu_0}{\bar{s}_0 / \sqrt{m}} \right \leq t_{1-\alpha/2}(m-1)$

VERIFICA IP PER MEDIA TEORICA DI VC DI gdp INCOGNITA, CAMPIONE NUMEROSO

VARIANZA NOTA	$H_0: \mu = \mu_0$	VARIANZA INCOGNITA
$ z_0 = \left \frac{m_0 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{m}} \right \leq z_{0,5 - \alpha/2}$		$ z_0 = \left \frac{m_0 - \mu_0}{\bar{s}_0 / \sqrt{m}} \right \leq z_{0,5 - \alpha/2}$

VERIFICA IP SUL CONFRONTO TRA MEDIE TEORICHE DI VC CON gdp NORMALE

VARIANZA NOTA	$H_0: \mu = \mu_0$	VARIANZA INCOGNITA
$ z_0 = \left \frac{(m_{01} - m_{02}) - (\mu_{01} - \mu_{02})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m_1} + \frac{\sigma_2^2}{m_2}}} \right \leq z_{0,5 - \alpha/2}$		$ t_0 = \left \frac{(m_{01} - m_{02}) - (\mu_{01} - \mu_{02})}{\sqrt{\frac{\bar{s}_{01}^2}{m_1} + \frac{\bar{s}_{02}^2}{m_2}}} \right \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m_1 + m_2 - 2)$

VERIFICA IP SUL CONFRONTO TRA MEDIE TEORICHE DI VC CON gdp INCOGNITA CAMPIONI NUMEROSI

VARIANZA NOTA	$H_0: \mu = \mu_0$	VARIANZA INCOGNITA
$ z_0 = \left \frac{(m_{01} - m_{02}) - (\mu_{01} - \mu_{02})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m_1} + \frac{\sigma_2^2}{m_2}}} \right \leq z_{0,5 - \alpha/2}$		$ z_0 = \left \frac{(m_{01} - m_{02}) - (\mu_{01} - \mu_{02})}{\sqrt{\frac{\bar{s}_{01}^2}{m_1} + \frac{\bar{s}_{02}^2}{m_2}}} \right \leq z_{0,5 - \alpha/2}$

VERIFICA IP PER VARIANZA TEORICA DI UNA VC CON gdp NORMALE

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

$\chi^2_{\alpha/2}(m-1) < (m-1) \bar{s}_0^2 / \sigma_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2}(m-1)$

VERIFICA IP SUL CONFRONTO DI VARIANZE TEORICHE PER VC CON gdp NORMALE

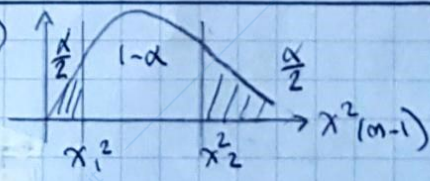
4 CODA $H_0: \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right) < c$ valore critico $F_{\alpha}(m_x-1, m_y-1)$

$c \frac{\bar{s}_{0x}^2}{\bar{s}_{0y}^2} < F_{\alpha}(m_x-1, m_y-1)$ valore campionario $F_0 = c \frac{\bar{s}_{0x}^2}{\bar{s}_{0y}^2}$

Accetto

TEST SU VARIANZA

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $\chi^2_{\alpha}(m-1) = \frac{\bar{s}_0^2}{\sigma^2} (m-1)$



TEST SUL CONFRONTO DI VARIANZE

$F(m_x-1, m_y-1) = \left(\frac{\bar{s}_y^2}{\bar{s}_x^2} \right) \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right)$ Test a 1 coda

$H_0: \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \right) = c$ α $F_{\alpha}(m_x-1, m_y-1)$ Estratto $F_0 = c \frac{\bar{s}_{0y}^2}{\bar{s}_{0x}^2}$ $F_0 < F_{\alpha}$ Accetto

TEST GLOBALE SUI PARAMETRI M.Q. CON σ^2 NOTO

$H_0: \mu = \mu_{x_0}$ $\frac{1}{\sigma^2} (\hat{x}_0 - \mu_{x_0})^T N (\hat{x}_0 - \mu_{x_0}) = \chi_{0,m}^2$
 A 1 CODA Valore critico $\chi_{1-\alpha}(m)$

$\chi_0^2 \leq \chi_{1-\alpha}(m)$ Accetto
 $\chi_0^2 > \chi_{1-\alpha}(m)$ Rifiuto

TEST GLOBALE SUI PARAMETRI M.Q. CON σ^2 INCOGNITO

$H_0: \mu = \mu_{x_0}$ $\frac{(\hat{x}_0 - \mu_{x_0})^T N (\hat{x}_0 - \mu_{x_0})}{m \hat{\sigma}_0^2} = F_0(m, m-m)$
 Valore critico $F_{\alpha}(m, m-m)$

$F_0 \leq F_{\alpha}(m, m-m)$ Accetto
 $F_0 > F_{\alpha}(m, m-m)$ Rifiuto

TEST PUNTUALE SUI PARAMETRI M.Q. CON σ^2 INCOGNITO

$H_0: \mu_{x_i} = \mu^*_{x_i}$ $\frac{|\hat{x}_{0i} - \mu^*_{x_i}|}{\sqrt{\hat{\sigma}_0^2 N_{ii}}} = t_{0(m-m)}$
 Valore critico $t_{1-\alpha/2}(m-m)$

$|t_0| \leq t_{1-\alpha/2}(m-m)$ Accetto
 $|t_0| > t_{1-\alpha/2}(m-m)$ Rifiuto

TEST SU CONFRONTO GLOBALE DI PARAMETRI M.Q. CON σ^2 INCOGNITA

$X_1 = AX_1 + \epsilon$ $X_2 = AX_2 + \epsilon$ $Q = Q_1 = Q_2$ $N_1 = N_2 = N$

$H_0: \mu_{x_1} = \mu_{x_2}$ $\frac{(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)^T N (\hat{x}_2 - \hat{x}_1)}{m(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2)} = F_{0,2}(m-m)$ $F_0 \leq F_{\alpha}$ Accetto

TEST SU CONFRONTO PUNTUALE DI PARAMETRI M.Q. CON σ^2 INCOGNITA

$H_0: \mu_{x_i(1)} = \mu_{x_i(2)}$ $\frac{|\hat{x}_{i(2)} - \hat{x}_{i(1)}|}{\sqrt{(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2) N_{ii}}} = t_{2(m-m)}$

$|t_0| \leq t_{1-\alpha/2}$ Accetto

TEST SULLA CORRETTEZZA DEL MODELLO M.Q.

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $(m-m) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \chi_{(m-m)}^2$

TEST A 1 CODA

Problema $\chi_0^2 = (m-m) \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha}(m-m)$
 $\chi_0^2 = (m-m) \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}(m-m)$

MODELLO MIN QUADRATI

$\bar{X} = A\beta + \epsilon$ $Cov_{\bar{X}} = \sigma^2 Q$ $dim \bar{X} = m$ $dim X = n$ $m > n$

Stimatori corrette \bar{X} distribuite normalmente $\bar{X} = \hat{\bar{X}} + \underline{\epsilon}$ se acc. $f(\underline{\epsilon}) = N[\underline{0}, \sigma^2 Q]$

$\hat{\bar{X}} = N^{-1} A^T Q^{-1} (\bar{X} - \underline{\epsilon})$ $\hat{\bar{X}} \sim N[\mu_{\bar{X}}, \sigma^2 N^{-1}]$ $\hat{\bar{X}} \hat{\underline{\epsilon}}$ $\hat{\bar{X}} \hat{\underline{\epsilon}}$ indipendenti

$\hat{\underline{\epsilon}} = A \hat{\bar{X}} + \underline{\epsilon}$ $\hat{\underline{\epsilon}} \sim N[\mu_{\hat{\underline{\epsilon}}}, \sigma^2 A N^{-1} A^T]$ $\sigma^2 \chi_m^2 = (\hat{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}})^T Q^{-1} (\hat{\bar{X}} - \mu_{\bar{X}})$

$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2$ $\hat{\sigma}^2 \sim N[\sigma^2, \sigma^2(Q - A N^{-1} A^T)]$ $\sigma^2 \chi_{m-n}^2 = \hat{\sigma}^2 Q^{-1} \hat{\underline{\epsilon}}^T \hat{\underline{\epsilon}}$

www.unidoc.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidoc.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari